I Suites scalaires

Exercice 1 *[Solution]*
Étudier les suites définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$; $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n^2}$; $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2019}\sin(u_n)$
2. (Suites homographiques) $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 4}$; $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 3}{u_n + 1}$.
indication : si l'équation du second degré $f(x) = x$ admet deux solutions a et b poser $v_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$ (ou l'inverse...) ; si elle a une racine double a poser $v_n = \frac{1}{u_n - a}$ et déterminer l'expression de u_n en fonction de n et u_0.

Exercice 2 (Mines-Ponts PSI 2006) *[Solution]*
Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{3}u_n^2$.

Exercice 3 (ENSEA MP 2007) *[Solution]*
Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que : $\exists k \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[, \forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k(|f(x) - x| + |f(y) - y|)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.
2. Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers un point fixe de f.
indication : étudier la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

Exercice 4 (Mines-Ponts PC 2012) *[Solution]*
Soit (u_n) définie par $u_1 = \alpha > 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{n+1}$.

1. Montrer que les limites possibles de (u_n) sont 0, 1 et $+\infty$.
2. On note $E_L = \{\alpha > 0, L = \lim u_n\}$; montrer que E_0, E_1 et E_∞ sont des intervalles.
3. Montrer que $[1, +\infty[\subset E_\infty$ puis que E_∞ est un ouvert.
indication : pour la fin si $\alpha \in E_\infty$ alors $u_{n_0} > 1$ et u_{n_0} est une fonction continue de α.

II Normes

Exercice 5 *[Solution]*
Sur $E = \mathbb{R}^2$, montrer que $N_1 : (x,y) \mapsto \sup\limits_{t \in [0,1]} |tx + y|$ et $N_2 : (x,y) \mapsto \sup\limits_{t \in [-1,1]} |tx + y|$ sont des normes et dessiner leur boule unité fermée.

Exercice 6 *[Solution]*

1. Sur $E = \mathbb{R}^2$, montrer que $N : (x,y) \mapsto \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \left|\dfrac{x + ty}{1 + t^2}\right|$ définit une norme.
2. Dessiner la boule unité fermée.
indication : montrer que $N(x,y) \leqslant 1$ est équivalent au fait que deux polynômes de degré 2 sont de signe fixe.

Exercice 7 (Mines-Télécom PSI 2023) *[Solution]*

1. Soit N la norme définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x,y) = \max\left(|y|, \left|x + \dfrac{y}{2}\right|, |x+y|\right)$. Représenter la boule unité pour cette norme.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ une famille de formes linéaires sur E. À quelle condition l'application $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ qui à x associe $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |\varphi_i(x)|$ est-elle une norme ?

Exercice 8 (CCINP PSI 2019) *[Solution]*

1. $N_0(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$, $N_1(f) = \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ et $N_2(f) = \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\displaystyle\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\displaystyle\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t\right|$ définissent-elles des normes sur $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$?
2. Montrer que $\forall f \in E, \exists c \in [0,1], f(c) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $\forall f \in E, N_0(f) \leqslant N_1(f)$; peut-il y avoir égalité pour $f \neq 0$?
4. Montrer qu'il n'existe aucun réel a tel que $\forall f \in E, N_1(f) \leqslant aN_0(f)$.

Exercice 9 **(Centrale PC 2014)** *[Solution]*
Soient E un espace vectoriel normé, A une partie non vide bornée de E et $\mathcal{L}$ l'ensemble des applications lipschitziennes de A dans E.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{L}$ alors f est bornée.
2. Pour $f \in \mathcal{L}$, on note $c(f) = \inf\{k \in \mathbb{R}^+, \forall (x,y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|\}$. Justifier l'existence de $c(f)$ et montrer que f est $c(f)$-lipschitzienne.
3. Pour $f \in \mathcal{L}$ et $a \in A$, on note $\|f\|_a = \|f(a)\| + c(f)$. Montrer que $\|\ \|_a$ est une norme sur $\mathcal{L}$.
   Pour $b \in A$, trouver α tel que $\|\ \|_a \leqslant \alpha \|\ \|_b$.

Exercice 10 **(Centrale PSI 2017)** *[Solution]*
Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], f(0) = f'(0) = 0\}$

1. Montrer que $N(f) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f''(t) - 2f'(t) + f(t)|$ définit une norme sur E.
2. Soit $h(t) = f(t)e^{-t}$ avec $f \in E$; montrer que $\forall t \in [0,1], h(t) = \displaystyle\int_0^t (t-u)h''(u)\,\mathrm{d}u$.
3. Trouver $a > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant aN(f)$ pour tout $f \in E$ et minimiser a.

