PSI2. TD Signaux analogiques et numériques. Quelques propositions de solutions.

Exercice D. La norme GSM.

a)L'intervalle de temps τ entre deux échantillons successifs est donc τ=0,02/160 s ce qui correspond à une fréquence f_e=1/τ=8kHz.

La bande spectrale utile est donc de 4kHz. Avant l'acquisition numérique, il faut donc éliminer tous les sons dont la fréquence est supérieure à 4kHz, ce qui sera fait avec un filtre passe-bas analogique.

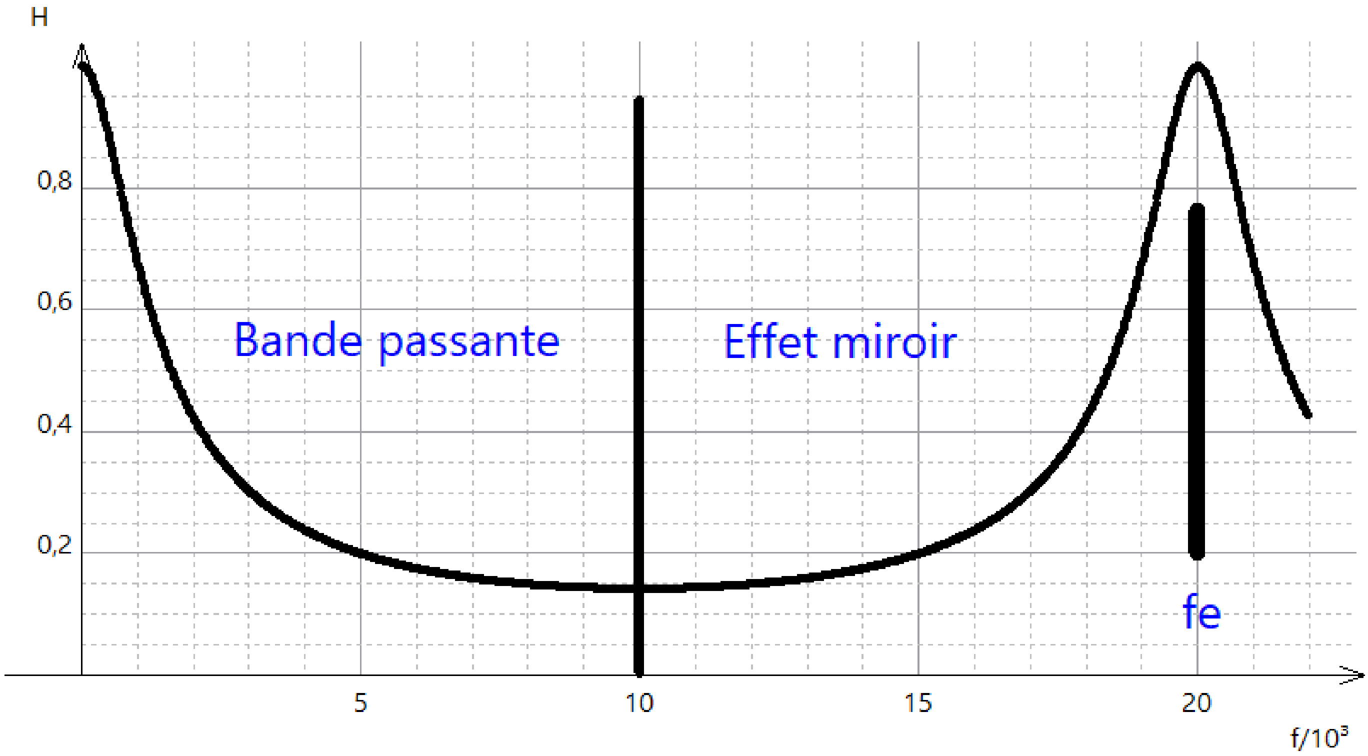
b)456 bits sur 20 ms donne 22800bit/s ou 22,8kbit/s avec la notation habituelle.

c)Sur 20ms, on a au départ 2080 bits de données. Avec la compression, on tombe à 260 bits. Les codes correcteurs représentent donc 196 bits soit 43% de la taille totale.

