I Études de convergence

Exercice 1 *[Solution]*
Déterminer la nature des séries $\sum u_n$, $a > 0$.

$$u_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^{-\frac{1}{6}} \quad ; \quad u_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}} \quad ; \quad u_n = \left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}}$$

$$u_n = \cos\left(n^2 \pi \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right) \quad ; \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a + (-1)^n}} \quad ; \quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x^2} \sin x \, \mathrm{d}x$$

Exercice 2 (Navale PSI 2019) *[Solution]*
Nature de $\sum u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$ en fonction de $\alpha \neq \beta$?

Exercice 3 (CCP PSI 2011) *[Solution]*
Nature de $\sum (1 - \operatorname{th} n)$?

Exercice 4 (CCINP PSI 2018) *[Solution]*
Donner la nature des séries de termes généraux $\dfrac{(\ln n)^{2018}}{n^\alpha}$ et $\dfrac{1}{n \ln n}$.

Exercice 5 (CCP PSI 2016) *[Solution]*
Montrer que la série de terme général $u_n = \ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n)$ converge mais ne converge pas absolument.

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2013) *[Solution]*
Etudier la convergence de la suite $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-x^n) \, \mathrm{d}x$ puis la convergence de la série de terme général u_n.
indication : chercher un équivalent en posant $t = x^n$.

Exercice 7 (CCP PSI 2013) *[Solution]*
On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n}$. Convergence de (I_n) puis de $\sum (-1)^n I_n$ et $\sum I_n$?

Exercice 8 (Centrale PSI 2008) *[Solution]*
Etudier la nature des séries de termes généraux $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^n - a\left(1 + \dfrac{b}{n}\right)$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n \frac{\ln n}{n}}$.

Exercice 9 (ENSAM PSI 2012) *[Solution]*

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.
2. Majorer $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

   indication : comparer $\ln(1+x)$ et $x - \dfrac{x^2}{2}$ pour $x \geqslant 0$.

Exercice 10 (Mines-Ponts PSI 2013) *[Solution]*
Nature de la série de terme général $u_n = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \dfrac{\pi}{6}$; $(\alpha > 0)$

Exercice 11 (Mines-Télécom PSI 2021) *[Solution]*

1. Montrer que $\arccos(1-h) \underset{h \to 0^+}{\sim} \sqrt{2h}$; on pourra poser $\theta = \arccos(1-h)$
2. Déterminer la nature de $\sum \arccos\left(\dfrac{1+n^3}{2+n^3}\right)$

Exercice 12 (CCP PSI 2008) *[Solution]*
Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}$.
indication : montrer que $x \mapsto \ln(x)/x$ est majorée sur $[1, +\infty[$.

Exercice 13 *[Solution]*

Étudier, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\sum \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{\alpha}{n}}$.

indication : réécrire la formule de Stirling avec un signe = pour pouvoir la composer par ln.

Exercice 14 *[Solution]*

Étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$.

indication : on pourra étudier la monotonie de $v_n = \frac{1}{n}\ln(n!)$.

Exercice 15 *[Solution]*

On pose $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer (a, b) pour que $\sum u_n$ converge et calculer la somme.

Exercice 16 **(Centrale PC 2008)** *[Solution]*

Soient a, b et c dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $u_n = 2\ln(n+a) - \ln(n+b) - \ln(n+c)$. Etudier la convergence de $\sum u_n$ puis de $\sum(-1)^n u_n$.

Exercice 17 **(CCP PSI 2016)** *[Solution]*

Soient $\alpha > 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrer que $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

2. Étudier la convergence de $\sum \frac{R_n}{S_n}$ en fonction de α.

Exercice 18 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*

Soient $\alpha > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $w_n = \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Quelle est la nature de $\sum w_n$?

2. On suppose $u_n = n$. Nature de $\sum w_n$?

3. On suppose $u_n = \frac{1}{n}$. Nature de $\sum w_n$?

Exercice 19 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*

Soient $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum \rho_n$ diverge et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \rho_k$.

1. Montrer que $\sum \frac{\rho_n}{S_n}$ diverge.

indication : Dans le cas où $\lim \frac{\rho_n}{S_n} = 0$, *prouver* $\frac{\rho_n}{S_n} \sim \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$

2. Montrer que $\sum \frac{\rho_n}{S_n^2}$ converge.

indication : Comparer $\frac{\rho_n}{S_n^2}$ *et* $\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$

Exercice 20 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Solution]*

Soient $\alpha > 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$. Pour quelles valeurs de α, la série $\sum \frac{1}{S_n}$ est-elle convergente ?

Exercice 21 *[Solution]*

Nature en fonction de $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de $\sum \left(\sqrt{1 + \frac{x^n}{n^\alpha}} - 1\right)$?

Exercice 22 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*

Etudier la convergence de $\sum \frac{1}{n^a} \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ pour $a > 0$.

indication : faire des paquets selon le reste de la division euclidienne de n *par* 5.

Exercice 23 **(Mines-Télécom PSI 2017)** *[Solution]*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer u_0 et u_1.

2. Montrer que $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ si $x > -1$.

3. Etudier la nature de $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 24 *[Solution]*

On pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\sqrt{k}$.

1. Montrer que la suite $\left(a_n + (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)_{n\geqslant 1}$ a une limite $l > 0$ finie.

2. Quelle est la nature de $\sum \dfrac{1}{a_n}$?

Exercice 25 **(CCP PSI 2019)** *[Solution]*

1. Montrer que $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ admet une unique solution dans $[0,1]$; on la note x_n.

2. Montrer que (x_n) tend vers 0.

3. Étudier la nature de la série de terme général x_n puis $(-1)^n x_n$.

Exercice 26 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*

Soit $f(x) = \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x} e^{i\ln x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. *indication : $u = \ln(x)$ puis IPP.*

2. Puis celle de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$. *indication : Taylor*

Exercice 27 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

Soit $I_n = \dfrac{1}{n^a}\displaystyle\int_0^n \frac{\arctan t}{t^b}\,\mathrm{d}t$. Étudier la nature de $\sum u_n$ dans les cas

1. $b > 0$, $b \neq 1$

2. $b \leqslant 0$

3. $b = 1$

Exercice 28 *[Solution]*

Soit $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

indication : introduire les restes de la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 29 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*

Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$, pour $n \geqslant 1$

1. Montrer que u_n existe et tend vers 0

2. On pose $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} u_n$. Montrer que $\sum v_n$ converge

3. On pose $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum w_n$?

4. On pose $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum x_n$?

Exercice 30 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}\int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\int_0^n e^{-t^2n^2}\,\mathrm{d}t$.

indication : poser $x = nt$ puis faire intervenir la première suite.

Exercice 31 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*
Soit f de $\mathbb{R}^{+*}$ dans lui même.

