

Correction du DS2

PROBLEME 1 : (inspiré de CCINP MP 2023 maths 1) Partie I

1. $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} , $\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{1-\alpha}}$ et $1-\alpha < 1$ donc $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0, 1[$. Enfin, $\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ et $2-\alpha > 1$ donc $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ aussi et donc sur \mathbb{R}^{+*} .
2. On pose $x = u^{1/\alpha}$: l'application $u \mapsto u^{1/\alpha}$ est \mathcal{C}^1 , strictement croissante et bijective de \mathbb{R}^{+*} sur \mathbb{R}^{+*} ; de plus, on a $dx = \frac{1}{\alpha} u^{(1/\alpha)-1} du$ donc $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}(\alpha-1)}}{1+u^{1/\alpha}} \frac{1}{\alpha} u^{1/\alpha-1} du$ donc $I(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{1/\alpha}} du$
3. $I(\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$

Partie II

1. $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} , $t^{\alpha-1}e^{-t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$ et $1-\alpha < 1$ car $\alpha > 0$; puis $t^{\alpha-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, par croissances comparées, donc $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}^{+*}
2. $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} et $\left| \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt} \right| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}$ donc, par comparaison, $x \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt}$ est intégrable sur \mathbb{R}^{+*} si $x \geq 0$ et f_α est définie sur \mathbb{R}^+
3. $t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t}e^{-xt}$ est \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R}^+ car $\alpha > 0$ et $t^\alpha e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $x > 0$ donc $t \mapsto t^\alpha e^{-xt}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+
4. On pose $t = \frac{u}{x}$: l'application $u \mapsto \frac{u}{x}$ est \mathcal{C}^1 , strictement croissante et bijective de \mathbb{R}^{+*} sur \mathbb{R}^{+*} ; $dt = \frac{1}{x} du$ donc $f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(u/x)^{\alpha-1}}{1+u/x} e^{-u} \frac{du}{x} = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u/x} e^{-u} du$. De plus, pour $u \geq 0$, on a $\frac{1}{1+u/x} \leq 1$ donc $\frac{u^{\alpha-1}}{1+u/x} e^{-u} \leq u^{\alpha-1} e^{-u}$, ce qui donne, en intégrant (la convergence des intégrales est déjà assurée) $f_\alpha(x) \leq \frac{G_\alpha}{x^\alpha}$
5. On a l'encadrement $0 \leq f_\alpha(x) \leq \frac{G_\alpha}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $\lim_{+\infty} f_\alpha = 0$

Partie III

1. On a, par linéarité, $f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} + t^\alpha}{1+t} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha(1+t)}{1+t} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-xt} dt$ donc, en utilisant le changement de variable $u = xt$ déjà justifié précédemment, on obtient $f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{G_\alpha}{x^\alpha}$
2. a) Si $x > 0$, $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-xt})$ donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ et g_α est définie sur \mathbb{R}^{+*}
- b) On écrit $g_\alpha(x) = - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt + g_\alpha(1)$ donc, comme $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} , $x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x^\alpha}$ qui s'annule en 1 donc g_α est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} et $g'_\alpha(x) = -\frac{e^{-x}}{x^\alpha}$ pour $x > 0$
- c) Par produit, h_α est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} et, pour $x > 0$, $h'_\alpha(x) = h_\alpha(x) + G_\alpha e^x f'_\alpha(x) = h_\alpha(x) + G_\alpha e^x \frac{e^{-x}}{x^\alpha}$ donc $h_\alpha(x) - h'_\alpha(x) = \frac{G_\alpha}{x^\alpha}$ pour $x > 0$
- d) L'application $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[x, +\infty[$ donc, pour $t \geq x$, on a $0 \leq \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \leq \frac{e^{-t}}{x^\alpha}$, ce qui donne en intégrant, $0 \leq h_\alpha(x) \leq G_\alpha e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^\alpha} dx = G_\alpha e^x \frac{1}{x^\alpha} [e^{-t}]_x^{+\infty} = \frac{G_\alpha}{x^\alpha}$. Par encadrement, on a $\lim_{+\infty} h_\alpha = 0$
- e) Comme f_α et h_α sont solutions sur \mathbb{R}^{+*} de la même équation différentielle linéaire, $f_\alpha - g_\alpha$ est solution de l'équation homogène $y - y' = 0$ donc il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_\alpha(x) - h_\alpha(x) = \lambda e^x$. Comme $\lim_{+\infty} (f_\alpha - h_\alpha) = 0$, on en déduit $\lambda = 0$ donc $f_\alpha = h_\alpha$