Exercice 11 *[Solution]*
Soit $E = \big\{f \in \mathcal{C}^1([0,1]),\ f(0) = 0\big\}$

1. Montrer que $N_1 : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est une norme sur E.
   Existe-t-il une constante C telle que $N_1 \leqslant C\|\ \|_\infty$? Même question pour $\|\ \|_\infty \leqslant CN_1$?
2. Montrer que $N_2 : f \mapsto \|f + f'\|_\infty$ est une norme sur E. La comparer à $\|.\|_\infty$.
3. Comparer N_1 et N_2.
   indication : introduire l'équation différentielle $y' + y = g$ et calculer f en fonction de $f + f'$.

Exercice 12 **(CCP PC 2007)** *[Solution]*
$E = \mathbb{R}_n[X]$ est muni d'une norme notée $\|.\|$, issue d'un produit scalaire.

1. Montrer que $\forall (P,Q) \in E^2$, $\|P+Q\|^2 + \|P-Q\|^2 = 2\left(\|P\|^2 + \|Q\|^2\right)$ (*identité du parallélogramme*)
2. Montrer que $\|P\|_a = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |P(a_l)|$, a_0, a_1,. . .,a_n étant $n+1$ entiers distincts est une norme.
3. Trouver P_i tel que $\forall (i,j)$, $P_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
4. Montrer qu'il existe α et β tels que pour tout polynôme P de E, on a $\alpha\|P\|_a \leqslant \|P\| \leqslant \beta\|P\|_a$.
   Peut-on avoir $\alpha = \beta = 1$?
5. Montrer que $\|P\|'_a = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2}$ est une norme sur E.
6. Montrer qu'il existe γ et δ tels que pour tout polynôme P de E, on a $\gamma\|P\|'_a \leqslant \|P\| \leqslant \delta\|P\|'_a$.
   Peut-on avoir $\gamma = \delta = 1$?

Exercice 13 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*
Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $N_\infty(P) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |P(t)|$ et $\|P\| = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |p_k|$. On admettra que N_∞ et $\|\ \|$ sont des normes sur $\mathbb{R}_n[X]$ et on note $E_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \|P\| = 1\}$.

1. On pose $a_n = \inf\limits_{P\in E_n} N_\infty(P)$; calculer a_0 et a_1 puis montrer l'existence de a_n (on pourra utiliser la fonction id de $(\mathbb{R}_n[X], N_\infty)$ vers $(\mathbb{R}_n[X], \|\ \|)$) et que $a_n > 0$.
2. Montrer que (a_n) est décroissante et converge vers 0.

Exercice 14 **(Centrale PSI 2009)** *[Solution]*
Soit $(F_1, \ldots, F_p)$ une famille de sous-espaces d'un espace E normé de dimension finie n, vérifiant $F_1 \cap \cdots \cap F_p = \{0\}$.

1. Justifier que pour tout $m \in E$, $d(m, F_i) = \inf\limits_{h\in F_i} \|m - h\|$ existe.
2. Montrer que $N(m) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} d(m, F_i)$ est une norme sur E.

Exercice 15 *[Solution]*
Soit E l'ensemble des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornées telles que $u_0 = 0$. On pose $N_\infty(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $N(u) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u_{n+1} - u_n|}{2^n}$, pour $u \in E$.

1. Montrer que N_∞ et N sont des normes sur E telles que $\forall u \in E, N(u) \leqslant 4N_\infty(u)$

2. Montrer qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_\infty(u) \leqslant CN(u)$ pour toute suite u de E.

Exercice 16 *[Solution]*
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| = \|BA\|$.

2. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que deux matrices semblables aient toujours la même norme.
indication : utiliser que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

III Suites de vecteurs

Exercice 17 **(Centrale PC 2008)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

1. Montrer que la suite $X_0 = I_p$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(X_n + AX_n^{-1}\right)$ est définie et que $X_n = PD_nP^{-1}$ avec D_n diagonale.

2. Montrer que (X_n) converge et que sa limite X vérifie $X^2 = A$. On la note $\sqrt{A}$.

3. Montrer que si A est symétrique alors $\sqrt{A}$ est symétrique.

Exercice 18 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*
Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(v)^\perp = \ker(v)$ où $v = u - id$.

2. Soit $a \in E$ et $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k(a)$; montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Exercice 19 *[Solution]*
Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que la suite (u^p) soit bornée. *(c'est une suite de $\mathcal{L}(E)$)*

1. Soit $x_0 \in E$, montrer que la suite $(u^k(x_0))$ est bornée.

2. Soit $x \in \ker(u-id)^2$. Déterminer a_n et b_n tels que $u^n(x) = a_nu(x)+b_nx$ et en déduire que $\ker(u-id)^2 = \ker(u-id)$ puis $E = \ker(u-id) \oplus \mathrm{Im}(u-id)$.