E) Construction d'un filtre passe-bas du premier ordre.

Forme graphique de la courbe de gain en fonction de la fréquence , obtenue ici avec regressi : 1024 points pour f compris entre 0 et 22kHz pour voir l'effet miroir et la périodicité.

H=abs(0.25/(exp(j*2*π*f/20000)-0.75))



F) Construction d'un filtre passe-haut du premier ordre.

On part de la fonction de transfert harmonique du filtre passe-haut CR :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_o}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_o}} \quad avec \ \ \omega_o = \frac{1}{RC}$$

On fait le produit en croix et on repasse en réel :

$$\omega_o s(t) + \dot{s}(t) = \dot{e(t)}$$

et on l'applique à l'instant t=kτ avec k entier et les formules vues en cours. La fréquence d'échantillonnage est : $f_e = \frac{1}{\tau}$ Pour la dérivée première, on prend la formule à 2 points avec le point suivant. Cela donne :

$$\omega_o s[k] + \frac{s[k+1] - s[k]}{\tau} = \frac{e[k+1] - e[k]}{\tau}$$

On réorganise pour obtenir une formule causale :

$$s[k+1] = (1 - \tau\omega_o)s[k] + e[k+1] - e[k]$$

Il faudra intuiter $s[0]$, par exemple $s[0] = e[0]$, pour lancer la récurrence. Il faudra tester la stabilité.

Pour la fonction de transfert numérique :

$$e[n] = e(n\tau) = E\cos(n\omega\tau) \quad donc \quad \underline{e}[n] = E\exp[j(n\omega\tau)]$$

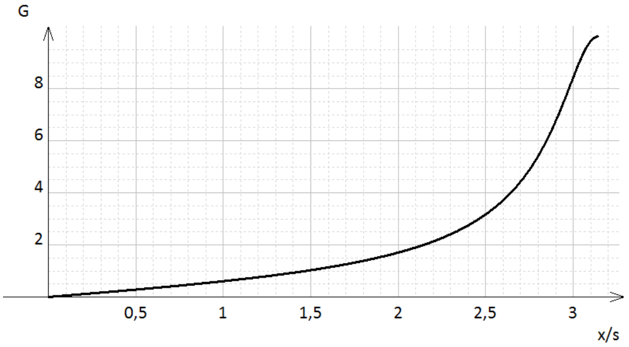
$$s[n] = s(n\tau) = S\cos(n\omega\tau + \varphi) \quad donc \quad s[n] = \underline{S}\exp[j(n\omega\tau)] \quad avec\ \underline{S} = S\exp[j(\varphi)]$$

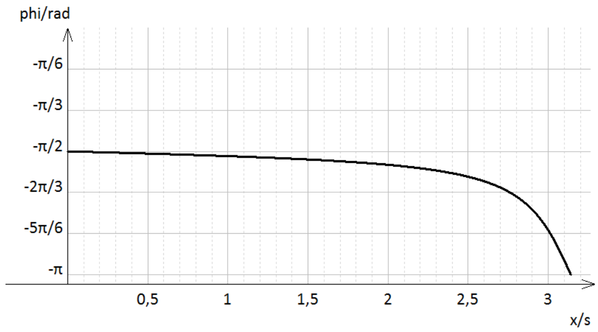
On envoie les expressions dans la formule de récurrence. On sort :

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1 - \exp[jx]}{1 - \tau\omega_o + \exp[jx]} \quad avec\ x = \omega\tau = \frac{2\pi f}{f_e}$$

