Séries numériques

La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.

I Rappels sur les relations de comparaison

Définition : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que :

1. (u_n) et (v_n) sont **équivalentes**, noté $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ s'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un entier n_0 tel que

$$u_n = h_n \times v_n, \text{ pour } n \geqslant n_0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} h_n = 1$$

2. (u_n) est **négligeable** devant (v_n), noté $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un entier n_0 tel que

$$u_n = \varepsilon_n \times v_n, \text{ pour } n \geqslant n_0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

3. (u_n) est **dominée** par (v_n), noté $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ s'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un entier n_0 tel que

$$u_n = h_n \times v_n, \text{ pour } n \geqslant n_0 \text{ et } (h_n) \text{ est bornée}$$

Remarque(s) :

I.1 On a donc $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n = O(v_n)$ et $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$; les autres implications sont fausses.

I.2 $u_n = o(1)$ signifie que (u_n) tend vers 0 et $u_n = O(1)$ signifie que (u_n) est bornée.

Propriété [I.1] : Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a les équivalences suivantes :

1. $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$

2. $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$

3. $u_n = O(v_n)$ si et seulement si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

Remarque(s) :

I.3 Pour montrer que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, il faut donc prouver que $\lim n^2 u_n = 0$.

I.4 L'utilisation d'un O, au lieu d'un o, peut permettre « d'économiser » le calcul d'un terme dans un développement limité :

$$u_n = a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \underbrace{\frac{a_k}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right)}_{= O\left(\frac{1}{n^k}\right)}$$

Attention :

— *Ne pas supprimer les constantes multiplicatives dans les équivalents :* $\dfrac{1+2n}{4+n^2} \sim \dfrac{2}{n}$.

— *Seule la suite nulle (à partir d'un certain rang) est équivalent à* 0 *; faire attention aux cas particulier dans les équivalents de suites avec un paramètre : équivalent de* $\dfrac{1+xn}{1+n^2}$ *?*

Propriété [I.2] : (Croissances comparées)

1. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$ donc $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$.

2. Si $q \in \mathbb{K}$ est tel que $|q| > 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{q^n} = 0$ donc $n^\alpha = o(q^n)$.

3. Pour $q \in \mathbb{K}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$ donc $q^n = o(n!)$.

Exemple(s) :

I.5 Vérifier $\dfrac{1}{n\ln n} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\dfrac{1}{n^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$ pour tout $\alpha > 1$.

I.6 Soit $u_n = \exp\left(-\sqrt{n} + \dfrac{\sin n}{n} + (\ln n)^2\right)$; montrer que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Pour lever une indétermination sur une limite dans une somme, on factorise le terme « le plus gros » (en module).

Propriété [I.3] :

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Si $u_n \sim v_n$ alors
— (u_n) et (v_n) sont de même nature. Si elles convergent alors $\lim u_n = \lim v_n$.
— u_n et v_n sont de même signe pour n assez grand.
— u_n et v_n s'annulent en même temps pour n assez grand.

2. Règles de calcul sur les équivalents :
Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$ (*produit d'équivalents*)
Si u'_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors $\dfrac{u_n}{u'_n} \sim \dfrac{v_n}{v'_n}$ (*quotient d'équivalents*).

3. On a l'équivalence $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$

Remarque(s) :

I.7 La réciproque de la première propriété est en général fausse : si $\lim u_n = \lim v_n$ est finie et non nulle alors $u_n \sim v_n$.

I.8 Deux suites équivalentes n'ont pas forcément la même monotonie.

I.9 Ne pas faire de somme d'équivalents !
Si $u_n \sim v_n$, on ne peut à priori rien dire sur la limite de $(u_n - v_n)$.

I.10 Ne pas composer un équivalent par une fonction ! La dernière propriété permet de remplacer un équivalent par une égalité afin de la composer par une fonction.

Trouver un équivalent de $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

I.11 La dernière propriété signifie aussi que pour trouver un équivalent d'une somme de termes, on vérifie si un des termes est négligeable devant l'autre (et dans ce cas, on le factorise).

II Généralités

1. Définitions

Définition : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on dit que la **série** de terme général u_n, notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, **converge** si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, converge. Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **diverge**.
S_n est appelé **somme partielle** d'ordre n de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.
Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge, on note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la **somme** de cette série, définie par $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$; on définit alors le **reste** d'ordre n de la série par $R_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Exemple(s) :

II.1 La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$.

Remarque(s) :

II.2 Si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un rang n_0, on considère la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$. Lorsque cette série converge, sa somme est alors $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

II.3 Le reste R_n n'est défini que pour une série convergente. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

II.4 L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge constitue un espace vectoriel sur lequel l'application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire.

Propriété [II.1] : Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge ; on dit que la série est **grossièrement divergente**.

Attention : La réciproque est fausse. c/ex : $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\ln(n+1)-\ln(n))$ *diverge mais* $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1)-\ln(n) = 0$.

Remarque(s) :

II.5 Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 veut dire que soit elle possède une limite (finie ou non) non nulle, soit elle n'a pas de limite du tout.