3. Pour $x_0 \in E$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k(x_0)$. Montrer que la suite (x_n) converge.

Exercice 20 **(Centrale PSI 2023)** *[Solution]*

Soient E un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant \|x\|$. On pose $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k$.

1. Simplifier $(u - id) \circ v_n$

2. Montrer que $\ker(u-id) \cap \mathrm{Im}(u-id) = \{0\}$

3. Si E est de dimension finie, montrer que $\ker(u-id) \oplus \mathrm{Im}(u-id) = E$.

4. Est-ce encore valable en dimension infinie ?
indication : c'est faux : on peut utiliser $u : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$ et $\|P\| = \max|p_k|$

Exercice 21 **(EIVP PSI 2017)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = \dfrac{1}{3}(A^2 + A + I_n)$. Etudier la suite (A^k).
Caractériser géométriquement la matrice $P = \lim A^k$.

Exercice 22 **(CCP MP 2017)** *[Solution]*
Soit E un espace préhilbertien réel. On dit que (x_n) converge *faiblement* vers x si $\forall y \in E, \displaystyle\lim_{n\to+\infty}(x_n - x|y) = 0$.

1. Montrer que la limite faible est unique si elle existe.

2. Montrer que si (x_n) converge vers x (au sens habituel) alors (x_n) converge faiblement vers x.

3. Montrer que (x_n) converge vers x si et seulement si (x_n) converge faiblement vers x et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|x_n\| = \|x\|$.

4. Montrer qu'en dimension finie, ces deux modes de convergence sont équivalents.

Exercice 23 *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$ (*rayon spectral de* A).

On va montrer que pour toute norme de E, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} \left\| A^k \right\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

1. Pour commencer, on considère la norme $\|A\|_\infty = \max\limits_{(i,j)} |a_{i,j}|$.

   Montrer que si T est triangulaire et que ses coefficients diagonaux valent 1 alors $\lim\limits_{k \to +\infty} \left\| T^k \right\|_\infty^{\frac{1}{k}} = 1$.
   indication : écrire $T = I_n + N$ avec $N = T - I_n$ (nilpotente) et utiliser la formule du binôme.

2. Montrer que si B est telle que $\forall (i,j)$, $|a_{i,j}| \leqslant b_{i,j}$ alors $\left\| A^k \right\|_\infty \leqslant \left\| B^k \right\|_\infty$.

3. Conclure en trigonalisant $\dfrac{A}{\rho(A)}$ et la norme $\| \, \|_\infty$.

4. En déduire le résultat pour une norme $\| \, \|$ quelconque.
   indication : commencer par justifier qu'il existe $a, b > 0$ tels que $a\|A^k\|_\infty \leqslant \|A^k\| \leqslant b\|A^k\|_\infty$ en commençant par vérifier que la suite $(\|A^k\|^{-1} A^k)$ est bornée.

Exercice 24 **(CCP PSI 2009)** *[Solution]*

Soit la matrice $M(a) = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $m_{i,j} = a_j$, où $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On note $\alpha = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$.

1. Calculer $M(a)M(b)$. Trouver le noyau et l'image de $M(a)$.
2. Trouver une CNS pour que $M(a)$ soit la matrice d'un projecteur.
3. Montrer que $\{M(a), a \in \mathbb{K}^n\}$ est un espace vectoriel stable par produit dont on donnera une base et la dimension.
4. Montrer que $\exp(M(a)) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{M(a)^k}{k!}$ et l'exprimer en fonction de e^α et $M(a)$.

Exercice 25 **(Centrale PSI 2014)** *[Solution]*
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $r(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)\}$ et on suppose $r(A) < 1$.

1. Montrer que si A possède une seule valeur propre alors la suite (A^p) converge vers 0.
   indication : que vaut $(A - \lambda I_n)^n$?
2. Montrer que si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ alors la suite (A^p) tend vers 0.
3. Soir $B \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $F : X \in \mathbb{R}^n \mapsto AX + B$ admet un unique point fixe L.
4. On pose $X_0 = B$ et $X_{p+1} = F(X_p)$. Montrer que (X_p) tend vers L si (A^p) tend vers 0.

Exercice 26 **(Centrale PSI 2018)** *[Solution]*

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positif telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]\,, \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. On note $\alpha = \min\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}$.

Pour $X \in \mathbb{R}$ à coordonnées positives, on note $\max(X)$ et $\min(X)$ la plus grande et la plus petite des coordonnées de X.