3. Il s'agit de prolonger l'égalité, valable sur \mathbb{R}^{+*} , entre f_α et g_α en $x = 0$: f_α est continue sur \mathbb{R}^+ donc en 0 et comme $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \sim_0 \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha < 1$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur \mathbb{R}^{+*} donc $\lim_{x \rightarrow 0} g_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$, ce qui donne $\lim_{x \rightarrow 0} h_\alpha(x) = G_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Par passage à la limite quand x tend vers 0 dans l'égalité de **III.2.e**, on a

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt = f_\alpha(0) = G_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt}$$

4. En remarquant que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = G_{1-\alpha}$ et avec la valeur de $I(\alpha)$ vue en **I.3**, on déduit $\boxed{G_\alpha G_{1-\alpha} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}}$

5. Avec $\alpha = \frac{1}{2} \in]0, 1[$, on a $G_{1/2}^2 = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi$ et comme $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est positive, on a $G_{1/2} \geq 0$ donc $\boxed{G_{1/2} = \sqrt{\pi}}$

On pose alors $t = u^2$: l'application $u \mapsto u^2$ est \mathcal{C}^1 , strictement croissante et bijective de \mathbb{R}^{+*} sur \mathbb{R}^{+*} ; $dt = 2u du$

donc $G_{1/2} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} \times 2u du = 2J_0$ ce qui donne $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Partie IV

1. a) La fonction \cos est de classe \mathcal{C}^{n+2} sur \mathbb{R} ; pour $k \leq n$, on a les dérivées $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$ et $\cos^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \sin(0) = 0$ puis $|\cos^{(2n+2)}| = |\cos| \leq 1$ donc l'inégalité de Taylor-Lagrange donne

$$\left| \cos(u) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{u^k}{k!} \cos^{(k)}(0) \right| \leq \frac{|u|^{2n+2}}{(2n+2)!} \|\cos^{(2n+2)}\|_\infty, \text{ ce qui, compte tenu des termes impairs qui sont nuls}$$

donne $\boxed{\left| \cos(u) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k u^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{u^{2n+2}}{(2n+2)!}}$

b) On applique à nouveau l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $\varphi : u \mapsto e^{-u}$ qui est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^+ ; on a

$$\varphi^{(k)}(0) = (-1)^k \text{ et } |\varphi^{(n+1)}(u)| = e^{-u} \leq 1 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ donc } \left| e^{-u} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} u^k \right| \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc, par}$$

encadrement, $\boxed{e^{-u} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} u^k}$

2. a) La fonction $t \mapsto t^{2n} e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R}^+ et $t^{2n} e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\boxed{t \mapsto t^{2n} e^{-t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+

b) Les fonctions $u : t \mapsto e^{-t^2}$ et $v : t \mapsto \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ ; $\lim_0 uv = \lim_{+\infty} uv = 0$ donc, par IPP,

$$J_n = \left[u(t)v(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \times (-2te^{-t^2}) dt = \frac{2}{2n+1} J_{n+1}. \text{ On a donc } \boxed{J_{n+1} = \frac{2n+1}{2} J_n}$$

c) Une récurrence suffit : on a bien $J_0 = J_0 \times \frac{0!}{4^0 0!}$ et si $J_n = J_0 \frac{(2n)!}{4^n n!}$ alors $J_{n+1} = \frac{2n+1}{2} J_n \stackrel{\text{HR}}{=} \frac{2n+1}{2} \times J_0 \frac{(2n)!}{4^n n!}$

puis $J_{n+1} = J_0 \frac{(2n+2)!}{(2n+2)2 \times 4^{n+1}} = J_0 \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!}$