Propriété [II.2] : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.
Dans ce cas, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$.

Propriété [II.3] : **(Lien suite/série)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

La **suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la **série** $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge.

Exemple(s) :

II.6 Si $p\in\mathbb{N}$, $p\geqslant 2$, et, pour $n\geqslant 0$, $u_n=\prod_{k=1}^{p}\frac{1}{n+k}$ alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\frac{1}{(p-1)(p-1)!}$.

II.7 Souvent, lorsque cette propriété s'applique, elle permet de calculer la somme de la série ; ex : calculer $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{4n^2-1}$.

II.8 Cette propriété est utile aussi pour étudier des suites, en utilisant les résultats sur les séries ; ex : étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0>0$ et $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n^\alpha u_n}$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

2. Exemples de séries

Propriété [II.4] : **(Séries géométriques)**
Soit $a\in\mathbb{C}$. La série $\sum_{n\geqslant 0}a^n$ converge si et seulement si $|a|<1$.
Si $|a|<1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty}a^n=\frac{1}{1-a}$ et $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}a^k=\frac{a^{n+1}}{1-a}$.

Exemple(s) :

II.9 C'est une autre catégorie de séries dont on connaît la somme ; ex : calculer $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin n}{2^n}$.

Propriété [II.5] : **(Séries de Riemann)**
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

Remarque(s) :

II.10 Cette fois la somme de ces séries n'est pas connue (hormis peut-être $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, qui est peu évident et hors-programme).

III Séries de nombres réels positifs

Propriété [III.1] : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\geqslant 0$. La série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}S_n$.
Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.

Remarque(s) :

III.1 Cette propriété est en fait valable si $u_n\geqslant 0$ pour $n\geqslant n_0$. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sup_{n\geqslant n_0}S_n\neq\sup_{n\in\mathbb{N}}S_n$.

(III.2) On a un résultat analogue pour les suites réelles à valeurs négatives à partir d'un certain rang : si $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant 0$ alors $\sum u_n$ converge si et seulement si (S_n) est minorée.

Attention : Penser à majorer par une constante !

Exemple(s) :

(III.3) Cette propriété est utile quand on a peu de renseignements sur le terme général de la série ; ex : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive décroissante, montrer que $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

1. Comparaison de deux séries à termes positifs

Théorème [III.2] : (Théorème de comparaison)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles à **termes positifs**

1. Si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n \leqslant v_n$ alors on a les implications suivantes :
   — si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge alors $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.
   — si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

Remarque(s) :

(III.4) La seconde partie de cette propriété est aussi valable pour des suites négatives, donc deux suites de signe constant. Il est donc indispensable de préciser qu'une des deux suites est de signe fixe pour l'utiliser !

Exemple(s) :

(III.5) Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ (appelée constante d'Euler) telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

En déduire la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et la valeur de la somme.

Conséquence [III.3] : (Formule de Stirling)

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Remarque(s) :

(III.6) La formule de Stirling peut aussi s'écrire $n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1+o(1))$, par exemple pour la composer par une fonction.

Propriété [III.4] : (Règle de d'Alembert)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

— Si $l > 1$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge (grossièrement).
— Si $l < 1$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Remarque(s) :

(III.7) Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on ne peut a priori rien dire : on a $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ pour toutes les séries de Riemann (convergentes ou divergentes).

(III.8) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$ (c'est-à-dire $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $u_{n+1} \geqslant u_n$ à partir d'un certain rang). Alors $\sum u_n$ diverge car (u_n) est croissante à partir d'un certain rang et strictement positive donc ne tend pas vers 0.

2. Comparaison à une intégrale

Pour une fonction $f \in \mathcal{CM}^0(\mathbb{R}^+)$ décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$$

ce qui permet de comparer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(n)$ et l'intégrabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple(s) :

(III.9) Séries de Bertrand : $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

(III.10) Equivalents des sommes partielles des séries de Riemann divergentes et des restes des séries de Riemann convergentes.

- Si $\alpha \in [0,1[$ alors $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
- Si $\alpha > 1$ alors $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

IV Séries de nombres réels ou complexes

1. Convergence absolue

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$. On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.

Remarque(s) :

(IV.1) $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ est une série à termes positifs donc on peut lui appliquer le théorème de comparaison ou la règle de d'Alembert.
Par exemple, si on a $|u_n| \leqslant v_n$ (donc $v_n \in \mathbb{R}^+$) et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ est absolument convergente. Il est indispensable de ne pas oublier le module !

(IV.2) L'ensemble des suites (u_n) complexes telles que $\sum u_n$ est absolument convergente est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$.

Propriété [IV.1] : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente si et seulement si les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}(u_n)$ sont absolument convergentes.

Théorème [IV.2] : Toute série absolument convergente est une série convergente.
Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente alors $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Attention : La réciproque de ce théorème est fausse. c/ex : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
Une série convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente.

Propriété [**IV.3**] **:** Soit $a \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} a^n$ est absolument convergente si et seulement si $|a| < 1$.