1. Si $X \in \mathbb{R}$ est à coordonnées positives, montrer que $\min(AX) \geqslant \alpha \max(X)$.
2. Montrer que $\min(AX) \geqslant \alpha \max(X) + (1 - \alpha) \min(X)$ et $\max(AX) \leqslant \alpha \min(X) + (1 - \alpha) \max(X)$.
3. En déduire que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer le rang de la matrice limite.

Exercice 27 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*
Soient $\theta_1, \dots, \theta_p$ des réels de $[0, 2\pi[$ deux à deux distincts et $m_1, \dots, m_p$ des entiers non tous nuls. On veut démontrer que la suite $\left(m_1 e^{in\theta_1} + \dots + m_p e^{in\theta_p}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. On raisonne par l'absurde

1. Soit $M_n = \begin{pmatrix} e^{in\theta_1} & \dots & e^{in\theta_p} \\ e^{2in\theta_1} & \dots & e^{2in\theta_p} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{ipn\theta_1} & \dots & e^{ipn\theta_p} \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix}$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n Y = 0$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(M_{\varphi(n)})$ de (M_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |\det(M_{\varphi(n)})| > \varepsilon$.
   indication : il s'agit de montrer que $\det(M_n)$ ne tend pas vers 0. Faire apparaître un déterminant de Vandermonde puis montrer que si $x \in]0, \pi[$ alors $(\sin(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 (par l'absurde par exemple)
3. Conclure en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton

Exercice 28 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

1. Montrer que si (u_n) est une suite d'un espace vectoriel normé E de dimension finie telle que $\sum \|u_n\|$ converge alors $\sum u_n$ converge.
indication : quasi hors-programme ! Il s'agit de montrer que la suite des sommes partielles de la série CV ; commencer par le cas où la norme est $\|x\|_\infty = \max |\alpha_i|$ quand $x = \sum \alpha_i e_i$ avec (e_i) base de E et dans le cas général, prouver qu'il existe $C > 0$ telle que $\|x\|_\infty \leqslant C\|x\|$ pour tout $x \in E$.

2. Soit f une application k-lipschitzienne, avec $k < 1$. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge et en déduire que f admet un unique point fixe.

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** a) On pose $f(x)=x^2-2x+2$; $f(\mathbb{R})=[1,+\infty[$ et f est croissante sur cet intervalle donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ monotone ; $f(x)-x=(x-1)(x-2)$ donc si $u_1\in[1,2[$, (u_n) décroît donc CV vers 1, si $u_1=2$ alors (u_n) et constante égale à 2 et si $u_1>2$, (u_n) est croissante donc DV vers $+\infty$.

b) $f(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$ décroît sur $[0,2]=f(\mathbb{R})$ donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et bornées donc CV vers l_1 et l_2 ; $f\circ f(x)=x\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x+2)=0$ donc $l_1=l_2=1$ et (u_n) CV vers 1.

c) sin est 1-lip donc $|u_{n+1}-u_n|\leqslant\dfrac{1}{2018}|u_n-u_{n-1}|\leqslant\left(\dfrac{1}{2018}\right)^n|u_1-u_0|$ donc $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est ACV et (u_n) CV vers l'unique solution de $x=1+\dfrac{1}{2018}\sin(x)$.

2. a) $x=\dfrac{2x-1}{x+4}\Leftrightarrow(x+1)^2=0$, on pose $v_n=\dfrac{1}{1+u_n}$ qui vérifie $v_{n+1}=v_n+\dfrac{1}{3}$ donc (v_n) tend vers $+\infty$ et $u_n=\dfrac{1}{v_n}-1$ tend vers -1.

b) $x=\dfrac{5x-3}{x+1}\Leftrightarrow(x-1)(x-3)=0$, on pose $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n-3}$ qui vérifie $v_{n+1}=2v_n$ donc (v_n) tend vers $+\infty$ et $u_n=\dfrac{1-3v_n}{1-v_n}$ tend vers 3 sauf si $u_0=1$ et dans ce cas (u_n) est constante égale à 1.

Exercice 2 *[sujet]* On pose $f(x)=\dfrac{1}{3}(3-x^2)$; $[0,1]$ est stable par f et f décroît sur cet intervalle donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et bornées donc CV vers l_1 et l_2 qui vérifient $f\circ f(x)=x$; on vérifie que $f(x)=x\Leftrightarrow x^2+3x-3=0$ puis $f\circ f(x)=x\Leftrightarrow(x^2+3x-3)(x^2-3x+6)=0$ donc le seul point fixe de $f\circ f$ dans $[0,1]$ est $x=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}=l_1=l_2$ et (u_n) CV vers cette valeur.

