TD5 : Algèbre linéaire

Exercice 1
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer un polynôme annulateur de M de degré 2 puis M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (CCP PSI 2017)

1. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de degré $\leqslant 2$.
2. Trouver un polynôme annulateur de A et en déduire A^{-1}.
3. Quels sont tous les polynômes annulateurs de A ? *(*)*

Exercice 3 (CCP PSI 2018)
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\Delta_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M + M^T = \mathrm{Tr}(M)A\}$, $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n$ celui des matrices antisymétriques.

1. Montrer que Δ_A est un espace vectoriel.
2. Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 2$, montrer que $\Delta_A = \mathcal{A}_n$. *(*)*
3. Déterminer Δ_A si $\mathrm{Tr}(A) = 2$ et $A \notin \mathcal{S}_n$. *(*)*
4. Si $A \in \mathcal{S}_n$ et $\mathrm{Tr}(A) = 2$, déterminer $\Delta_A \cap \mathcal{S}_n$ et en déduire Δ_A. *(*)*

Exercice 4 (CCINP PSI 2018)
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)A$.

1. Trouver un polynôme annulateur de f. *(*)*
2. Montrer que f est bijectif dès que $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$.
3. On suppose $\mathrm{Tr}(A) = -1$. Donner $\ker(f)$ et montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des matrices de trace nulle.
4. Résoudre l'équation $X + (\mathrm{Tr}\,X)A = B$ d'inconnue X.

Exercice 5 (CCP PSI 2016)
On pose $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $m_{i,j} = \begin{cases} b & \text{si } j > i \\ a & \text{si } i > j \\ r_i & \text{si } i = j \end{cases}$ où $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{K}^n$ et on note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que $x \mapsto \det(M + xJ)$ est une fonction affine (polynômiale de degré $\leqslant 1$). *(*)*
2. En déduire, lorsque $a \neq b$, la valeur de $\det(M + xJ)$ puis de $\det(M)$. *(*)*

Exercice 6 (Centrale PSI 2023)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est un commutateur s'il existe $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f = u \circ v - v \circ u$

1. Soit f un commutateur de E. Montrer que $\mathrm{Tr}(f) = 0$
2. Soit f un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie. *(*)*
3. Soit f de trace nulle. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a $a_{1,1} = 0$.
4. En déduire que si $\mathrm{Tr}(f) = 0$ alors f est un commutateur. *(*)*

Indications

Exercice 2

3. *en supposant que $Q(A) = 0$, écrire la division euclidienne de Q par P (le polynôme de Q2) puis vérifier que P divise Q.*

Exercice 3

2. *en supposant que $M \in \Delta_A$, commencer par déterminer* $\mathrm{Tr}(M)$.
3. *transposer l'équation pour en obtenir une seconde.*
4. *commencer par remarquer que $\Delta_A \cap \mathcal{S}_n$ est inclus dans une droite.*

Exercice 4

1. *de degré 2 ; ne pas confondre un polynôme annulateur de f et de de $f(M)$.*

Exercice 5

1. *par manipulation sur les rangées, éliminer tous les termes x sauf 1.*

2. *on a* $\forall x \in \mathbb{R}, \det(M+xJ) = \alpha x + \beta$ *donc deux inconnues* α *et* β *que l'on peut déterminer si on trouve deux valeurs de* x *pour lesquelles* $\det(M+xJ)$ *est facile à calculer.*

Exercice 6

2. *vérifier que si* $(x, f(x))$ *est liée alors on a* $f(x) = \alpha x$

4. *raisonner par récurrence sur* $\dim(E)$ *puis calculer* $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & L_1 \\ C_1 & V \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & L_1 \\ C_1 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$