Théorème [**IV.4**] **:** **(Théorème de comparaison)**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs telle que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente (donc convergente).

Remarque(s) :

(IV.3) Rappel sur les o, O :

1. $u_n = o(v_n)$ signifie $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon v_n$ (il est donc inutile d'écrire $|u_n| = o(v_n)$, le module est contenu dans la notation $o(v_n)$).
2. $u_n = O(v_n)$ signifie $\exists C > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n| \leqslant C v_n$.

Conséquence [**IV.5**] **:** **(Hors-programme sous cette forme)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge (absolument).

Remarque(s) :

(IV.4) Cette propriété est hors-programme sous cette forme, il faut donc savoir conclure en utilisant le théorème de comparaison.

(IV.5) La réciproque est fausse ; c/ex $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge.

(IV.6) Pour montrer la convergence d'une série, souvent on montre que $n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(IV.7) Si $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{C}$, avec $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument aussi.

Exemple(s) :

(IV.8) Montrer que $\sum e^{-\sqrt{n}+4\ln n+in^2}$ converge.

2. Séries alternées

Définition : On dit que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est une **série alternée** s'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle de signe fixe telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n v_n$$

Théorème [**IV.6**] **:** **(Critère spécial des séries alternées)**
Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est une série alternée telle que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et tend vers 0 alors

a) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

b) $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du même signe que u_{n+1} (son premier terme)

c) $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$, pour $n \geqslant -1$.

Attention : Le critère spécial des séries alternées n'est pas une condition nécessaire de convergence. c/ex : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{1+(-1)^n}{n^2}$ *est une série alternée (absolument) convergente qui ne vérifie pas le CSSA.*

Remarque(s) :

(*IV.9*) Si $\sum u_n$ vérifie le CSSA alors, en particulier, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ est du signe de u_0 et $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right|\leqslant |u_0|$.

(*IV.10*) Si $\sum u_n$ est alternée, si (u_n) tend vers 0 et si (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge. Par contre « R_n est du signe de u_{n+1} » et « $|R_n|\leqslant |u_{n+1}|$ » ne sont valables qu'à partir du rang n_0.

Conséquence [IV.7] : Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. Si $\alpha>0$ alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ converge (avec convergence absolue si et seulement si $\alpha>1$).

2. Si $\alpha\leqslant 0$ alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ diverge.

Attention : Ne pas utiliser le théorème de comparaison (donc des équivalents) pour des séries non positives : si $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}$ *alors* $\sum u_n$ *diverge alors que* $u_n\sim\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *et* $\sum\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *converge.*

Exemple(s) :

(*IV.11*) Étudier la nature de $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ en fonction de $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

(*IV.12*) Soit $\displaystyle R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$; étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}R_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}R_n$.

(*IV.13*) *Pour étudier la nature d'une série qui n'est pas de signe fixe, on peut utiliser un DL dont le terme d'erreur est le terme général d'une série absolument convergente :*
étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n^{2/3}+\cos(n)}$.

(*IV.14*) *Pour étudier la nature d'une série qui n'est pas de signe fixe, on peut utiliser un DL dont un des termes est de signe fixe :*
Déterminer, en fonction de $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$, la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Remarque(s) :

(*IV.15*) Étude de la convergence d'une série de signe quelconque :
- Chercher un équivalent pour obtenir la convergence absolue, ou la divergence grossière.
- Utiliser le CSSA s'il s'applique.
- Si l'équivalent n'est pas utilisable (pas de convergence absolue et la suite n'est pas de signe fixe), on cherche un DL à un ordre supérieur (une précision $o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha>1$ par exemple ou bien jusqu'à faire apparaître un terme de signe fixe).

(*IV.16*) Rédaction du théorème de comparaison : il y a toujours un argument pour tenir compte du signe à donner :
- Soit la suite est de signe fixe (et il faut le dire) et on utilise directement un équivalent par exemple.
- Soit il faut parler d'absolue convergence et donc majorer le module par exemple.

3. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Définition : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On appelle **produit de Cauchy** des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Remarque(s) :

(IV.17) On a aussi $w_n = \sum_{k=0}^{n} v_k u_{n-k}$.

Théorème [IV.8] : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ leur produit de Cauchy. Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont absolument convergentes alors $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ est absolument convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Conséquence [IV.9] : On définit la fonction exponentielle complexe par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

On a alors $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$.

4. Utilisation des formules de Taylor

Pour étudier la série $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ où $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, on peut faire une comparaison série/intégrale, même lorsque la fonction f n'est pas monotone, par l'intermédiaire d'une formule de Taylor (mais aucun résultat ne figure dans le programme) : on applique une formule de Taylor à F, une primitive de f.

$$F(n+1) - F(n) = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Si on parvient à prouver la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \int_n^{n+1} (n+1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie (donc en particulier si la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$).

Exemple(s) :

(IV.18) Etudier $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(\ln n)}{n}$.

(IV.19) Cette méthode peut aussi servir à trouver des développements asymptotiques plus précis que la comparaison série/intégrale « classique ».
Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.