Exercice 3 *[sujet]* **1.** Si $f(x)=x$ et $f(y)=y$ alors on a $|f(x)-f(y)|=|x-y|\leqslant 0$.

2. Avec $x=u_n$ et $y=u_{n-1}$, on obtient $|u_{n+1}-u_n|\leqslant\dfrac{k}{1-k}|u_n-u_{n-1}|$ donc $|u_{n+1}-u_n|\leqslant\left(\dfrac{k}{1-k}\right)^n|u_1-u_0|$ et $\dfrac{k}{1-k}<1$ donc $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est ACV

Exercice 4 *[sujet]* **1.** Si (u_n) CV vers l alors $l=l^2$ et comme $u_n\geqslant 0$ elle ne peut pas tendre vers $-\infty$.

2. Si $u_n(\alpha)\to l$ et $u_n(\beta)\to l$ et si $\alpha\leqslant\gamma\leqslant\beta$, par récurrence sur n, on prouve $u_n(\alpha)\leqslant u_n(\gamma)\leqslant u_n(\beta)$ donc par encadrement, on a $u_n(\gamma)\to l$ aussi donc les trois ensembles sont des intervalles.

3. Si $\alpha\geqslant 1$ alors par récurrence, on a $u_n\geqslant 1$ puis (u_n) croît et comme $u_1>1$ elle ne peut tendre ni vers 0, ni vers 1 donc elle DV vers $+\infty$.
Si $\alpha\in E_\infty$ alors il existe n_0 tel que $u_{n_0}(\alpha)\geqslant 2$ et comme on vérifie que $\alpha\mapsto u_{n_0}(\alpha)$ est continue, on a $u_{n_0}(x)>1$ si x est proche de α ($|x-\alpha|<\eta$) ; la preuve précédente justifie ensuite que si $u_{n_0}(x)>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)=+\infty$.
On a donc $]\alpha-\eta,\alpha+\eta[\subset E_\infty$ qui est donc ouvert.

Exercice 5 *[sujet]* $N_1(x,y)$ existe car $t\mapsto tx+y$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc bornée ; si $N_1(x,y)=0$ alors $\forall t\in[0,1], tx+y=0$ donc $\begin{cases} y=0\\ x+y=0\end{cases}\Rightarrow x=y=0$; $|t\lambda x+\lambda y|=|\lambda||tx+y|\leqslant|\lambda|N_1(x,y)$ donc $N_1(\lambda x,\lambda y)\leqslant|\lambda|N_1(x,y)$ et on termine classiquement ; enfin $|t(x+x')+(y+y')|\leqslant N_1(x,y)+N_1(x',y')$ donnera l'inégalité triangulaire ; on fait de même pour N_2.

Comme $t\mapsto tx+y$ est monotone sur $[0,1]$, $N_1(x,y)=\max\{|y|,|x+y|\}$; on a donc $N_1(x,y)\leqslant 1\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leqslant y\leqslant 1\\ -1\leqslant x+y\leqslant 1\end{cases}$
La boule unité fermée pour N_1 est donc le parallélogramme délimité par les 4 droites $y=\pm 1$ et $y=-x\pm 1$.
On trouve de même pour N_2 le carré délimité par les 4 droites $y=x\pm 1$ et $y=-x\pm 1$.

Exercice 6 *[sujet]* **1.** $t\mapsto\dfrac{x+ty}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $\pm\infty$ donc est bornée et $N(x,y)$ existe ; si $N(x,y)=0$ alors $\forall t\in\mathbb{R}, x+ty=0$ donc $x=y=0$ (prendre $t=0$ et $t=1$ par ex) ; $\dfrac{|\lambda x+t\lambda y|}{1+t^2}\leqslant|\lambda|N(x,y)$ donne $N(\lambda x,\lambda y)\leqslant|\lambda|N(x,y)$ et on termine classiquement ; enfin $\dfrac{|x+x'+t(y+y')|}{1+t^2}\leqslant N(x,y)+N(x',y')$ donnera l'inégalité triangulaire.

2. $N(x,y)\leqslant 1\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R}, |x+ty|\leqslant(1+t^2)\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R}\begin{cases}x+ty\leqslant 1+t^2\\ x+ty\geqslant -1-t^2\end{cases}$ Ces deux polynômes gardent un signe constant si et seulement si $\Delta_1=y^2+4(1-x)\leqslant 0$ et $\Delta_2=y^2-4(x+1)\leqslant 0$; la boule unité fermée est donc la portion de plan délimitée par les deux paraboles $x=1-\dfrac{y^2}{4}$ et $x=-1+\dfrac{y^2}{4}$.