1. Donner une condition nécessaire pour que $\sum \dfrac{(-1)^n}{f(n)}$ converge. Est-elle suffisante ?

2. On suppose jusqu'à la fin que cette condition nécessaire est réalisée. On suppose f croissante à partir de $n \in \mathbb{N}$. $u_n = \displaystyle\sum_{k \geqslant n} \frac{(-1)^k}{f(k)}$ existe-t-elle ? Quelle est sa limite quand n tend vers $+\infty$? Son signe ?

3. On suppose cette fois $\dfrac{1}{f(k+2)} + \dfrac{1}{f(k)} \geqslant \dfrac{2}{f(k+1)}$. Montrer que $\sum \dfrac{(-1)^k}{f(k)}$ converge

Exercice 32 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*
Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^p}{2^n}$

1. Justifier l'existence de S_p

2. En développant $(n+1)^p$, exprimer S_p en fonction de $S_0, \dots, S_{p-1}$

3. En déduire que $S_p \in \mathbb{N}$.

Exercice 33 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

1. Justifier l'existence de $R_n = \displaystyle\sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k!}$.

2. On admet $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (n+1)! R_n = 1$; déterminer la nature de $\sum \sin(2n!\pi e)$.
indication : Écrire e avec une série dont R_n est le reste et comparer $\sin(2n!\pi e)$ et $\sin(2\pi n! R_n)$

3. Montrer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (n+1)! R_n = 1$.
indication : Réécrire $(n+1)! R_n$ en isolant les deux premiers termes de R_n

II Calcul de sommes

Exercice 34 *[Solution]*
Convergence et somme des séries : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)}$; $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n}$; $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!}$

Exercice 35 *[Solution]*
Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Exercice 36 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*
On admet $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$. Justifier la convergence et calculer la somme de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right)$ puis de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{4n^3 - n}$.

Exercice 37 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Solution]*
On admet $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ avec γ une constante. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} u_n$

1. Montrer qu'il existe une suite (w_n) convergente telle que $\ln(u_n) = w_n - \dfrac{3}{2} \ln(n)$.

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

3. Montrer, pour $n \geqslant 1$, $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3 \sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2 \sum_{k=0}^{n} k u_k + 2 \sum_{k=0}^{n} u_k$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 38 **(Mines-Ponts PSI 2016)** *[Solution]*

1. Par une comparaison série/intégrale, trouver un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

2. Étudier la monotonie et la convergence de (v_n) avec $v_n = u_n - \dfrac{1}{2} (\ln n)^2$.

3. On admet que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$; Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right) \ln 2$.

Exercice 39 (ENTPE-EIVP PSI 2009) *[Solution]*

1. Convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{R(n)}{n(n+1)}$, où R_n est le reste de la division euclidienne de n par 5.

2. Exprimer $S_{5n} = \sum_{k=1}^{5n} \frac{R(k)}{k(k+1)}$ à l'aide de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et en déduire la somme de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{R(n)}{n(n+1)}$.
indication : on pourra utiliser ou démontrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 40 (ENSEA PSI 2008) *[Solution]*
Convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{s(n)}{n(n+1)}$, où $s(n)$ est le nombre de décimales de n. (Utiliser une décomposition bien choisie)

Exercice 41 (Mines-Ponts PSI 2009) *[Solution]*
Montrer que $\sum (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge et calculer la somme.

indication : introduire $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$, exprimer $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ en fonction de u_{2n} et u_n puis utiliser la formule de Stirling.

III Suites récurrentes

Exercice 42 (CCINP PSI 2022) *[Solution]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $0 < u_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

2. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que $\sum u_n^3$ converge.

3. Étudier la série de terme général u_n^2.
indication : utiliser $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$

Exercice 43 (CCP PSI 2016) *[Solution]*
Soit (u_n) définie par $u_0 \in [0, \pi]$ et $u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$.

1. Montrer que (u_n) converge vers 0.

2. Déterminer la nature de $\sum u_n$.
indication : vérifier que $1 - \cos x \leqslant \frac{1}{2} x^2$

Exercice 44 (CCINP PSI 2018) *[Solution]*
Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1. Quelle est la limite de la suite (nu_n) ?

2. Donner la nature des séries de termes généraux u_n et $(-1)^n u_n$.

Exercice 45 (Mines-Ponts PSI 2019) *[Solution]*
Étudier la suite (x_n) définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n + 1}{2}}$ puis la série de terme général $u_n = 1 - x_n$.

Exercice 46 (Centrale PSI 2016) *[Solution]*
Soit (x_n) définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

1. Donner la nature de $\sum \frac{1}{x_n}$.

2. Quel lien y-a-t-il entre x_{n+1}^2 et $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k^2}$?

3. Déterminer un équivalent de x_n.
indication : justifier que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k^2} = o(n)$.

IV Comparaison de séries

Exercice 47 *[Solution]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 > 0$ et $2v_{n+1} = v_n + \sqrt{u_n + v_n^2}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge.

Exercice 48 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}$ pour $n \geqslant 0$

1. Montrer que $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{a_n}{2}$.

2. En déduire que si $\sum a_n$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. La réciproque est-elle vraie ? On pourra utiliser $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

Exercice 49 **(ICNA PSI 2009)** *[Solution]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante tendant vers 0.

1. Comparer la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n(u_n - u_{n+1})$.

indication : si (u_n) tend vers 0 alors $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(u_k - u_{k+1})$

2. Montrer que si les séries convergent alors (nu_n) tend vers 0 et que les sommes des séries sont égales.

Exercice 50 **(Centrale PSI 2013)** *[Solution]*
Soient (a_n) une suite de réels positifs et σ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. Montrer que $\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum a_{\sigma(n)}$ converge. Montrer qu'en cas de convergence, les sommes sont égales.

V Produits infinis

Exercice 51 **(Produit infini)** *[Solution]*

Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ une série à termes complexes absolument convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| < 1$. On pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 + u_k)$.

1. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{R}$. Montrer que $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
indication : étudier $\ln(P_n)$.

2. En utilisant la série $\sum P_{n+1} - P_n$, montrer que le résultat est encore valable si $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 52 **(Centrale PSI 2017)** *[Solution]*

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

1. Pour $\alpha = 2$, étudier la convergence et la limite de (u_n).
indication : $\ln(u_n)$ *et reconnaître une somme de Riemann.*

2. Pour $\alpha \in [0, 1]$, convergence et limite éventuelle de la suite (a_n) avec $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^\alpha}{n^2}$

3. Même question pour u_n.
indication : vérifier $\ln(1 + x) \leqslant x$ *sur* $]-1, +\infty[$.

Exercice 53 **(Centrale PSI 2013)** *[Solution]*

Soient (u_n) une suite réelle positive et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose $S_{2n} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) S_n$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

indication : majorer S_{2^n}.