3. a) $t \mapsto \cos(xt)e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R}^+ et $\cos(xt)e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\boxed{t \mapsto \cos(xt)e^{-t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+

b) On a les inégalités suivantes (toutes les intégrales convergent d'après **IV.2.a**) :

$$\begin{aligned} \left| F(x) - \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} e^{-t^2} dt \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \left(\cos(xt) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} \right) e^{-t^2} dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \cos(xt) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} \right| e^{-t^2} dt \\ &\stackrel{\text{IV.1.a}}{\leq} \int_0^{+\infty} \frac{(xt)^{2n+2}}{(2n+2)!} e^{-t^2} dt = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} J_{n+1} \\ &\leq J_0 \frac{x^{2n+2}}{4^{n+1}(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat par encadrement.

c) Par linéarité de l'intégrale (toutes les convergences ont déjà été prouvées), on a

$$\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} J_k = J_0 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{4^k k!} x^{2k} = J_0 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k$$

donc, avec **IV.1.b** et $\frac{x^2}{4} \in \mathbb{R}^+$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} e^{-t^2} dt = J_0 e^{-x^2/4}$. Par unicité de la limite,

on conclut $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$ pour tout réel x

PROBLEME 2 : Partie I

1. a) $(x, y, z) \in \ker(a) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$ donc $\ker(a) = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$ est une droite car

$u_1 = (1, 1, 1)$ est non nul, donc (u_1) est libre et constitue une base de $\ker(a)$.

- b) On a $\text{Im}(a) = \text{Vect}\{C_1, C_2, C_3\}$ mais $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ donc $\text{Im}(a) = \text{Vect}\{C_2, C_3\}$. On vérifie ensuite que

(u_1, C_2, C_3) est une base de \mathbb{R}^3 car $\det_{\mathcal{B}_c}(u_1, C_2, C_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc on a la décomposition

$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\{u_1\} \oplus \text{Vect}\{C_2, C_3\}$, ie $\mathbb{R}^3 = \ker(a) \oplus \text{Im}(a)$

2. a) $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc $(x, y, z) \in \ker(a - id)^2 \Leftrightarrow x + y - z = 0$; $\ker(a - id)^2 = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$;

les deux vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$ ne sont pas colinéaires donc $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est une base de $\ker(a - id)^2$

$u_2 = (0, 1, 1)$ convient puisque $a(u_2) - u_2 = (-2, 0, -2) \neq 0$.

- b) $\det_{\mathcal{B}_c}(u_1, u_3, u_2) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3

- c) Par construction, on a les relations $\begin{cases} a(u_1) = 0 \\ a(u_3) - u_3 = (a - id)^2(u_2) = 0 \\ a(u_2) = u_2 + u_3 \end{cases}$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = T$. Il suffit donc, par

la formule de changement de base, de prendre $P = P(\mathcal{B}_c \rightarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ pour avoir $A = PTP^{-1}$.

3. On note T^+ la matrice $T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) On vérifie $AA^+ = QTQ^{-1}QT^+Q^{-1} = QTT^+Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$ et $A^+A = QT^+TQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$

- b) $AA^+A = QTT^+TQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} TQ^{-1} = QTQ^{-1}$ donc $AA^+A = A$

De même, on trouve $A^+AA^+ = A^+$

- c) On a $(AA^+)^2 = (AA^+A)A^+ = AA^+$ donc $a \circ a^+$ est un projecteur

On a $\ker(a \circ a^+) = \ker(a^+ \circ a)$ puis $\ker(a) \subset \ker(a^+ \circ a)$; de plus, $\text{rg}(a) = \text{rg}(T) = 2$ et, Q étant inversible, $\text{rg}(a \circ a^+) = \text{rg}(TT^+) = \text{rg}(I_2) = 2$ donc, avec le théorème du rang, on a $\dim(\ker(a \circ a^+)) = \dim(\ker(a))$ et

$\ker(a \circ a^+) = \ker(a)$

De même, on a $\text{Im}(a \circ a^+) \subset \text{Im}(a)$ et, par égalité des dimensions, $\text{Im}(a \circ a^+) = \text{Im}(a)$

Partie II

1. i) \Rightarrow ii) On a toujours $\ker(a) \subset \ker(a^2)$, et si $\text{rg}(a) = \text{rg}(a^2)$, d'après la formule du rang, on a $\dim \ker(a) = \dim \ker(a^2)$ donc $\ker(a) = \ker(a^2)$.