Exercice 7 *[sujet]* **1.** $N(x,y) \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ -1 \leqslant x+y \leqslant 1 \\ -2 \leqslant 2x+y \leqslant 2 \end{cases}$ donc c'est l'intérieur d'un parallélogramme (la condition $-2 \leqslant 2x+y \leqslant 2$ ne sert en fait à rien)

2. Seul $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ pose problème : $N(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i)$ donc N est une norme si et seulement si $\bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i) = \{0\}$

Exercice 8 *[sujet]* **1.** N_0 oui (cours), N_1 aussi car si $N_1(f) = 0$ alors $N_0(f') = 0$ donc $f' = 0$, f est constante donc nulle car $\int_0^1 f(t)\,dt$ est nulle aussi. Par contre N_2 n'est pas une norme car on peut trouver f non nulle telle que $N_2(f) = 0$ (un polynôme de degré 3 par exemple)

2. f est continue sur $[0,1]$ donc $m = \min_{[0,1]} f$ et $M = \max_{[0,1]} f$ existe puis $m \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant M$ donc, d'après le TVI (f continue), $\int_0^1 f(t)\,dt$ est une valeur atteinte par f.

3. pour $t \in [0,1]$, on a $f(t) = f(c) + \int_c^t f'(u)\,du$ donc $|f(t)| \leqslant |f(c)| + \int_0^1 |f'(u)|\,du$ et en intégrant cette inégalité sur $[0,1]$, on obtient $N_0(f) \leqslant N_1(f)$. S'il y a égalité, il y a égalité dans toutes les inégalités précédentes : on en déduit que f est constante et on vérifie que seule la constante nulle est solution.

4. Si une telle constante a existait, avec $f(t) = t^n$, on a $N_0(f) = \dfrac{1}{n+1}$ et $N_1(f) = \dfrac{1}{n+1} + 1$ ce qui est absurde (quand n tend vers $+\infty$).

Exercice 9 *[sujet]* **1.** Soit $a \in A$ fixé, on a $\|f(x) - f(a)\| \leqslant k\|x-a\| \leqslant k(\|a\| + M)$ avec $A \subset B_f(0,M)$ donc $\|f(x)\| \leqslant \|f(a)\| + k(\|a\| + M)$ est bornée.

2. $\{k \in \mathbb{R}^+, \forall (x,y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x-y\|\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par 0 donc $c(f)$ existe. Il existe une suite (k_n) de $\{k \in \mathbb{R}^+, \forall (x,y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x-y\|\}$ qui converge vers $c(f)$. Pour (x,y), on a $|f(x) - f(y)| \leqslant k_n|x-y|$ qui donne $|f(x) - f(y)| \leqslant c(f)|x-y|$ quand $n \to +\infty$.

3. Si $\|f\|_a = 0$ alors $f(a) = 0$ et $c(f) = 0$ ce qui donne f constante puis nulle ; pour le reste, il suffit de prouver $c(\lambda f) = |\lambda| c(f)$ et $c(f+g) \leqslant c(f) + c(g)$: $\|\lambda f(x) - \lambda f(y)\| = |\lambda|\|f(x) - f(y)\| \leqslant |\lambda| c(f)\|x-y\|$ donne $c(\lambda f) \leqslant |\lambda| c(f)$ et on termine classiquement ; puis $\|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)\| \leqslant (c(f)+c(g))\|x-y\|$ donne bien $c(f+g) \leqslant c(f)+c(g)$. On a $\|f(a) - f(b)\| \leqslant c(f)\|a-b\|$ donc $\|f(a)\| \leqslant \|f(b)\| + c(f)\|a-b\|$ ce qui donne ensuite $\|f\|_a \leqslant (1 + \|a-b\|)\|f\|_b$.

Exercice 10 *[sujet]* **1.** Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que $N(f) = 0$ avec $f(0) = f'(0) = 0$ donne $f = 0$, le reste est facile.

2. h est $\mathcal{C}^2$, $h(0) = h'(0) = 0$ donc la formule de Taylor avec reste intégral donne l'égalité.

3. On a donc $|f(t)| \leqslant e^{-t}\int_0^t (t-u)(f''(u) - 2f'(u) + f(u))e^u\,du \leqslant N(f)e^{-t}\int_0^t (t-u)e^u\,du = N(f)(t - 1 + e^{-t})$ puis $\max_{t\in[0,1]} t - 1 + e^{-t} = e^{-1}$ donc $\|f\|_\infty \leqslant e^{-1}N(f)$; la constante est minimale puisqu'on a égalité avec $f : t \mapsto 1 + (t-1)e^{-t}$ (qui est bien dans E)