Exercice 54 **(Mines-Ponts PC 2012)** *[Solution]*

1. Que dire de la limite en $+\infty$ de $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$?

2. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 55 **(Centrale PSI 2023)** *[Solution]*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs. On pose $a_n = u_nv_n$ et on définit le déterminant Δ_n par : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & & & \\ u_1 & 1 & -v_2 & (0) & \\ 0 & u_2 & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 & -v_n \\ & & & u_n & 1 \end{vmatrix}$

1. Trouver une relation entre Δ_n, Δ_{n-1} et Δ_{n-2}
2. Montrer que $\Delta_n \leqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$
3. Montrer que la suite (Δ_n) converge si et seulement si $\sum a_n$ converge

VI Exercices théoriques

Exercice 56 **(Centrale PSI 2011)** *[Solution]*
Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles positives.

1. Montrer que si $\lim b_n = +\infty$ alors $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{b_n}}$ converge.
2. Si $\lim a_n = \lim b_n = +\infty$, la série $\displaystyle\sum \frac{1}{a_n^{b_n}}$ converge-t-elle ?

Exercice 57 **(Règle de Raabe-Duhamel)** *[Solution]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que :
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En étudiant la série de la série $\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ où $v_n = n^\alpha u_n$, déterminer un équivalent de u_n et en déduire, en fonction de α, la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 58 **(Transformation d'Abel)** *[Solution]*

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles ; on pose $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$, pour $n \geqslant 1$ et $V_0 = 0$. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_kv_k = \sum_{k=1}^{n-1}(u_k - u_{k+1})V_k + u_nV_n$
2. On suppose que (u_n) tend vers 0 en décroissant et que la suite (V_n) est bornée. Montrer que $\sum u_nv_n$ converge.
3. Déterminer, en fonction de $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, la nature de $\displaystyle\sum \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$.

Exercice 59 **(Sommation des relations de comparaison)** *[Solution]*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives équivalentes.

1. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ sont équivalents.
2. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ sont équivalents.

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** En partant d'un DL du sin en $O(1/n^5)$ avec $u_n = \exp\left[n^2 \ln\left(n \sin \dfrac{1}{n}\right)\right]$, on trouve $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV.

2. Par DL, on trouve $u_n \sim \dfrac{-e^{-1/2}}{12n}$, négatif donc $\sum u_n$ DV.

3. Comme $u_n = \exp\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}(1+o(1)\right)$, on vérifie $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV.

4. Par DL, $u_n = \dfrac{(-1)\pi}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ CV.

5. On trouve $u_n - \dfrac{(-1)^n}{n^{a/2}} \sim \dfrac{1}{2n^{3a/2}}$ positif ; comme $a/2 > 0$, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{a/2}}$ CV donc $\sum u_n$ et $\sum \left(u_n - \sum \dfrac{(-1)^n}{n^{a/2}}\right)$ sont de même nature ; par équivalent de signe fixe, de même nature que $\sum \dfrac{1}{n^{3a/2}}$. En conclusion, $\sum u_n$ CV si et seulement si $a > 2/3$.

6. On a $|u_n| \leqslant \pi e^{-(n\pi)^2} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV.

Exercice 2 *[sujet]* Si $\beta > \alpha$ alors $u_n \sim \dfrac{1}{n^\beta}$, positif donc $\sum u_n$ CV si et seulement si $\beta > 1$. Par contre, si $\alpha > \beta$ alors $u_n - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \sim \dfrac{-1}{n^{2\alpha-\beta}}$; on en déduit la DVG si $\alpha \leqslant 0$. Si $\alpha > 0$, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge donc $\sum u_n$ et $\sum \left(u_n - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ sont de même nature, puis par équivalent de signe fixe, $\sum u_n$ CV si et seulement si $2\alpha - \beta > 1$.

Exercice 3 *[sujet]* $1 - \operatorname{th} n = \dfrac{2e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \sim 2e^{-2n}$ positif donc $\sum u_n$ CV.

Exercice 4 *[sujet]* Bertrand

Exercice 5 *[sujet]* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $|u_n| \sim \dfrac{1}{2n}$ positif et $\sum |u_n|$ DV ; avec le DL, $\sum u_n$ CV.

Exercice 6 *[sujet]* **1.** $\lim u_n = 0$ par TCD avec $0 \leqslant \exp(-x^n) \leqslant e^{-x}$ (pour $n \geqslant 1$)

2. $nu_n \overset{t=x^n}{=} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = C > 0$ par TCD avec $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t} t^{1/n} \leqslant e^{-t}$ donc $u_n \sim \dfrac{C}{n}$ (positif) et $\sum u_n$ DV

Exercice 7 *[sujet]* $\lim I_n = 0$ par TCD avec $0 \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{ch}^n x} \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2e^{-x}$

$\sum (-1)^n I_n$ CV par CSSA car $\dfrac{1}{\operatorname{ch}} \leqslant 1$ mais comme $\operatorname{ch}(x) \leqslant e^x$, on a $I_n \geqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$ donc $\sum I_n$ DV.

Exercice 8 *[sujet]* **1.** On a $u_n = (e^3 - a) + \left(\dfrac{3e^3}{2} - ab\right)\dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Si $a \neq e^3$ DVG ; si $a = e^3$ et $b \neq \dfrac{3}{2}$, $u_n \sim \left(\dfrac{3e^3}{2} - ab\right)\dfrac{1}{n}$ de signe fixe donc DV ; si $a = e^3$ et $b = \dfrac{3}{2}$, $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc ACV.

2. $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{\ln n}{n^3}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum v_n$ CV.

Exercice 9 *[sujet]* **1.** $u_n = \exp(-n + 1/2 + o(1))$ donc $u_n \sim \sqrt{e}e^{-n}$ positif donc $\sum u_n$ CV.

2. Etudier $x \mapsto \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$, elle est positive ; on en déduit $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{e}e^{-n}$ donc $0 \leqslant R_n \leqslant \sqrt{e}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k} = \frac{e^{-n-1/2}}{1-e^{-1}}$. Il <u>suffit</u> donc que $\dfrac{e^{-n-1/2}}{1-e^{-1}} \leqslant 10^{-3}$ (qui peut donner une valeur de n en prenant le logarithme) pour que la somme partielle de la série soit une approximation convenable de la somme totale.

Exercice 10 *[sujet]* On cherche un DL en 0 de $f(x) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{3} + x\right)$ (dérivable au voisinage de 0) ; on trouve $f'(x) = -2 - 8x\sqrt{3} + o(x)$ donc $f(x) = f(0) - 2x - 4x^2\sqrt{3} + o(x^2)$ puis $u_n = 2\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} - 4\sqrt{3}\dfrac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)$. Comme $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CV, $\sum u_n$ et $\sum \left(u_n - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, puis par équivalent de signe fixe, $\sum \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ sont de même nature. On en déduit $\sum u_n$ CV si et seulement si $2\alpha > 1$.

