L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet comporte deux problèmes indépendants.
La propreté des copies, la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et des justifications données tiendront une part prépondérante dans la notation !

PROBLEME 1
(inspiré de CCINP MP 2023 maths 1)

Dans tout le problème, α est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

I Valeur de $I(\alpha)$.

1. Démontrer que $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2. À l'aide d'un changement de variable, trouver un lien entre $I(\alpha)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^{1/\alpha}}$

Dans la suite, on admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^{1/\alpha}} = \frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}$ (*comme prouvé au DS1*).

3. Déterminer la valeur de $I(\alpha)$.

II Lien avec la fonction Gamma.

Dans toute la suite, on pose :

$$G_\alpha = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [0,+\infty[\,,\quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que G_α existe.

2. Démontrer que f_α est bien définie sur $[0,+\infty[$.

3. Démontrer que, pour $x>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{t+1}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Dans toute la suite du problème, on admettra que la fonction f_α est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'_\alpha(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{t+1}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

4. Montrer que, pour $x>0$, $f_\alpha(x) \leqslant \dfrac{1}{x^\alpha}G_\alpha$; *on pourra entre autre utiliser le changement de variable $u = xt$.*

5. En déduire la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $f_\alpha(x)$.

III Vers la formule des compléments.

1. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{G_\alpha}{x^\alpha}$$

2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que g_α est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Justifier que g_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner la valeur, pour $x>0$, de $g'_\alpha(x)$.

c) En déduire que $h_\alpha : x \mapsto G_\alpha e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est solution, sur $\mathbb{R}^{+*}$, de l'équation différentielle $y - y' = \dfrac{G_\alpha}{x^\alpha}$

d) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} h_\alpha(x) = 0$.

e) En déduire que

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = h_\alpha(x).$$

3. Déduire des questions précédentes que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,\mathrm{d}t = G_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

4. Démontrer l'identité suivante (*formule des compléments*) :

$$G_\alpha G_{1-\alpha} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

5. En déduire la valeur $G_{1/2}$ puis celle de l'intégrale de Gauss :

$$J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

IV Une transformée de Fourier.

1. a) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, que, pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\cos(u) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}u^{2k}\right| \leqslant \frac{u^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

b) Montrer que, pour $u \geqslant 0$, on a

$$e^{-u} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}u^k$$

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$; J_0 est donc l'intégrale de Gauss calculée à la fin de la partie précédente.

a) Justifier, pour $n \geqslant 0$, que J_n existe.

b) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre J_n et J_{n+1}.

c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, que

$$J_n = J_0 \times \frac{(2n)!}{4^n n!}$$

3. Dans cette question, on définit la fonction F par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Justifier que $F(x)$ existe, pour tout réel x fixé.

b) Montrer que

$$F(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}t^{2k}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

c) En déduire la valeur de $F(x)$

Fin du Problème 1

PROBLEME 2

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles.
On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

I Étude d'un exemple.

Dans cette partie, on considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

et on note a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
Pour toutes les questions où on demande de déterminer des vecteurs, on choisira des vecteurs à coordonnées entières (ie dans $\mathbb{Z}$) et dont au moins une coordonnée vaut 1.

1. Noyau et image de a

a) Montrer que $\ker(a)$ est une droite et déterminer un vecteur u_1 tel que $\ker(a) = \text{Vect}\{u_1\}$
b) Montrer que $\ker(a)$ et $\text{Im}(a)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2. Réduction de A

a) Déterminer une base de $\ker[(a-id)^2]$ puis un vecteur $u_2 \in \ker[(a-id)^2]$ tel que $u_2 \notin \ker(a-id)$.
b) Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_3, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, où on a posé $u_3 = a(u_2) - u_2$.
c) En déduire une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$, où

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Pseudo inverse de A

Soit $Q \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = QTQ^{-1}$, où T est la matrice introduite à la question précédente (*la matrice Q n'est pas nécessairement la matrice P que vous avez trouvée précédemment et sa valeur exacte n'a pas d'importance*).
On pose $A^+ = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$ et a^+ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A^+.

a) Vérifier que $AA^+ = A^+A$.
b) Calculer AA^+A et A^+AA^+ et donner le résultat sans utiliser la matrice Q.
c) Montrer que $a \circ a^+$ est un projecteur puis préciser $\ker(a \circ a^+)$ et $\text{Im}(a \circ a^+)$.

II Pseudo inverse d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i. $\text{rg}(a) = \text{rg}(a^2)$.
ii. $\ker(a) = \ker(a^2)$.
iii. $\mathbb{R}^n = \text{Im}(a) \oplus \ker(a)$.
iv. Il existe un entier naturel $r \leqslant n$, une matrice $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible tels que $A = Q \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$ *(matrice par blocs)*.

2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que $A^+ \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un pseudo inverse de A lorsque les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

$$AA^+ = A^+A$$
$$A = AA^+A$$
$$A^+ = A^+AA^+$$

a) Montrer que si A admet un pseudo inverse alors on a $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$.

b) Réciproquement, on suppose que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^2)$. En utilisant la propriété iv. de la question **II.1**, montrer que A admet un pseudo inverse.

3. On souhaite maintenant démontrer que A admet au plus un pseudo inverse. Pour cela on considère A'' un pseudo inverse quelconque de A. On note a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A et a'' celui associé à A''.

a) Montrer que $a''(\ker(a)) \subset \ker(a)$ et $a''(\operatorname{Im}(a)) \subset \operatorname{Im}(a)$.

b) En déduire qu'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ telle que $A'' = Q \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$, l'entier r et la matrice Q étant ceux obtenus à la question **II.1.**iv.

c) Montrer que $a \circ a''$ est un projecteur de $\mathbb{R}^n$ dont on précisera le noyau et l'image en fonction de ceux de a. Préciser ce que vaut $Q^{-1}(AA'')Q$.

d) Montrer que A admet au plus un pseudo inverse.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A admet un pseudo inverse et le déterminer.

Fin du Problème 2