Exercice 11 *[sujet]* **1.** Facile en partant du fait que $\|\ \|_\infty$ est une norme ; $\|f\|_\infty \leqslant N_1(f)$ mais l'autre inégalité est impossible puisque si $f_n(t) = \sin(nt) \in E$, on a $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$ et $N_1(f_n) \geqslant n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

2. Si $N_2(f) = 0$ alors $f + f' = 0$ avec $f(0) = 0$ donc $f = 0$ (Cauchy-Lipschitz), le reste est facile. On a $N_2(f_n) \geqslant 1+n$ donc $N_2 \leqslant C\|\ \|_\infty$ est impossible ; pour l'autre sens, on vérifie que $f(x) = e^{-x}\int_0^{(} f(t) + f'(t))e^t\,dt$ ce qui donne $|f(x)| \leqslant N_2(f)e^{-x}\int_0^x e^t\,dt$ donc $\|f\|_\infty \leqslant (1 - e^{-1})N_2(f)$

3. $N_2(f) \leqslant N_1(f)$ et $N_1(f) \leqslant 2\|f\|_\infty + N_2(f) \leqslant (3 + e^{-1})N_2(f)$

Exercice 12 *[sujet]* **1.** Vérifier $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$ et tout développer (cours espaces préhilbertiens)

2. Facile : si $\|P\|_a = 0$ alors les a_i sont $n+1$ racines distinctes de P

3. $P_i = L_i$ polynômes d'interpolation de Lagrange aux points (a_i).

4. $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de E donc avec $P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k$ alors $\|P\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |P(a_k)| \times \|L_k\| \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant n} \|L_k\| \times \|P\|_a$.

De l'autre côté : on introduit $(P_0, \ldots, P_n)$ une bon de E pour le produit scalaire associé à $\|\ \|$, on a, si $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_i P_i$,

$\|P\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2$ et $\|P\|_a \leqslant \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i| \times \|P_i\|_a \overset{\text{C-Sch}}{\leqslant} \|P\| \times \left(\sum_{i=0}^{n} \|P_i\|_a^2\right)^{1/2}$; reste à prendre $\alpha = \left(\sum_{i=0}^{n} \|P_i\|_a^2\right)^{-1/2}$.
Si $\alpha = \beta = 1$ alors $\|\ \| = \|\ \|_a$ donc $\|\ \|_a$ vérifierait l'identité du parallélogramme ce qui est faux : $\|L_1 + L_2\|_a^2 = \|L_1 - L_2\|_a^2 = 4$ et $\|L_1\|_a^2 = \|L_2\|_a^2 = 1$

5. C'est la norme euclidienne associé au produit scalaire $(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ (pour lequel les L_i constituent une bon)

6. Si $P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i$ alors $\|P\| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |P(a_i)| \times \|L_i\| \overset{\text{C-Sch}}{\leqslant} \|P\|_a' \times \left(\sum_{i=0}^{n} \|L_i\|^2\right)^{1/2}$; l'autre côté se traite comme dans **4**.
Comme $\|\ \|_a'$ est associée à un produit scalaire, on peut avoir $\gamma = \delta = 1$ si $\|\ \| = \|\ \|_a'$.

Exercice 13 *[sujet]* **1.** $E_0 = \{-1, +1\}$ donc $a_0 = 1$. $E_1 = \{\alpha X + \beta, |\alpha| + |\beta| = 1\}$ donc si $P \in E_1$, P est de degré $\leqslant 1$ donc monotone sur $[0, 1]$ et $N_\infty(P) = \max\{|P(0)|, |P(1)|\}$. Quitte à remplacer P par $-P$, on peut supposer $\beta \geqslant 0$.
On a alors 3 cas : si $\alpha \geqslant 0$ alors $P(t) = \beta + (1-\beta)t$ et $N_\infty(P) = P(1) = 1$; si $\alpha < 0$ et $\beta \geqslant \frac{1}{3}$ alors $P(t) = \beta + (\beta - 1)t$ et $N_\infty(P) = P(0) = \beta$ et enfin, si $\alpha < 0$ et $\beta < \frac{1}{3}$, $P(t) = \beta + (\beta - 1)t$ et $N_\infty(P) = |P(1)| = 1 - 2\beta$. Dans les 3 cas, on a $N_\infty(P) \geqslant \frac{1}{3}$ et avec $P = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} - 1\right)t$, on a $N_\infty(P) = \frac{1}{3}$ donc $a_1 = \frac{1}{3}$.
id est linéaire donc continue sur E_n qui est la sphère unité de $\mathbb{R}_n[X]$ pour la norme $\|\ \|$, donc une partie fermée bornée non vide ; ainsi $N_\infty(id)$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continue par composée) admet un minimum sur E_n donc a_n existe et comme c'est un minimum, on a $a_n = N_\infty(P)$ pour un $P \in E_n$; comme $P \neq 0$ et que N_∞ est une norme, on a $a_n > 0$.