Exercice 11 *[sujet]* **1.** $\theta = \arccos(1-h) \Leftrightarrow h = 1-\cos(\theta)$ et $h \to 0^+$ si et seulement si $\theta \to 0^+$; $1-\cos\theta \underset{\theta\to 0^+}{\sim} \dfrac{\theta^2}{2}$ donc (composition des limites) $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h}{f(h)^2} = \dfrac{1}{2}$ et comme $f(h) \geqslant 0$, on a bien $f(h) \underset{h\to 0^+}{\sim} \sqrt{2h}$

2. $u_n = \arccos\left(1 - \dfrac{1}{2+n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{2+n^3}} \sim \dfrac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}$ (positif) donc la série CV

Exercice 12 *[sujet]* Par une étude de fonction $\dfrac{\ln x}{x} \in \left[0, \dfrac{1}{e}\right]$ sur $[1, +\infty[$ donc $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \exp\frac{\ln k}{k}\right)^{-1} \geqslant \dfrac{e^{1/e}}{n}$ donc $\sum u_n$ DV.

Exercice 13 *[sujet]* $n! = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1+o(1))$ donc $\ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln(n) + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1)$ et $u_n = \exp\left[-\dfrac{\alpha}{n}\ln(n!)\right] = \exp\left(-\alpha\ln(n) + \alpha + o(1)\right) \sim \dfrac{e^\alpha}{n^\alpha}$ positif donc $\sum u_n$ CV si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 14 *[sujet]* On vérifie le CSSA : $|u_n|$ tend vers 0 avec la formule de Stirling (cf calcul dans l'ex précédent) et $|u_n| = \exp(-v_n)$, il suffit donc de prouver que (v_n) croît : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln(n+1) - \ln(k)) \geqslant 0$.

Exercice 15 *[sujet]* On a $u_n = (1+a+b)\sqrt{n} + \left(\dfrac{a}{2}+b\right)\dfrac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Si $1+a+b \neq 0$ DVG ; si $1+a+b = 0$ et $a+2b \neq 0$, $u_n \sim \left(\dfrac{a}{2}+b\right)\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ de signe fixe donc $\sum u_n$ DV ; si $a=-2$ et $b=1$ $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV.
Si $a=-2$ et $b=1$, (en changeant les indices) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = 1+\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1-\sqrt{2}$.

Exercice 16 *[sujet]* $u_n = \dfrac{2a-b-c}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc si $2a \neq b+c$, $u_n \sim \dfrac{2a-b-c}{n}$ de signe fixe et $\sum u_n$ DV ; si $2a = b+c$ alors $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV.
Comme $(-1)^n u_n = (2a-b-c)\dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $\sum(-1)^n u_n$ CV pour tout (a,b,c).

Exercice 17 *[sujet]* **1.** Par comparaison avec une intégrale (cf cours)

2. On a $\lim S_n = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = l \geqslant 1$ (donc $\neq 0$) ; on a donc $u_n = \dfrac{R_n}{S_n} \sim \dfrac{1}{l(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ positif donc $\sum u_n$ CV si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 18 *[sujet]* **1.** Si on pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k > 0$ (car $u_n > 0$), on a $w_n \sim S^{-\alpha}u_n$ (SATP) donc $\sum w_n$ CV

2. $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ donc $w_n \sim \dfrac{2^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$ (SATP) donc $\sum w_n$ CV ssi $\alpha > 1$

3. $S_n \sim \ln(n)$ donc $w_n \sim \dfrac{1}{n\ln(n)^\alpha}$ (SATP) donc $\sum w_n$ CV ssi $\alpha > 1$ (Bertrand ; comp série/int)

Exercice 19 *[sujet]* **1.** si $\lim \dfrac{\rho_n}{S_n} = 0$, $\ln\left(\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\right) = -\ln\left(1 - \dfrac{\rho_n}{S_n}\right) \sim \dfrac{\rho_n}{S_n}$ (SATP) et $\ln\left(\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\right) = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$ donc $\sum \ln\left(\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\right)$ DV car $\lim\ln(S_n) = +\infty$. Sinon $\sum \dfrac{\rho_n}{S_n}$ est GDV

2. $\dfrac{1}{S_{n-1}} - \dfrac{1}{S_n} = \dfrac{\rho_n}{S_n S_{n-1}} \geqslant \dfrac{\rho_n}{S_n^2}$ (SATP) et $\sum\left(\dfrac{1}{S_{n-1}} - \dfrac{1}{S_n}\right)$ CV car $\lim \dfrac{1}{S_n} = 0$

Exercice 20 *[sujet]* $t \mapsto t^\alpha$ est croissante donc $\displaystyle\int_0^n t^\alpha\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int_1^{n+1} t^\alpha\,\mathrm{d}t$ puis $S_n \sim \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ donc par équivalent de SATP, $\sum \dfrac{1}{S_n} CV$ pour tout $\alpha > 0$

Exercice 21 *[sujet]* Si $x > 1$ DVG ; si $x < -1$, la suite n'est pas définie. Si $|x| < 1$, $|u_n| \sim \dfrac{|x|^n}{n^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV. Si $x = 1$ et $\alpha \leqslant 0$, DVG ; si $x = 1$ et $\alpha >$, $u_n \sim \dfrac{1}{2n^\alpha}$ positif donc $\sum u_n$ CV si et seulement si $\alpha > 1$. Enfin, si $x=-1$ et $\alpha \leqslant 0$, la suite n'est pas définie, alors que si $\alpha > 0$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n^\alpha} - \dfrac{1}{8n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ donc $\sum u_n$ CV si et seulement si $\sum \left(u_n - \dfrac{1}{2n^\alpha}\right)$ CV (car $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CV) et par équivalent de signe fixe, $\sum u_n$ CV si et seulement si $2\alpha > 1$.

Exercice 22 *[sujet]* On a, avec $\sin\dfrac{\pi}{5} = C \neq 0$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5} = D \neq 0$, $u_{5k} = 0$, $u_{5k+1} = \dfrac{(-1)^k C}{(5k+1)^a}$, $u_{5k+2} = \dfrac{(-1)^k D}{(5k+2)^a}$, $u_{5k+3} = \dfrac{(-1)^k D}{(5k+3)^a}$ et $u_{5k+4} = \dfrac{(-1)^k C}{(5k+4)^a}$. On a alors, avec $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $S_{5n} = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{5k+1} + u_{5k+2} + u_{5k+3} + u_{5k+4})$ donc est la somme de 4 sommes partielles de séries CV donc CV. Comme $S_{5n+1} = S_{5n} + u_{5n+1}$ et $\lim u_{5n+1} = 0$, (S_{5n+1}) CV vers la même limite. De même avec $\lim u_{5n+2} = \lim u_{5n+3} = \lim u_{5n+4} = 0$, on trouve que (S_{5n+2}), (S_{5n+3}) et (S_{5n+4}) CV aussi vers la même limite donc $\sum u_n$ CV.

Exercice 23 *[sujet]* **1.** $u_0 = \ln 2$ et $u_1 = 2\ln 2 - 1$

2. Par étude de fonction $\ln(1+x) \leqslant x$ si $x > -1$ puis $\ln(1+x) = -\ln\dfrac{1}{1+x} = -\ln\left(1 - \dfrac{x}{1+x}\right) \geqslant \dfrac{x}{1+x}$.

3. On en déduit $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$. De plus $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(n+1)}$. On a $u_n \geqslant \dfrac{1}{2(n+1)}$ donc $\sum u_n$ DV. Mais par encadrement (u_n) tend vers 0 et $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 [\ln(1+t^{n+1}) - \ln(1+t^n)]\,\mathrm{d}t \leqslant 0$ donc par CSSA, $\sum (-1)^n u_n$ CV.

Exercice 24 *[sujet]* **1.** Si $u_n = \left(a_n + (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)$ alors $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(-1)^n}{2}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \dfrac{(-1)^n}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$ donc (CSSA) $\sum (u_{n+1} - u_n)$ CV, ie la suite (u_n) CV vers $l = \sum_{n \geqslant 1} (u_{n+1} - u_n) + u_1$; par CSSA, on a $\left|\sum_{n\geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)\right| \leqslant |u_2 - u_1| = \dfrac{1}{2(1+\sqrt{2})} < u_1 = \dfrac{1}{2}$ donc $l > 0$.

2. On a $a_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{2} + l + o(1)$ donc $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{2(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{4l}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Comme $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV, $\sum \dfrac{1}{a_n}$ et $\sum \left(\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{2(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ sont de même nature et par équivalent de signe fixe, de même nature que $\sum \dfrac{1}{n}$. On en déduit que $\sum \dfrac{1}{a_n}$ DV.

Exercice 25 *[sujet]* **1.** Par une étude de fonction, on vérifie que $P_n = X^n + X\sqrt{n} - 1$ s'annule une seule fois sur $[0,1]$, que $P_n \leqslant 0$ sur $[0, x_n]$ et que $P_n \geqslant 0$ sur $[x_n, 1]$.

2. Comme $P_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \in [x_n, 1]$ donc $0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc (x_n) tend vers 0.

3. On a $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(1 - x_n^n)$ et comme $0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, on a $0 \leqslant x_n^n \leqslant \dfrac{1}{n^{n/2}}$ donc $\lim x_n^n = 0$ et $x_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ positif donc $\sum x_n$ DV. De plus $(-1)^n x_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n^{(n+1)/2}}\right)$ donc $\sum (-1)^n x_n$ CV.

Exercice 26 *[sujet]* **1.** f est $\mathcal{CM}^0$ sur $[1, +\infty[$; par changement de variable (à justifier), $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{iu}\,\mathrm{d}u$; $u^\alpha e^{iu} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{u^{-\alpha}}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $-1 < \alpha$; par IPP (cf cours) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{-\alpha}}$ CV si et seulement si $\alpha < 0$.

2. On a $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t$ et $|f'(t)| \leqslant \dfrac{\alpha(\ln t)^{\alpha-1} + (\ln t)^\alpha + 1}{t^2}$ donc $\left|\displaystyle\int_n^{n+1} (n+1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{\alpha(\ln n)^{\alpha-1} + (\ln n)\alpha + 1}{((n+1))^2} = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ on en déduit que $\sum f(n)$ CV si et seulement si $\left(\displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV donc si et seulement si $\left(\displaystyle\int_1^{\ln n} u^\alpha e^{iu}\,\mathrm{d}u\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV donc la série CV si $\alpha < 0$; pour $\alpha \geqslant 0$, après 2 IPP successives, on trouve $\displaystyle\int_1^{\ln n} u^\alpha e^{iu}\,\mathrm{d}u = (\ln n)^\alpha + O((\ln n)^{\alpha-1}) \sim (\ln n)^\alpha$ donc la série DV pour $\alpha \geqslant 0$.

Exercice 27 *[sujet]* **1.** On peut d'abord vérifier que $t \mapsto \dfrac{\arctan t}{t^b}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $b<2$. De plus $\dfrac{\arctan t}{t^b} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2t^b}$ donc $I_n \sim \dfrac{C}{n^a}$ (positif) si $1<b<2$ avec $C=\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan t}{t^b}\,\mathrm{d}t>0$ donc $\sum I_n$ CV ssi $a>1$.

Si $0<b<1$ alors $\displaystyle\int_0^n \dfrac{\arctan t-\pi/2}{t^b}\,\mathrm{d}t=-\int_0^n\dfrac{\arctan(1/t)}{t^b}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan(1/t)}{t^b}\,\mathrm{d}t$ car $\dfrac{\arctan(1/t)}{t^b}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^{b+1}}$ et $1+b>1$. On en déduit $I_n\sim\dfrac{1}{n^a}\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^n\dfrac{\mathrm{d}t}{t^b}=\dfrac{\pi(1-b)}{2n^{a+1-b}}$ (positif) donc $\sum I_n$ CV ssi $a+b-1>1$.

2. A nouveau, $0\leqslant\dfrac{\pi(1-b)}{2n^{b+a-1}}=\dfrac{1}{n^a}\displaystyle\int_0^n\dfrac{\arctan(1/t)}{t^b}\,\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{1}{n^a}\int_0^n t^{-(1+b)}\,\mathrm{d}t=\dfrac{-b}{n^{a+b}}$ donc $I_n\sim\dfrac{\pi(1-b)}{2n^{b+a-1}}$ (positif) et $\sum I_n$ CV ssi $a+b-1>1$.

3. $\displaystyle\int_1^n\dfrac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t-\dfrac{\pi}{2}\ln(n)=\int_1^n\dfrac{\arctan t-\pi/2}{t}\,\mathrm{d}t\xrightarrow[t\to+\infty]{}\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t$ car intégrable sur $[1,+\infty[$; comme $\displaystyle\int_0^1\dfrac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t=o(\ln(n))$, on en déduit $I_n\sim\dfrac{\pi\ln(n)}{2n^a}$ (positif) et (Bertrand) $\sum I_n$ CV ssi $a>1$.

Exercice 28 *[sujet]* On pose $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ et S la somme de cette série alternée CV ; par CSSA, on a $|R_n|\leqslant\dfrac{1}{n+1}$ donc $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}(S-R_n)=\dfrac{(-1)^{n+1}S}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ CV.

Exercice 29 *[sujet]* **1.** Reste d'une série CV par CSSA

2. par CSSA, $|v_n|\leqslant\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}=O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$

3. Si $\ell=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ alors $w_n=\dfrac{(-1)^n\ell}{n}-v_n$ donc $\sum w_n$ CV

4. $x_n\sim\dfrac{\ell}{n}$ car $\ell=1+\displaystyle\sum_{n\geqslant2}\dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\geqslant1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}>0$ donc SATP et $\sum x_n$ DV

Exercice 30 *[sujet]* **1.** CV par CSSA : $\displaystyle\int_{n^2}^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est le reste de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ qui CV

2. $v_n=\dfrac{(-1)^n}{n}\displaystyle\int_0^{n^2}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{(-1)^n}{n}I-u_n$ donc $\sum v_n$ CV aussi.

Exercice 31 *[sujet]* **1.** f doit tendre vers $+\infty$ en $+\infty$ mais ce n'est pas suffisant : si f est telle que $f(n)=\ln(n)+(-1)^n$ alors $x_n=\dfrac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n}=\dfrac{(-1)^n}{\ln n}-\dfrac{1}{(\ln n)^2}+o\left(\dfrac{1}{(\ln n)^2}\right)$ donc $\sum\dfrac{(-1)^n}{\ln n+(-1)^n}$ DV car $\sum\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ CV et $x_n-\dfrac{(-1)^n}{\ln n}\sim-\dfrac{1}{(\ln n)^2}$ (négatif) donc $\sum\left(x_n-\dfrac{(-1)^n}{\ln n}\right)$ DV

2. CSSA donc u_n existe, tend vers 0 (reste) et est du signe de $(-1)^n$

3. On a $v_k=\dfrac{1}{f(k+2)}-\dfrac{1}{f(k+1)}\geqslant\dfrac{1}{f(k+1)}-\dfrac{1}{f(k)}=v_{k-1}$ donc (v_k) croît et tend vers 0 donc $v_k\leqslant0$, ce qui donne $\left(\dfrac{1}{f(k)}\right)$ décroissante et tend vers 0, le CSSA s'applique

Exercice 32 *[sujet]* **1.** $\dfrac{n^p}{2^n}=o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

2. $(n+1)^p=n^p+\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}n^k$ donc $\dfrac{(n+1)^p}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n^p}{2^n}+\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}\dfrac{n^k}{2^n}\right)$ donc, en sommant, $S_p-1=\dfrac{1}{2}\left(S_p+\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}S_k\right)$ et $S_p=2+\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}S_k$

3. Par récurrence (forte) avec $S_0=\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\dfrac{1}{2^n}=2$ et $\dbinom{p}{k}\in\mathbb{N}$

Exercice 33 *[sujet]* **1.** $\sum\dfrac{1}{k!}$ CV

2. On a $e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+R_n$ donc $2n!\pi e=2\pi\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}+2n!\pi R_n$ et $\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\in\mathbb{N}$ donc $\sin(2n!\pi e)=\sin(2n!\pi R_n)\sim\frac{2\pi}{n+1}$ (positif) donc $\sum\sin(2n!\pi e)$ DV

3. $(n+1)!R_n=1+\frac{1}{n+2}+\sum_{k\geqslant n+3}\frac{(n+1)!}{k!}$ et $\sum_{k\geqslant n+3}\frac{(n+1)!}{k!}\leqslant\sum_{k\geqslant n+3}\frac{1}{k(k-1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ (reste de série CV).

Exercice 34 *[sujet]* **1.** On a $\frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)}=\frac{5/3}{n-1}-\frac{3/2}{n}-\frac{1/6}{n+2}$; après changement d'indices sur les sommes partielles, on trouve $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)}=\frac{5}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$.

2. On a $3^{n-1}\sin^3\frac{\alpha}{3^n}=\frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{\alpha}{3^n}-3^{n-1}\sin\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)$ donc par télescopage $\sum_{n=0}^{+\infty}3^{n-1}\sin^3\frac{\alpha}{3^n}=\frac{1}{4}\left(\alpha-\frac{1}{3}\sin 3\alpha\right)$ car $\lim 3^n\sin\frac{\alpha}{3^n}=\alpha$.

3. On a $\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}=\frac{-80}{(n+3)!}+\frac{53}{(n+2)!}-\frac{15}{(n+1)!}+\frac{2}{n!}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}=-80\left(e-1-1-\frac{1}{2}\right)+53\,(e-1-1)-15(e-1)+2e$.

Exercice 35 *[sujet]* Si $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ alors $H_{2n}=\frac{1}{4}H_n+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k+1)^2}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.
$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}=-\frac{1}{4}H_n+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k+1)^2}$ donc (la série est ACV) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 36 *[sujet]* $\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\sim\frac{1}{4k^2}$ positif donc la série CV ; $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ donc on obtient $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\ln 2$.
$\frac{1}{4n^3-n}=\frac{-1}{n}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}$ donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^3-k}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2n+1}-1=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2n+1}-1$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^3-n}=2\ln 2-1$

Exercice 37 *[sujet]* **1.** $\ln(u_{n+1})+\frac{3}{2}\ln(n+1)-\ln(u_n)-\frac{3}{2}\ln(n)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{5}{2n}\right)+\frac{3}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc, si $w_n=\ln(u_n)+\frac{3}{2}\ln(n)$, on a bien (w_n) CV (lien suite/série)

2. Si on note $\ell=\lim w_n$, on a $\ln(u_n)=-\frac{3}{2}\ln(n)+\ell+o(1)$ donc $u_n\sim\frac{e^\ell}{n^{3/2}}$ (positif) donc $\sum u_n$ CV

3. Sommer la relation $2(k+1)u_{k+1}+3u_{k+1}=2ku_k+2u_k$

4. On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ et $T_n=\sum_{k=0}^{n}ku_k$; on a $S_{n+1}=3+2(T_n-T_{n+1})+2(S_{n+1}-S_n)=3-2(n+1)u_{n+1}+2u_{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}3$

Exercice 38 *[sujet]* **1.** On trouve $u_n\sim\frac{(\ln n)^2}{2}$.

2. On trouve $v_{n+1}-v_n\sim-\frac{\ln n}{2n^2}$ négatif donc (v_n) décroît à partir d'un certain rang et $\sum(v_{n+1}-v_n)$ CV donc (v_n) CV.

3. En séparant les termes pairs et impairs, on trouve $\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k\ln k}{k}=(\ln 2)H_n+u_n-u_{2n}$ et comme $u_n=\frac{(\ln n)^2}{2}+l+o(1)$, on obtient le résultat annoncé (la série CV par CSSA qui est vérifié à partir d'un certain rang).

Exercice 39 *[sujet]* **1.** $\left|\frac{R(n)}{n(n+1)}\right|\leqslant\frac{4}{n(n+1)}$ donc la série est ACV.

2. En séparant les termes selon que $n = 5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$ ou $5k+4$, on trouve, avec $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, $S_{5n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4}\right) = H_{5n} - H_n = \ln(5n) - \ln(n) + o(1)$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R(k)}{k(k+1)} = \ln(5)$.

Exercice 40 *[sujet]* La CV peut être justifié par $s(n) = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor$ donc $\dfrac{s(n)}{n(n+1)} = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc la série est ACV.

On a $s(n) = p$ pour $10^p \leqslant n \leqslant 10^{p+1} - 1$ donc $\displaystyle\sum_{n=10^p}^{10^{p+1}-1} \frac{s(n)}{n(n+1)} = p \sum_{n=10^p}^{10^{p+1}-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = p\left(\frac{1}{10^p} - \frac{1}{10^{p+1}}\right) = \left(\frac{p}{10^p} - \frac{p+1}{10^{p+1}}\right) + \frac{1}{10^{p+1}}$. On a alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{10^{N+1}-1} \frac{s(n)}{n(n+1)} = \sum_{p=0}^{N}\left(\sum_{n=10^p}^{10^{p+1}-1} \frac{s(n)}{n(n+1)}\right) = -\frac{N+1}{10^{N+1}} + \sum_{p=1}^{N+1} \frac{1}{10^p}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s(n)}{n(n+1)} = \frac{1}{9}$.

Exercice 41 *[sujet]* Tout d'abord la série CV par CSSA. Puis on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(2k) - \ln(2k+1)) + \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(2k+2) - \ln(2k+1)) = 2\sum_{k=1}^{n} \ln(2k) - 2\sum_{k=0}^{n-1} \ln(2k+1) - \ln(2n+1) = 4n\ln 2 + 4u_n - 2u_{2n} - \ln(2n+1)$ puis avec $u_n = \ln(n!) = n\ln(n) - n + \dfrac{1}{2}\ln(n) + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1)$, on trouve $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(2\pi) - 2\ln(2)$

Exercice 42 *[sujet]* **1.** Sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leqslant \sin x \leqslant x$ donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$; la suite (u_n) est donc CV vers l tel que $l = \sin(l)$ (car sin est $\mathcal{C}^0$) donc $l = 0$ (étudier $x \mapsto x - \sin x$).

2. $\sum u_{n+1} - u_n$ CV (télescopique) et comme u_n tend vers 0, on a $u_{n+1} - u_n \sim -\dfrac{1}{6}u_n^3$ (négatif) donc $\sum u_n^3$ CV.

3. $\ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ est une série télescopique DV puisque $(\ln(u_n))$ DV vers $-\infty$. Comme (u_n) tend vers 0, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)$ donc $\ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim -\dfrac{1}{6}u_n^2$ négatif donc $\sum u_n^2$ DV aussi.

Exercice 43 *[sujet]* **1.** $u_{n+1} = 2\sin^2 \dfrac{u_n}{2}$ donc avec $0 \leqslant \sin x \leqslant x$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n^2 \leqslant 12u_n$ puisque $u_n \in [0,1]$ pour $n \geqslant 1$. La suite (u_n) CV donc vers l tel que $l = 1 - \cos(l)$ (car cos est $\mathcal{C}^0$) et $l = 0$ (étude de fonction).

2. On a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n^2$ donc par encadrement $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\sum u_n$ CV (d'Alembert).

Exercice 44 *[sujet]* **1.** On vérifie successivement que $u_n \geqslant 0$ donc $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ donc (u_n) tend vers 0. On en déduit $nu_n \to 1$

2. On en déduit $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ positif et $\sum u_n$ DV. Enfin avec $u_n = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, on trouve $u_{n+1} = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ donc $(-1)^n u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\sum (-1)^n u_n$ CV.

Exercice 45 *[sujet]* Sur $[0,1]$, stable, $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$ est croissante donc (x_n) est monotone, bornée donc CV vers ℓ tel que $\ell = f(\ell)$ donc $\ell = 1$.

On a $u_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - \dfrac{u_n}{2}} = \dfrac{u_n/2}{1 + \sqrt{1 + u_n/2}}$ donc $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{4} < 1$ et $\sum u_n$ CV

Exercice 46 *[sujet]* **1.** $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{x_n} > 0$ donc (x_n) croît et ne peut pas CV vers l car $l = l + \dfrac{1}{l}$ n'a pas de solution positive ; (u_n) tend donc vers $+\infty$. Comme $\dfrac{1}{x_n} = x_{n+1} - x_n$, la série $\sum \dfrac{1}{x_n}$ DV.

2. On a $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + \dfrac{1}{x_n^2}$ donc en sommant, $x_{n+1}^2 = 2(n+1) + x_0^2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k^2}$.

3. On a donc (pour $n \geqslant 1$) $x_n^2 \geqslant 2n$ puis $0 \leqslant \dfrac{1}{x_n^2} \leqslant \dfrac{1}{2n}$ et $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1} \frac{1}{x_k^2} \leqslant \frac{1}{2}H_n \sim \frac{1}{2}\ln(n)$. On a donc $x_{n+1} = 2(n+1) + x_0^2 + O(\ln(n))$ et $x_n \sim 2n$.

Exercice 47 *[sujet]* Si $\sum u_n$ CV, $v_{n+1}-v_n = \dfrac{\sqrt{u_n+v_n^2}-v_n}{2} = \dfrac{u_n}{2(\sqrt{u_n+v_n^2}+v_n)}$ donc (v_n) croît et $0 \leqslant v_{n+1}-v_n \leqslant \dfrac{u_n}{2v_0}$ donc $\sum(v_{n+1}-v_n)$ CV, ie (v_n) CV.
Si (v_n) CV vers l, elle reste croissante et $u_n = 4v_{n+1}(v_{n+1}-v_n) \leqslant 4l(v_{n+1}-v_n)$; $\sum(v_{n+1}-v_n)$ CV donc par majoration de SATP, $\sum u_n$ CV.

Exercice 48 *[sujet]* **1.** $u_{n+1}-u_n = \dfrac{\sqrt{u_n^2+a_n^2}-u_n}{2}$ puis $\sqrt{u_n^2+a_n^2} \leqslant a_n+u_n$ car $a_nu_n \geqslant 0$ (élever au carré)

2. On a aussi $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$ donc le th de comp pour les séries à termes positifs donne $\sum(u_{n+1}-u_n)$ CV

3. (u_n) CV (vers 1) et on a $a_n^2 = (2u_{n+1}-u_n)^2-u_n^2 = 4u_{n+1}(u_{n+1}-u_n)$ ce qui donne $a_n \sim \dfrac{2}{n}$ (positif) donc $\sum a_n$ DV

Exercice 49 *[sujet]* On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(u_k-u_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} u_k - nu_{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k$ donc si $\sum u_n$ CV, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(u_k-u_{k+1}) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ donc les sommes partielles de la SATP $\sum n(u_n-u_{n+1})$ sont majorées donc elle CV.
Si on suppose que $\sum n(u_n-u_{n+1})$ CV alors $0 \leqslant nu_n = n\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(u_k-u_{k+1}) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} k(u_k-u_{k+1}) \to 0$ donc (nu_n) tend vers 0, ce qui donne la CV de $\sum un$ et aussi l'égalité des sommes en même temps.

