

## Correction du DS2

### PROBLEME 1 : (inspiré de CCINP MP 2023 maths 1) Partie I

1.  $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{1-\alpha}}$  et  $1-\alpha < 1$  donc  $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$  est intégrable sur  $]0, 1[$ . Enfin,  $\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2-\alpha}}$  et  $2-\alpha > 1$  donc  $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  aussi et donc sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
2. On pose  $x = u^{1/\alpha}$  : l'application  $u \mapsto u^{1/\alpha}$  est  $\mathcal{C}^1$ , strictement croissante et bijective de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ; de plus, on a  $dx = \frac{1}{\alpha} u^{(1/\alpha)-1} du$  donc  $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}(\alpha-1)}}{1+u^{1/\alpha}} \frac{1}{\alpha} u^{1/\alpha-1} du$  donc  $I(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{1/\alpha}} du$
3.  $I(\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$

### Partie II

1.  $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $t^{\alpha-1}e^{-t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$  et  $1-\alpha < 1$  car  $\alpha > 0$ ; puis  $t^{\alpha-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , par croissances comparées, donc  $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^{+*}$
2.  $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt}$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et  $\left| \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt} \right| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}$  donc, par comparaison,  $x \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  si  $x \geq 0$  et  $f_\alpha$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$
3.  $t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t}e^{-xt}$  est  $\mathcal{C}^0$  sur  $\mathbb{R}^+$  car  $\alpha > 0$  et  $t^\alpha e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  car  $x > 0$  donc  $t \mapsto t^\alpha e^{-xt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$
4. On pose  $t = \frac{u}{x}$  : l'application  $u \mapsto \frac{u}{x}$  est  $\mathcal{C}^1$ , strictement croissante et bijective de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ;  $dt = \frac{1}{x} du$  donc  $f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(u/x)^{\alpha-1}}{1+u/x} e^{-u} \frac{du}{x} = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u/x} e^{-u} du$ . De plus, pour  $u \geq 0$ , on a  $\frac{1}{1+u/x} \leq 1$  donc  $\frac{u^{\alpha-1}}{1+u/x} e^{-u} \leq u^{\alpha-1} e^{-u}$ , ce qui donne, en intégrant (la convergence des intégrales est déjà assurée)  $f_\alpha(x) \leq \frac{G_\alpha}{x^\alpha}$
5. On a l'encadrement  $0 \leq f_\alpha(x) \leq \frac{G_\alpha}{x^\alpha} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$  donc  $\lim_{+\infty} f_\alpha = 0$

### Partie III

1. On a, par linéarité,  $f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} + t^\alpha}{1+t} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha(1+t)}{1+t} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-xt} dt$  donc, en utilisant le changement de variable  $u = xt$  déjà justifié précédemment, on obtient  $f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{G_\alpha}{x^\alpha}$
2. a) Si  $x > 0$ ,  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$  est continue sur  $[x, +\infty[$  et  $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-xt})$  donc  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$  est intégrable sur  $[x, +\infty[$  et  $g_\alpha$  est définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$
- b) On écrit  $g_\alpha(x) = - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt + g_\alpha(1)$  donc, comme  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$  est l'unique primitive de  $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x^\alpha}$  qui s'annule en 1 donc  $g_\alpha$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et  $g'_\alpha(x) = -\frac{e^{-x}}{x^\alpha}$  pour  $x > 0$
- c) Par produit,  $h_\alpha$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et, pour  $x > 0$ ,  $h'_\alpha(x) = h_\alpha(x) + G_\alpha e^x f'_\alpha(x) = h_\alpha(x) + G_\alpha e^x \frac{e^{-x}}{x^\alpha}$  donc  $h_\alpha(x) - h'_\alpha(x) = \frac{G_\alpha}{x^\alpha}$  pour  $x > 0$
- d) L'application  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est décroissante sur  $[x, +\infty[$  donc, pour  $t \geq x$ , on a  $0 \leq \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \leq \frac{e^{-t}}{x^\alpha}$ , ce qui donne en intégrant,  $0 \leq h_\alpha(x) \leq G_\alpha e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^\alpha} dx = G_\alpha e^x \frac{1}{x^\alpha} [e^{-t}]_x^{+\infty} = \frac{G_\alpha}{x^\alpha}$ . Par encadrement, on a  $\lim_{+\infty} h_\alpha = 0$
- e) Comme  $f_\alpha$  et  $h_\alpha$  sont solutions sur  $\mathbb{R}^{+*}$  de la même équation différentielle linéaire,  $f_\alpha - g_\alpha$  est solution de l'équation homogène  $y - y' = 0$  donc il existe une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_\alpha(x) - h_\alpha(x) = \lambda e^x$ . Comme  $\lim_{+\infty} (f_\alpha - h_\alpha) = 0$ , on en déduit  $\lambda = 0$  donc  $f_\alpha = h_\alpha$