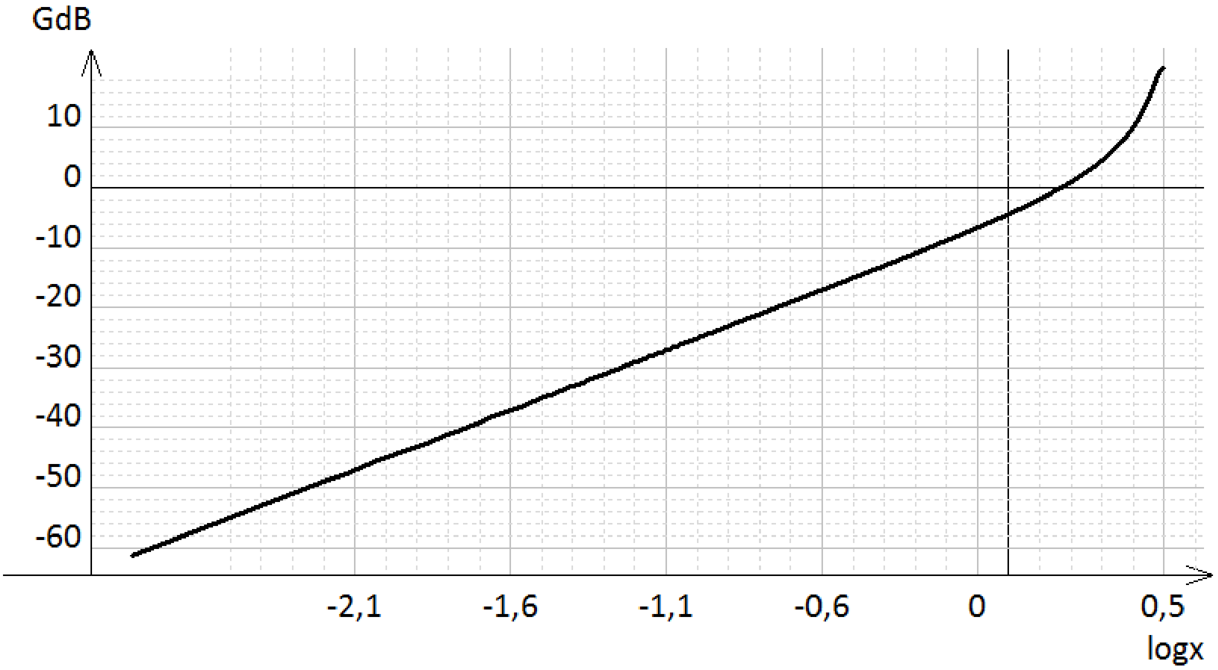
Le choix de $\tau\omega_o$ revient à choisir la fréquence de coupure.
Dans l'intervalle utile, f varie entre 0 et $f_e/2$, donc x varie entre 0 et π.
Pour $x\ :\ 0 \to \pi\ ;\ \exp[jx]\ :\ 0 \to -1\ ;\ \|\underline{H}\|\ :\ 0 \to \frac{2}{\tau\omega_o}$
On peut demander les graphes sous regressi. Je prends $\tau\omega_o = 0{,}2$ ce qui ici correspondrait à une fréquence de coupure $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{0.2}{2\pi} f_e = \frac{f_e}{10\pi}$, ce qui semble un peu faible si on regarde le dessin.

<u>gain et phase en fonction de la fréquence réduite x :</u>





<u>diagramme de Bode en gain :</u>



F)Filtre passe-bas numérique d'ordre 2.

Même méthode que précédemment, où il faudra aussi tester la stabilité. Pour la dérivée première, on prend la formule à 2 points avec le point suivant.

On obtient :

$$s[k+1] = \left(\frac{(\tau\omega_o)^2}{1+\tau\omega_o\sqrt{2}}\right)e[k] + \left(\frac{2+\tau\omega_o\sqrt{2}-(\tau\omega_o)^2}{1+\tau\omega_o\sqrt{2}}\right)s[k] - \frac{s[k-1]}{1+\tau\omega_o\sqrt{2}}$$

H)Quel filtre numérique ?

