Correction du DM4

1. a) On trouve $\boxed{P_A = X^3 - 4X^2 + X - 1}$

b) $\boxed{P_A(A) = 0}$

c) On en déduit $A(A^2 - 4A + I_3) = I_3$ donc $\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = A^2 - 4A + I_3}$

2. a) On a $P_M(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda I_p - A & -B \\ 0 & \lambda I_{n-p} - C \end{pmatrix}$ donc $P_M(\lambda) = P_A(\lambda) \times P_C(\lambda)$ et comme P_C est un polynôme, on a $\boxed{P_A \text{ divise } P_M}$

b) Dans une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ adaptée à $E = F \oplus G$, comme F est stable par u, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(v)$. La question précédente justifie donc que $\boxed{P_v \text{ divise } P_u}$

3. a) On a $u\left(u^k(x_0)\right) = u^{k+1}(x_0) \in F$ donc $\boxed{F_0 \text{ est stable par } u}$

b) La famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n_0}(x_0))$ est une famille de F_0, comporte $n_0 + 1$ vecteurs et $\dim(F_0) = n_0$ donc elle est liée.

c) On pose $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n_0} a_i X^i \neq 0$ et on a, pour $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q = PP_1 + R$ avec $\deg(R) \leqslant n_0 - 1$. Comme $P(u)(x_0) = 0$, on a $Q(u)(x_0) = R(u)(x_0) \in \mathrm{Vect}\{x_0, u(x_0), \dots, u^{n_0-1}(x_0)\}$. Ceci étant valable pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, on en déduit $F_0 \subset \mathrm{Vect}\{x_0, u(x_0), \dots, u^{n_0-1}(x_0)\}$. Enfin, comme $\dim(F_0) = n_0$, on en déduit $\boxed{F_0 = \mathrm{Vect}\left\{x_0, u(x_0), \dots, u^{n_0-1}(x_0)\right\}}$

d) On a $u^{n_0}(x_0) \in F_0$ donc les α_i sont les coordonnées de $u^{n_0}(x_0)$ dans la base $\mathcal{B}_0$.

e) On a $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(v_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & & \alpha_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_{n_0-1} \end{pmatrix} \text{ puis } P_{v_0} = X^{n_0} - \displaystyle\sum_{i=0}^{n_0-1} \alpha_i X^i}$

f) On a donc $P_{v_0}(u)(x_0) = 0$ par définition des coefficients α_i et compte tenu de la valeur de P_{v_0} trouvée à la question précédente.

g) P_{v_0} divise P_u (puisque F_0 est stable par u) donc $P_u = P_{v_0} \times Q$ puis $P_u(u)(x_0) = Q(u) \circ P_{v_0}(u)(x_0) = Q(u)(0)$ donc $\boxed{P_u(u)(x_0) = 0}$

h) On vient de prouver que pour $x_0 \in E$ fixé, on a $P_u(u)(x_0) = 0$ mais ceci est valable pour tout $x_0 \in E$, on a donc $\boxed{P_u(u) = 0}$