3. Il s'agit de prolonger l'égalité, valable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , entre  $f_\alpha$  et  $g_\alpha$  en  $x = 0$  :  $f_\alpha$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  donc en 0 et comme  $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \sim_0 \frac{1}{t^\alpha}$  avec  $\alpha < 1$ , la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} g_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ , ce qui donne  $\lim_{x \rightarrow 0} h_\alpha(x) = G_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ . Par passage à la limite quand  $x$  tend vers 0 dans l'égalité de **III.2.e**, on a

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt = f_\alpha(0) = G_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt}$$

4. En remarquant que  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = G_{1-\alpha}$  et avec la valeur de  $I(\alpha)$  vue en **I.3**, on déduit  $\boxed{G_\alpha G_{1-\alpha} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}}$

5. Avec  $\alpha = \frac{1}{2} \in ]0, 1[$ , on a  $G_{1/2}^2 = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi$  et comme  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$  est positive, on a  $G_{1/2} \geq 0$  donc  $\boxed{G_{1/2} = \sqrt{\pi}}$

On pose alors  $t = u^2$  : l'application  $u \mapsto u^2$  est  $\mathcal{C}^1$ , strictement croissante et bijective de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  ;  $dt = 2u du$

donc  $G_{1/2} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} \times 2u du = 2J_0$  ce qui donne  $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

#### Partie IV

1. a) La fonction  $\cos$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+2}$  sur  $\mathbb{R}$  ; pour  $k \leq n$ , on a les dérivées  $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$  et  $\cos^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \sin(0) = 0$  puis  $|\cos^{(2n+2)}| = |\cos| \leq 1$  donc l'inégalité de Taylor-Lagrange donne

$$\left| \cos(u) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{u^k}{k!} \cos^{(k)}(0) \right| \leq \frac{|u|^{2n+2}}{(2n+2)!} \|\cos^{(2n+2)}\|_\infty, \text{ ce qui, compte tenu des termes impairs qui sont nuls}$$

donne  $\boxed{\left| \cos(u) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k u^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{u^{2n+2}}{(2n+2)!}}$

b) On applique à nouveau l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction  $\varphi : u \mapsto e^{-u}$  qui est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^+$  ; on a

$$\varphi^{(k)}(0) = (-1)^k \text{ et } |\varphi^{(n+1)}(u)| = e^{-u} \leq 1 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ donc } \left| e^{-u} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} u^k \right| \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc, par}$$

encadrement,  $\boxed{e^{-u} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} u^k}$

2. a) La fonction  $t \mapsto t^{2n} e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et  $t^{2n} e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  donc  $\boxed{t \mapsto t^{2n} e^{-t^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$

b) Les fonctions  $u : t \mapsto e^{-t^2}$  et  $v : t \mapsto \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  ;  $\lim_0 uv = \lim_{+\infty} uv = 0$  donc, par IPP,

$$J_n = \left[ u(t)v(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \times (-2te^{-t^2}) dt = \frac{2}{2n+1} J_{n+1}. \text{ On a donc } \boxed{J_{n+1} = \frac{2n+1}{2} J_n}$$

c) Une récurrence suffit : on a bien  $J_0 = J_0 \times \frac{0!}{4^0 0!}$  et si  $J_n = J_0 \frac{(2n)!}{4^n n!}$  alors  $J_{n+1} = \frac{2n+1}{2} J_n \stackrel{\text{HR}}{=} \frac{2n+1}{2} \times J_0 \frac{(2n)!}{4^n n!}$

puis  $J_{n+1} = J_0 \frac{(2n+2)!}{(2n+2)2 \times 4^{n+1}} = J_0 \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!}$

3. a)  $t \mapsto \cos(xt)e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\cos(xt)e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  donc  $\boxed{t \mapsto \cos(xt)e^{-t^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$

b) On a les inégalités suivantes (toutes les intégrales convergent d'après **IV.2.a**) :

$$\begin{aligned} \left| F(x) - \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} e^{-t^2} dt \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \left( \cos(xt) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} \right) e^{-t^2} dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \cos(xt) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} \right| e^{-t^2} dt \\ &\stackrel{\text{IV.1.a}}{\leq} \int_0^{+\infty} \frac{(xt)^{2n+2}}{(2n+2)!} e^{-t^2} dt = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} J_{n+1} \\ &\leq J_0 \frac{x^{2n+2}}{4^{n+1}(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat par encadrement.