Exercice 50 *[sujet]* Soit $n \in \mathbb{N}$, il existe N tel que $\sigma(\llbracket 0,n \rrbracket) \subset \llbracket 0,N \rrbracket$; comme $u_k \geqslant 0$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} \leqslant \sum_{k=1}^{N} a_k$ donc si on suppose que $\sum a_n$ CV, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$; par majoration des sommes partielles d'une SATP, $\sum a_{\sigma(n)}$ CV et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. En utilisant σ^{-1}, on trouve l'implication inverse et l'inégalité inverse.

Exercice 51 *[sujet]* **1.** $\ln(P_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k)$ et comme (u_n) tend vers 0, $\ln(1+u_n) \sim u_n$ donc $\sum \ln(1+u_n)$ est ACV ; toute série ACV étant CV, $(\ln P_n)$ est une suite CV donc (P_n) CV.

2. $|P_{n+1}-P_n| \leqslant |u_{n+1}|\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|)$. En appliquant la première question à la suite $(|u_n|)$, on trouve que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|)$ est le terme général d'une suite CV donc bornée (par M). On en déduit $|P_{n+1}-P_n| \leqslant M|u_{n+1}|$ donc $\sum(P_{n+1}-P_n)$ est ACV donc CV et (P_n) CV.

Exercice 52 *[sujet]* **1.** $\dfrac{1}{n}\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x > 0$ car $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$ (somme de Riemann), on en déduit $\lim u_n = +\infty$.

2. Par comparaison série/intégrale, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ donc $a_n \sim \dfrac{1}{(\alpha+1)n^{1-\alpha}}$.

3. On a $0 \leqslant \ln(u_n) = a_n$ donc si $\alpha \in [0,1[$, $(\ln u_n)$ tend vers 0 donc (u_n) tend vers 1.
Reste le cas $\alpha = 1$: on vérifie que $|\ln(1+x)-x| \leqslant x^2$ si $x \in [0,r]$ donc pour $\dfrac{1}{n} \leqslant r$, on a $\left|\ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)-\dfrac{k}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{k^2}{n^4} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ puis en sommant (par inégalité triangulaire) $|\ln u_n - a_n| \leqslant n\dfrac{1}{n^2}$ ce qui donne $\lim \ln u_n = \lim a_n = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim u_n = \sqrt{e}$.

Exercice 53 *[sujet]* On a une SATP donc il suffit de majorer les sommes partielles : $S_n \leqslant S_{2^n} \overset{\text{rec}}{\leqslant} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)S_1 = P_nS_1$; comme $\ln P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right) \sim \dfrac{1}{2^k}$, $(\ln P_n)$ CV donc est bornée puis $\sum u_n$ CV.

Exercice 54 *[sujet]* **1.** $\ln u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) \sim -\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ négatif donc $\ln u_n$ est la somme partielle d'une série à termes négatifs DV donc $\lim \ln u_n = -\infty$ puis $\lim u_n = 0$.

2. On a $\ln(n^2u_n) = 2\ln(n) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leqslant 2\ln(n) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et comme (comparaison série/intégrale) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$, on a $\lim \ln(n^2u_n) = -\infty$, ie $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ est ACV.

Exercice 55 *[sujet]* **1.** En développant par la dernière colonne, puis en développant le deuxième déterminant qui apparaît par la dernière ligne, on trouve $\Delta_n = \Delta_{n+1} + a_n\Delta_{n-2}$

2. par récurrence (double)

3. (Δ_n) est croissante ; si $\sum a_n$ CV alors $\ln \Delta_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + a_k)$ puis (a_n) tend vers 0 donc $\ln(1 + a_k) \sim a_k$ (positif) donc $\sum \ln(1 + a_k)$ CV et $\ln \Delta_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$ donc (Δ_n) est majorée donc CV.

Si (Δ_n) CV vers ℓ alors $\ell > 0$ (car croissante) et $\sum(\Delta_n - \Delta_{n-1})$ CV ; or $\Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n\Delta_{n-2} \sim \ell a_n$ (positif) donc $\sum a_n$ CV

Exercice 56 *[sujet]* **1.** On a $b_n \geqslant 2$ pour $n \geqslant n_0$ donc $0 \leqslant \frac{1}{n^{b_n}} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

2. Si $a_n = \ln n$ et $b_n = \ln(\ln n)$ alors $\frac{n}{a_n^{b_n}} = \exp[lnn\left(1 - \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{a_n^{b_n}}\right)$ et $\sum \frac{1}{a_n^{b_n}}$ DV.

Exercice 57 *[sujet]* Par un DL, on trouve $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ est ACV et la suite $(\ln v_n)$ CV vers $l \in \mathbb{R}$ et $\lim v_n = e^l > 0$ donc $u_n \sim \frac{e^l}{n^\alpha}$ positif donc $\sum u_n$ CV si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 58 *[sujet]* **1.** Partir de $v_n = V_n - V_{n-1}$ ou par récurrence.

2. Si $|V_n| \leqslant M$ alors $|(u_k - u_{k+1})V_k| \leqslant M(u_k - u_{k+1})$ puisque (u_n) décroît ; comme (u_n) CV, la série $\sum(u_n - u_{n+1})$ CV et par majoration $\sum(u_n - u_{n+1})V_n$ est ACV. De plus $\lim u_nV_n = 0$ puisque (u_n) tend vers 0 et (V_n) est bornée ; on a donc la CV de $\sum u_nv_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_nv_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(u_n - u_{n+1})V_n$.

3. Si $\alpha \leqslant 0$, on a DVG ; par contre si $\alpha > 0$, $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ tend vers 0 en décroissant et $V_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(n\theta) = \frac{\cos\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ donc $|V_n| \leqslant \frac{2}{|\sin\frac{\theta}{2}|}$, ie (V_n) est bornée et $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ CV. Enfin, si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors $\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$ donc la série CV si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 59 *[sujet]* Pour $\varepsilon > 0$, on a $|u_n - v_n| \leqslant \varepsilon v_n$ pour $n \geqslant n_0$.

1. Pour $n \geqslant n_0$, on a $|U_n - V_n| \leqslant |U_{n_0} - V_{n_0}| + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k \leqslant |U_{n_0} - V_{n_0}| + \varepsilon V_n$; comme $\lim V_n = +\infty$ (somme partielle d'une SATP DV), il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $\frac{|U_{n_0} - V_{n_0}|}{V_n} \leqslant \varepsilon$ (le numérateur est une constante). Pour $n \geqslant n_1$, on a $\frac{|U_n - V_n|}{V_n} \leqslant 2\varepsilon$ donc $\lim \frac{|U_n - V_n|}{V_n} = 0$ ce qui donne $U_n \sim V_n$.

2. Pour $n \geqslant n_0$, on a $|R_n - R'_n| \leqslant \varepsilon R'_n$ donc $R_n \sim R'_n$.