Le but de ce sujet de de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton qui sera vu plus tard au cours de l'année.
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On note P_u le « polynôme caractéristique » de u définit par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, P_u(\lambda) = \det(\lambda id - u)$$

On admet que la fonction P_u ainsi définie est effectivement une fonction polynômiale.
Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera P_A son polynôme caractéristique, défini par $\forall \lambda \in \mathbb{K}, P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.

1. Étude d'un exemple :

Dans cette question, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le polynôme P_A.

b) Calculer $P_A(A)$.

c) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. Dans cette question, on considère u un endomorphisme de E et F un sous espace vectoriel de E stable par u. On note v l'endomorphisme induit par u sur F et G un supplémentaire de F dans E.

a) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
Calculer P_M en fonction de P_A et P_C.

b) En introduisant une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, montrer que P_v, le polynôme caractéristique de v, divise le polynôme P_u.

3. Soient u un endomorphisme de E et $x_0 \in E$. On note $F_0 = \text{Vect}\{u^k(x_0), k \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) des vecteurs $u^k(x_0)$ et on pose $n_0 = \dim(F_0)$.

a) Montrer que F_0 est un sous-espace de E stable par u.

b) Justifier qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n_0}) \in \mathbb{K}^{n_0+1}$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n_0} a_i u^i(x_0) = 0$.

c) En déduire que $F_0 = \text{Vect}\{x_0, u(x_0), \dots, u_{n_0-1}(x_0)\}$; on pourra, pour $Q \in \mathbb{K}[X]$, introduire la division euclidienne de Q par le polynôme $a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n_0} X^{n_0}$.

On en déduit que $\mathcal{B}_0 = (x_0, u(x_0), \dots, u_{n_0-1}(x_0))$ est une base de F_0. On note v_0 l'endomorphisme induit par u sur F_0.

d) Justifier qu'il existe des scalaires $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_0-1}) \in \mathbb{K}^{n_0}$ tels que $u^{n_0}(x_0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n_0-1} \alpha_i u^i(x_0)$.

e) Écrire la matrice de v_0 dans la base $\mathcal{B}_0$ puis calculer P_{v_0}, le polynôme caractéristique de v_0.

f) Justifier que $P_{v_0}(u)(x_0) = 0$.

g) En utilisant la question **2**, montrer que $P_u(u)(x_0) = 0$.

h) En déduire le théorème de Cayley-Hamilton : $P_u(u) = 0$.