c) Par linéarité de l'intégrale (toutes les convergences ont déjà été prouvées), on a

$$\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} J_k = J_0 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{4^k k!} x^{2k} = J_0 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k$$

donc, avec **IV.1.b** et  $\frac{x^2}{4} \in \mathbb{R}^+$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} e^{-t^2} dt = J_0 e^{-x^2/4}$ . Par unicité de la limite,

on conclut  $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$  pour tout réel  $x$

### PROBLEME 2 : Partie I

1. a)  $(x, y, z) \in \ker(a) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$  donc  $\ker(a) = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$  est une droite car

$u_1 = (1, 1, 1)$  est non nul, donc  $(u_1)$  est libre et constitue une base de  $\ker(a)$ .

b) On a  $\text{Im}(a) = \text{Vect}\{C_1, C_2, C_3\}$  mais  $C_1 + C_2 + C_3 = 0$  donc  $\text{Im}(a) = \text{Vect}\{C_2, C_3\}$ . On vérifie ensuite que

$(u_1, C_2, C_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  car  $\det_{\mathcal{B}_c}(u_1, C_2, C_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$  donc on a la décomposition

$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\{u_1\} \oplus \text{Vect}\{C_2, C_3\}$ , ie  $\mathbb{R}^3 = \ker(a) \oplus \text{Im}(a)$

2. a)  $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  donc  $(x, y, z) \in \ker(a - id)^2 \Leftrightarrow x + y - z = 0$ ;  $\ker(a - id)^2 = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ ;

les deux vecteurs  $(1, 0, 1)$  et  $(0, 1, 1)$  ne sont pas colinéaires donc  $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$  est une base de  $\ker(a - id)^2$

$u_2 = (0, 1, 1)$  convient puisque  $a(u_2) - u_2 = (-2, 0, -2) \neq 0$ .

b)  $\det_{\mathcal{B}_c}(u_1, u_3, u_2) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$  donc  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$

c) Par construction, on a les relations  $\begin{cases} a(u_1) = 0 \\ a(u_3) - u_3 = (a - id)^2(u_2) = 0 \\ a(u_2) = u_2 + u_3 \end{cases}$  donc  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = T$ . Il suffit donc, par

la formule de changement de base, de prendre  $P = P(\mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  pour avoir  $A = PTP^{-1}$ .

3. On note  $T^+$  la matrice  $T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) On vérifie  $AA^+ = QTQ^{-1}QT^+Q^{-1} = QTT^+Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$  et  $A^+A = QT^+TQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$

b)  $AA^+A = QTT^+TQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} TQ^{-1} = QTQ^{-1}$  donc  $AA^+A = A$

De même, on trouve  $A^+AA^+ = A^+$

c) On a  $(AA^+)^2 = (AA^+A)A^+ = AA^+$  donc  $a \circ a^+$  est un projecteur

On a  $\ker(a \circ a^+) = \ker(a^+ \circ a)$  puis  $\ker(a) \subset \ker(a^+ \circ a)$ ; de plus,  $\text{rg}(a) = \text{rg}(T) = 2$  et,  $Q$  étant inversible,  $\text{rg}(a \circ a^+) = \text{rg}(TT^+) = \text{rg}(I_2) = 2$  donc, avec le théorème du rang, on a  $\dim(\ker(a \circ a^+)) = \dim(\ker(a))$  et

$\ker(a \circ a^+) = \ker(a)$

De même, on a  $\text{Im}(a \circ a^+) \subset \text{Im}(a)$  et, par égalité des dimensions,  $\text{Im}(a \circ a^+) = \text{Im}(a)$

### Partie II

1. i)  $\Rightarrow$  ii) On a toujours  $\ker(a) \subset \ker(a^2)$ , et si  $\text{rg}(a) = \text{rg}(a^2)$ , d'après la formule du rang, on a  $\dim \ker(a) = \dim \ker(a^2)$  donc  $\ker(a) = \ker(a^2)$ .

ii)  $\Rightarrow$  iii) Si  $x \in \ker(a) \cap \text{Im}(a)$ , on a  $x = a(x')$  pour un  $x' \in E$  et  $0 = a(x) = a^2(x')$  donc  $x' \in \ker(a^2) = \ker(a)$ . Ainsi,  $x = a(x') = 0$  donc  $\ker(a) \cap \text{Im}(a) = \{0\}$ . Puis d'après la formule du rang, on a  $E = \text{Im}(a) \oplus \ker(a)$ .

iii)  $\Rightarrow$  iv) Dans une base  $\mathcal{B}$  adaptée à la décomposition  $E = \text{Im}(a) \oplus \ker(a)$ , on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  car  $\text{Im}(a)$  est stable par  $a$ , avec  $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$  où  $r = \dim \text{Im}(a) = \text{rg}(a)$ . On a alors  $\text{rg}(a) = r = \text{rg}(B)$  donc  $B$  est inversible.