- ii) \Rightarrow iii) Si $x \in \ker(a) \cap \text{Im}(a)$, on a $x = a(x')$ pour un $x' \in E$ et $0 = a(x) = a^2(x')$ donc $x' \in \ker(a^2) = \ker(a)$. Ainsi, $x = a(x') = 0$ donc $\text{Im}(a) \cap \ker(a) = \{0\}$. Puis d'après la formule du rang, on a $E = \text{Im}(a) \oplus \ker(a)$.

- iii) \Rightarrow iv) Dans une base \mathcal{B} adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(a) \oplus \ker(a)$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $\text{Im}(a)$ est stable par a , avec $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ où $r = \dim \text{Im}(a) = \text{rg}(a)$. On a alors $\text{rg}(a) = r = \text{rg}(B)$ donc B est inversible.

On a donc iv) avec P la matrice de passage de la base canonique de E à la base \mathcal{B} .

- iv) \Rightarrow i) On a $\text{rg}(a) = \text{rg}(B) = r$ car B est inversible et $\text{rg}(a^2) = \text{rg}(A^2) = \text{rg}(B^2) = r$ car B^2 est inversible.

2. a) On a $\text{rg}(A^2) \leq \text{rg}(A)$ et si A admet un pseudo-inverse A' alors $A = AA'A$ et $AA' = A'A$ donc $A = A^2A'$ puis $\text{rg}(A) \leq \min(\text{rg}(A'), \text{rg}(A^2)) \leq \text{rg}(A^2)$ donc $\boxed{\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)}$

b) Si $A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec P et B inversibles, il suffit de prendre $\boxed{A' = P \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}$

3. a) a et a'' commutent donc si $x \in \ker(a)$ alors $a(a''(x)) = a''(a(x)) = a''(0) = 0$ et si $y \in \text{Im}(a)$ alors $y = a(x)$ pour un $x \in E$ puis $a''(y) = a''(a(x)) = a(a''(x)) \in \text{Im}(a)$. On conclut $\boxed{\ker(a) \text{ et } \text{Im}(a) \text{ sont stables par } a''}$

b) Si $A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, alors P est la matrice de passage de la base canonique à une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$, comme B est inversible, on a :

$\ker(a) = \text{Vect}\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ et $\text{Im}(a) = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_r\}$. (Ce qui prouve en fait qu'une telle base est obligatoirement une base adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(a) \oplus \ker(a)$.)

Comme $\ker(a)$ et $\text{Im}(a)$ sont stables par a'' , la matrice de a'' dans \mathcal{B} est diagonale par blocs :

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a'') = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$. Enfin, on vérifie que si $A'' = A''AA''$, on a $D' = 0$ donc $\boxed{A'' = P \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}$

c) Si $A = AA''A$, alors $AA'' = AA''AA'' = (AA'')^2$ donc $\boxed{a \circ a'' \text{ est un projecteur}}$

On a $\ker(a) \subset \ker(a'' \circ a)$ et comme $a = a \circ (a'' \circ a)$, on a $\ker(a'' \circ a) \subset \ker(a)$ donc $\boxed{\ker(a \circ a'') = \ker(a)}$ car $a \circ a'' = a'' \circ a$.

De même, $\text{Im}(a \circ a'') \subset \text{Im}(a)$ et comme $a = (a \circ a'') \circ a$, on a $\text{Im}(a) \subset \text{Im}(a \circ a'')$ puis $\boxed{\text{Im}(a) = \text{Im}(a \circ a'')}$ (on peut aussi montrer une inclusion et utiliser la formule du rang en repartant de l'égalité des noyaux.)

On a $\boxed{P^{-1}(AA'')P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ car c'est la matrice du projecteur $a \circ a''$ écrite dans une base adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(a \circ a'') \oplus \ker(a \circ a'')$.

d) On en déduit que $BD = I_r$ donc $D = B^{-1}$ et l'unique pseudo-inverse est celui obtenu à la question **III.2.b.**

4. On détermine des bases de $\ker(a)$ et $\text{Im}(a)$: par exemple $((1, 1, 1), (0, 1, 0))$ est une base de $\text{Im}(a)$ et $(0, 1, -1)$ un vecteur directeur de $\ker(a)$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est inversible (ce qui signifie que $E = \text{Im}(a) \oplus \ker(a)$

et assure donc l'existence du pseudo-inverse). On a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A' = P \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

On conclut donc $\boxed{A' = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 7 & -4 & -4 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$ car $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.