1)Par définition, les deux premiers termes sont nuls. Il suffit de faire une récurrence : si s[k-1]=s[k]=0 alors s[k+1]=0. Cela marche.

4)On passe en complexe sur l'entrée analogique :

$$e(t) = E.cos(\omega t) \quad devient \quad \underline{e}(t) = E.e^{(j\omega t)}$$

La sortie supposée sinusoïdale de même fréquence s'écrit : $\underline{s}(t) = \underline{S}.e^{(j\omega t)}$

On fait maintenant l'acquisition numérique :

$$\underline{e}[k] = \underline{e}(k.\tau) = E.e^{(jk\omega\tau)} \qquad et \qquad \underline{s}[k] = \underline{s}(k.\tau) = \underline{S}e^{(jk\omega\tau)}$$

On envoie tout cela dans la relation de récurrence, on simplifie par $e^{(jk\omega\tau)}$*puis on multiplie par* $e^{(j2\omega\tau)}$ *pour obtenir alors :*

$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1-2\alpha e^{j\omega\tau}+e^{2j\omega\tau}}{\rho^2-2\alpha\rho e^{j\omega\tau}+e^{2j\omega\tau}}$$

I)Un autre filtre numérique.

1)D'après le critère de Shannon, f est compris entre 0 et $f_e/2$.

2)Un signal de fréquence nulle est constant, donc $e(n) = e(n-1)$ donc $s(n) = e(n)$. Le filtre laisse donc passer les basses fréquences. On pense donc à un passe-bas.

3)A la limite des hautes fréquences, on a $f=f_e/2$. Dans ce cas, vérifier que deux échantillons successifs sont opposés. Donc la sortie est nulle. On pense donc à un passe-bas.

4)On se place en RSP(ω) numériique en adoptant la notation complexe.

$$e[n] = e(n\tau) = Ecos(n\omega\tau) \quad donc \quad \underline{e}[n] = Eexp[j(n\omega\tau)]$$

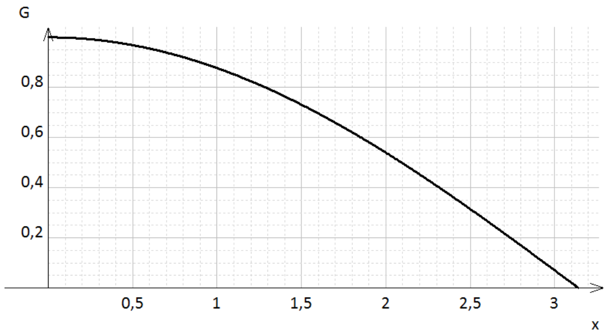
$$s[n] = s(n\tau) = Scos(n\omega\tau+\varphi) \quad donc \quad s[n] = \underline{S}exp[j(n\omega\tau)] \quad avec\ \underline{S} = Sexp[j(\varphi)]$$

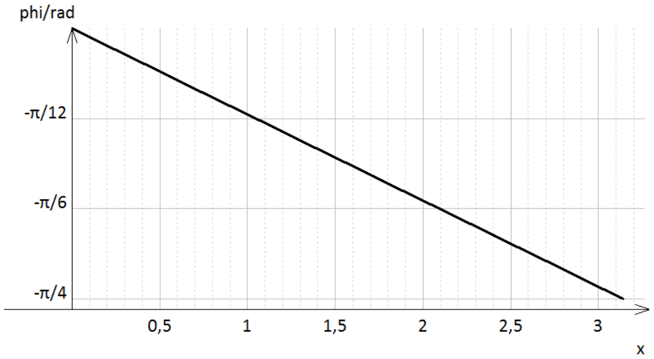
On reporte dans la relation de récurrence , et on sort la fonction de transfert numérique :

$$\underline{H} = \frac{1}{2}\{1-exp[-jx]\} \quad avec\ x = \omega\tau$$

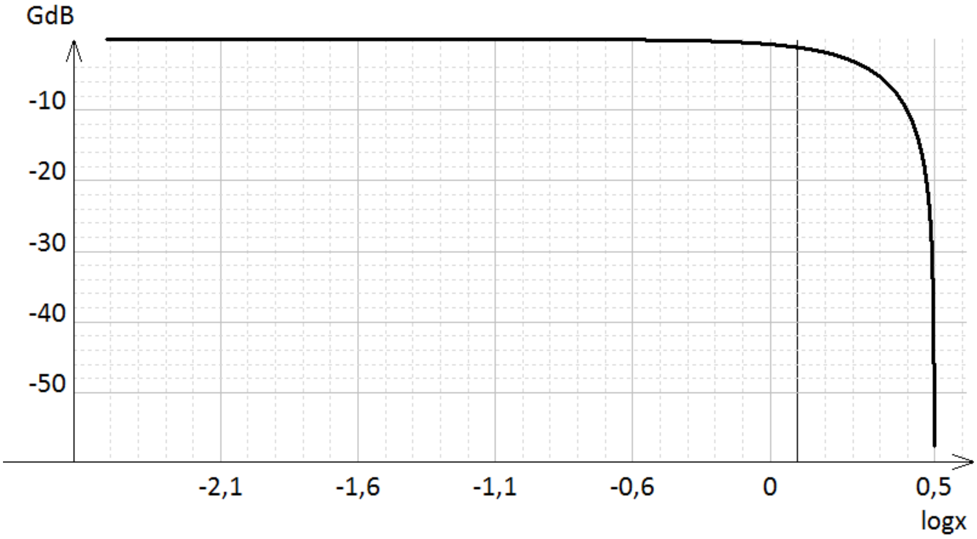
La bande passante correspond à x compris entre 0 et π.

On peut maintenant obtenir les représentations graphiques par exemple en utilisant regressi : gain et phase en fonction de la fréquence réduite x :





et diagramme de bode pour le gain :



On vérifie la structure de filtre passe-bas. Rappel : on n'a traité ici que le régime permanent. Il faudrait aussi vérifier la stabilité, soit donc l'évolution du régime transitoire.

I)FFT d'un signal carré.

Les amplitudes des harmoniques d'un signal carré décroissent avec l'ordre et les harmoniques paires sont nulles. Donc il y a eu des pb de recouvrement de spectre car les harmoniques n'apparaissent pas dans cet ordre. On peut donc penser :

h1 :f h3 :g (ou d ?) h5 :d (ou g ?) h7 :b h9 :a h11 :c

Supposons que le fondamental soit correctement détecté à f_1=423Hz proche de $f_e/2$ donc $3f_1$ compris entre f_e et $1{,}5f_e$.

Si h3=g alors $3f_1=f_e$+447Hz ce qui donne f_e=822 Hz et h5 de fréquence 2115Hz est entre $2{,}5f_e$ et $3f_e$ donc va laisser une signature à 351Hz et cela ne marche pas.

Il nous reste h3=d, ce qui donne f_e=1000Hz ; maintenant h5 de fréquence 2115Hz est correctement détecté à 115Hz(b).

h7 de fréquence 2961Hz est détectée à 39Hz(a). h9 de fréquence 2807Hz est à 193Hz(c). h11 de fréquence 4653Hz est à 347Hz(e).

Bilan : les pics f,d,b,a,c et e peuvent correspondre à un signal périodique de fréquence 423Hz échantillonné à la fréquence f_e=1000Hz. L'amplitude des pics dans le nouvel ordre est bien décroissante. Il y a quand même un petit problème : le pic g à 447Hz ne rentre pas dans le schéma.

K)Rééchantillonage.

1)1 otet par échantillon, 48000 échantillons par seconde donc une taille de 48000 octets par seconde ou $\frac{48000}{1024} = 46{,}875\ ko/s$.

2)La méthode la plus simple est de prendre 1 octet sur 6.

3)La bande passante initiale est de [0 24kHz[, le rééchantillonnage la fait passer à [0 4kHz[donc tous les signaux dont la fréquence est comprise entre 4kHz et 24kHz vont provoquer un recouvrement de spectre et voir leur fréquence changer.

Il faut éliminer ces signaux AVANT le rééchantillonnage donc faire une filtration de type PASSE-BAS.

4a)4096 est une puissance de 2 donc on va pouvoir appliquer l'algorithme de la FFT, ce qui va considérablement diminuer le temps de calcul.

4b) Cependant , la durée de calcul de la FFT croît en N.Ln(N), ou N est le nombre de points, et il ne faut pas que N soit trop grand.

4c) Une fois la FFT de N=4096 points calculée, on obtient 4096 points fréquentiels. le premier point correspond au continu , la pas spectral est $\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{48000}{4096} \approx 11{,}72\,Hz$ et le dernier correspond à la fréquence $4095 \cdot \Delta f \approx 47988Hz$.

Du fait du recouvrement de spectre, les basses fréquences sont à droite et à gauche, les hautes fréquences inférieures à 24kHz sont au milieu.

La fréquence f_2=4kHz correpond au point n°k_2 tel que $k_2\Delta f=f_2$ soit donc :

$k_2 = \frac{Nf_2}{f_e} = 341{,}33\ldots$

Il faut donc mettre à 0 les points de numéros compris entre 341 et 4095-341=3754.

Ne pas oublier qu'on commence la numérotation à 0.

Ensuite, on fait la FFT inverse et on récupère le signal temporel filtré. On peut faire le rééchantillonage.

4d) Il y a quand même un petit pb : avant le rééchantillonage final, on remet les paquets de 4096 points les uns derrière les autres.

Avant la filtration par FFT, la fin d'un paquet coïncidait avec le début du paquet suivant ; avec la filtration, cette 'continuité' n'est pas forcément assurée et risque de faire apparaître des 'discontinuités' périodiques (tous les 4096 points). Il faut donc faire converger artificiellement la fin d'un paquet avec le début du paquet suivant.

L)Détection correcte d'un signal.

Il faut déjà que la fréquence d'échantillonnage f_e soit supérieure à 2*1010Hz=2020 Hz. Sinon, on ne les détectera pas au bon endroit.

Soit maintenant T la durée de l'acquisition.

Il faut aussi que le pas spectral soit $(\Delta f) = 1/T$ soit nettement inférieur à $|f_2-f_1|$=10Hz. Il faut donc : T>>0,1s.

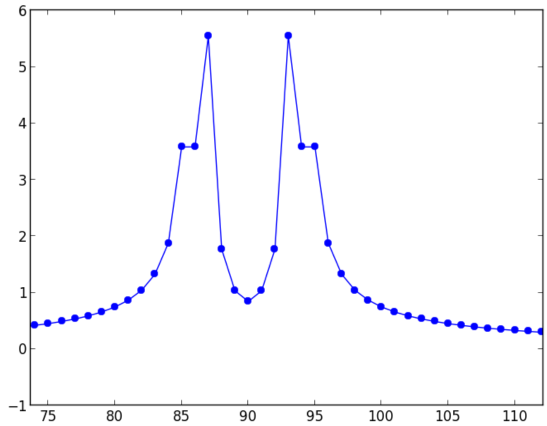
Le nombre minimum de points est donc de 202. Là , on est juste sur la frontière, il convient de prendre une certaine marge de manœuvre qui peut être évaluée par simulation.

Exemples sous Python :

On prend f_1=1000.23 Hz et f_2=1009.89Hz pour que ces fréquences ne tombent pas sur un point de mesure (ce qui expérimentalement est le cas le plus probable).

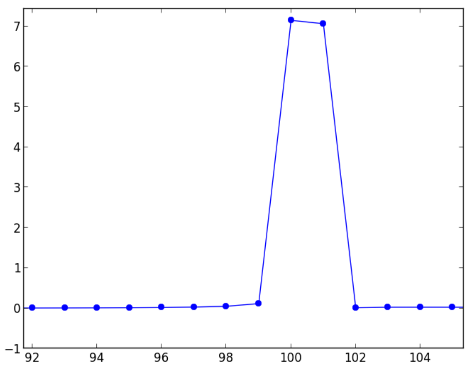
Avec f_e=2100Hz et 180 points :

Vous croyez voir le doublet; pas du tout. On voit juste l'effet miroir centré au point 89. Le doublet n'est pas résolu même si on peut se douter de quelque chose avec le palier du pic.

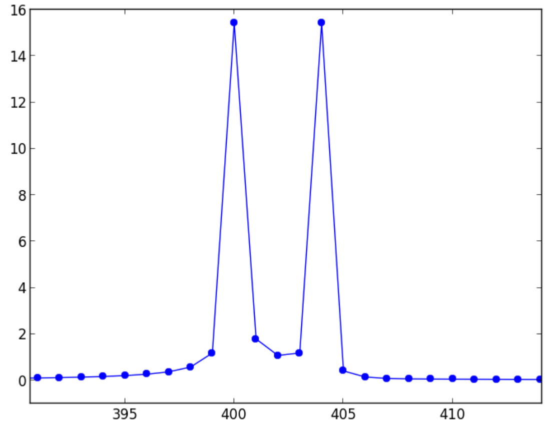


Avec 210 points à 2100Hz :

On est juste au-dessus de la limite. Un seul pic toujours mais un peu large. Ici on ne voit pas l'effet miroir visible seulement à partir du point 105.

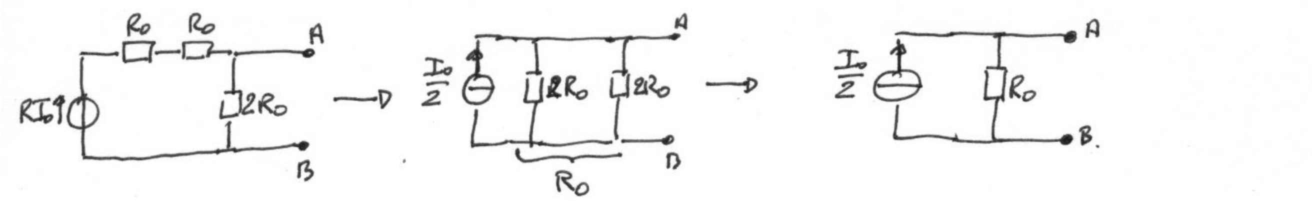


Avec 1000 points à 2500Hz :
On voit bien le doublet, la fréquence est 20% supérieure à la valeur minimale et le nombre de points est 2 fois supérieur à la valeur minimale. On ne voit pas l'effet miroir qui commence au point n°499.



M. Exemple de convertisseur.

1)



Il suffit de continuer le processus de la question 1, qui réapparaît d'ailleurs et on obtient un nouveau Norton : $\left\{\frac{1}{2}\left(I_1+\frac{I_o}{2}\right);\ R_o\right\}$.

2)Récurrence quasi-immédiate : $\left\{\frac{1}{2}\left(I_2+\frac{I_1}{2}+\frac{I_o}{4}\right);\ R_o\right\}$.

3)Avec les huit étages en cascade, le Norton équivalent est :
$\left\{I_N=\frac{1}{2}\left(I_7+\frac{I_6}{2}+\frac{I_5}{2^2}+..+\frac{I_o}{2^7}\right);\ R_o\right\}$.
Comme il n'y a rien de branché en sortie, on a $u=R_oI_N$.
En réorganisant l'expression, on obtient finalement : $u=2^7R_oI_{ref}(2^o\varepsilon_o+2^1\varepsilon_1+..+2^7\varepsilon_7)$.
Ceci est un CNA : Convertisseur Numérique Analogique, qui ici travaille sur un octet e.
Si e=1111111, le nombre entre parenthèses est 255. On peut remarquer que e est 255 écrit en base 2.