On a donc iv) avec  $P$  la matrice de passage de la base canonique de  $E$  à la base  $\mathcal{B}$ .

iv)  $\Rightarrow$  i) On a  $\text{rg}(a) = \text{rg}(B) = r$  car  $B$  est inversible et  $\text{rg}(a^2) = \text{rg}(A^2) = \text{rg}(B^2) = r$  car  $B^2$  est inversible.

2. a) On a  $\text{rg}(A^2) \leq \text{rg}(A)$  et si  $A$  admet un pseudo-inverse  $A'$  alors  $A = AA'A$  et  $AA' = A'A$  donc  $A = A^2A'$  puis  $\text{rg}(A) \leq \min(\text{rg}(A'), \text{rg}(A^2)) \leq \text{rg}(A^2)$  donc  $\boxed{\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)}$

b) Si  $A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$  avec  $P$  et  $B$  inversibles, il suffit de prendre  $\boxed{A' = P \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}$

3. a)  $a$  et  $a''$  commutent donc si  $x \in \ker(a)$  alors  $a(a''(x)) = a''(a(x)) = a''(0) = 0$  et si  $y \in \text{Im}(a)$  alors  $y = a(x)$  pour un  $x \in E$  puis  $a''(y) = a''(a(x)) = a(a''(x)) \in \text{Im}(a)$ . On conclut  $\boxed{\ker(a) \text{ et } \text{Im}(a) \text{ sont stables par } a''}$

b) Si  $A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ , alors  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Ainsi, si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ , comme  $B$  est inversible, on a :

$\ker(a) = \text{Vect}\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$  et  $\text{Im}(a) = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_r\}$ . (Ce qui prouve en fait qu'une telle base est obligatoirement une base adaptée à la décomposition  $E = \text{Im}(a) \oplus \ker(a)$ .)

Comme  $\ker(a)$  et  $\text{Im}(a)$  sont stables par  $a''$ , la matrice de  $a''$  dans  $\mathcal{B}$  est diagonale par blocs :

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a'') = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$ . Enfin, on vérifie que si  $A'' = A''AA''$ , on a  $D' = 0$  donc  $\boxed{A'' = P \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}$

c) Si  $A = AA''A$ , alors  $AA'' = AA''AA'' = (AA'')^2$  donc  $\boxed{a \circ a'' \text{ est un projecteur}}$

On a  $\ker(a) \subset \ker(a'' \circ a)$  et comme  $a = a \circ (a'' \circ a)$ , on a  $\ker(a'' \circ a) \subset \ker(a)$  donc  $\boxed{\ker(a \circ a'') = \ker(a)}$  car  $a \circ a'' = a'' \circ a$ .

De même,  $\text{Im}(a \circ a'') \subset \text{Im}(a)$  et comme  $a = (a \circ a'') \circ a$ , on a  $\text{Im}(a) \subset \text{Im}(a \circ a'')$  puis  $\boxed{\text{Im}(a) = \text{Im}(a \circ a'')}$  (on peut aussi montrer une inclusion et utiliser la formule du rang en repartant de l'égalité des noyaux.)

On a  $\boxed{P^{-1}(AA'')P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$  car c'est la matrice du projecteur  $a \circ a''$  écrite dans une base adaptée à la décomposition  $E = \text{Im}(a \circ a'') \oplus \ker(a \circ a'')$ .

d) On en déduit que  $BD = I_r$  donc  $D = B^{-1}$  et l'unique pseudo-inverse est celui obtenu à la question **III.2.b.**

4. On détermine des bases de  $\ker(a)$  et  $\text{Im}(a)$  : par exemple  $((1, 1, 1), (0, 1, 0))$  est une base de  $\text{Im}(a)$  et  $(0, 1, -1)$  un vecteur directeur de  $\ker(a)$ . On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  qui est inversible (ce qui signifie que  $E = \text{Im}(a) \oplus \ker(a)$

et assure donc l'existence du pseudo-inverse). On a  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  donc  $A' = P \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

On conclut donc  $\boxed{A' = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 7 & -4 & -4 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$  car  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .