TD6 : Séries numériques

Exercice 1
Étudier, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\sum \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{\alpha}{n}}$.

Exercice 2 (CCP PSI 2017)
On pose $a_n = \dfrac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$ et on rappelle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Montrer que $\sum a_n$ converge.

2. Soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (H_{2n+1} - H_n) = \ln 2$. *(*)*

3. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2021)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} u_n$

1. Montrer qu'il existe une suite (w_n) convergente telle que $\ln(u_n) = w_n - \dfrac{3}{2}\ln(n)$.

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

3. Montrer, pour $n \geqslant 1$, $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 4 (CCINP PSI 2022)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $0 < u_0 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

2. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que $\sum u_n^3$ converge.

3. Étudier la série de terme général u_n^2. *(*)*

Exercice 5 (Mines-Télécom PSI 2023)
Soient $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum \rho_n$ diverge et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \rho_k$.

1. Montrer que $\sum \dfrac{\rho_n}{S_n}$ diverge. *(*)*

2. Montrer que $\sum \dfrac{\rho_n}{S_n^2}$ converge. *(*)*

Exercice 6 (Centrale PSI 2023)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs. On pose $a_n = u_n v_n$ et on définit le déterminant Δ_n par : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & & & \\ u_1 & 1 & -v_2 & (0) & \\ 0 & u_2 & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 & -v_n \\ & & & u_n & 1 \end{vmatrix}$

1. Trouver une relation entre Δ_n, Δ_{n-1} et Δ_{n-2}

2. Montrer que $\Delta_n \leqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$

3. Montrer que la suite (Δ_n) converge si et seulement si $\sum a_n$ converge. *(*)*

Indications

Exercice 2

2. *soit une somme de Riemann, soit une comparaison avec une intégrale, soit le développement vu en cours.*

Exercice 4

3. *utiliser* $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$

Exercice 5

1. *Exprimer* ρ_n *en fonction de* S_n *et* S_{n-1} *puis dans le cas où* $\lim \dfrac{\rho_n}{S_n} = 0$, *prouver* $\dfrac{\rho_n}{S_n} \sim \ln\left(\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\right)$

2. *Comparer* $\dfrac{\rho_n}{S_n^2}$ *et* $\dfrac{1}{S_{n-1}} - \dfrac{1}{S_n}$

Exercice 6

3. *remarquer que* (Δ_n) *est croissante puis prouver que si* $\sum a_n$ *converge alors* $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)$ *définit une suite convergente*