2. Comme $E_n \subset E_{n+1}$, on a $a_{n+1} \leqslant a_n$. Si on pose $P_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)X^k$, on a $P_n \in E_n$ donc $\mathbb{N}_\infty(P_n) \geqslant a_n$ et pour $x \in [0, 1]$, on a $|P_n(x)| = \frac{1}{n+1} \times \frac{1 - (-1)^{n+1}x^{n+1}}{1 + x} \leqslant \frac{1}{n+1}$ donc $N_\infty(P_n) \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exercice 14 *[sujet]* **1.** Fait en cours

2. Si $N(m) = 0$ alors $d(m, F_i) = 0$ pour tout i, ce qui donne $m \in \overline{F_i} = F_i$ car F_i est un sev de dimension finie donc est fermé. Reste à vérifier $d(\lambda m, F_i) = |\lambda| d(m, F_i)$ et $d(m + n, F_i) \leqslant d(m, F_i) + d(n, F_i)$: $d(\lambda m, F_i) \leqslant \|\lambda m - \lambda y\| = |\lambda| \|m - y\|$ donne la première inégalité et $d(n + m, F_i) \leqslant \|m + n - (y + z)\| \leqslant \|m - y\| + \|n - z\|$ la seconde.

Exercice 15 *[sujet]* **1.** N_∞ est une norme sur E facile.
Si u est bornée alors $\frac{|u_{n+1} - u_n|}{2^n} \leqslant \frac{2\|u\|_\infty}{2^n}$ donc la série qui définit $N(u)$ CV et si $N(u) = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$ ce qui donne $u = 0$ avec la condition $u_0 = 0$; le reste est facile.
On a aussi $N(u) =\leqslant 2N_\infty(u)\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = 4N_\infty(u)$

2. Si u est la suite telle que $u_k = \delta_{k,n}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé (on a bien $u \in E$ si $n \geqslant 1$), on a $N_\infty(u) = 1$ et $N(u) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$. Si la constante C existait, on aurait $1 \leqslant C\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$ ce qui est absurde

Exercice 16 *[sujet]* **1.** Si une telle norme existait, on aurait $\|E_{1,2}E_{2,2}\| = \|E_{2,2}E_{1,2}\|$ ce qui est absurde car $E_{1,2}E_{2,2} = E_{1,2} \neq 0$ et $E_{2,2}E_{1,2} = 0$.

2. Si une telle norme existait, comme AP et PA sont semblables pour toute matrice P inversible, on aurait $\|AP\| = \|PA\|$ pour tout P inversible puis si $B \in \mathcal{M}_n(K)$, il existe (P_k) suite de matrices inversibles tendant vers B ; par continuité de $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$, on a $\lim_{k \to +\infty} AP_k = AB$ et $\lim_{k \to +\infty} P_kA = BA$ donc en faisant tendre k vers $+\infty$ dans l'égalité $\|AP_k\| = \|P_kA\|$, on obtient $\|AB\| = \|BA\|$ pour toutes matrices A et B.

Exercice 17 *[sujet]* **1.** Par récurrence sur n

2. (D_n) vérifie $D_{n+1} = \frac{1}{2}(D_n + DD_n^{-1})$ donc les coefficient diagonaux de D_n vérifie une relation du type $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \alpha/u_n)$ où α est un coefficient diagonal de D. On a alors avec $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right)$, $f(\mathbb{R}^+) = [\sqrt{a}, +\infty[$ est stable par f ; $f(x) - x = \frac{a - x^2}{2x} \leqslant 0$ donc $(u_n)_{n \geqslant 1}$ décroît et CV vers l tel que $f(l) = l$ donc $l = \sqrt{a}$. La suite (D_n) CV donc vers une matrice diagonale Δ dont les coefficients diagonaux sont les racines carrées de ceux de D ; on a donc $\Delta^2 = D$ puis $X^2 = A$

3. Il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\sqrt{\alpha_i}) = \alpha_i$ pour toutes les valeurs propres de A (il y en a au plus n), on a alors $\sqrt{A} = P(A)$ donc si A est symétrique, $\sqrt{A}$ aussi.

Exercice 18 *[sujet]* **1.** si $a \in \ker(v)$ alors $(a|v(v)) = (a|u(b) - b) \overset{u(a)=a}{=} (u(a)|u(b)) - (a|b) = 0$ car u orthogonal ; on trouve l'égalité par le théorème du rang

2. On écrit $a = a_0 + u(b) - b$ et on trouve $x_n = a_0 + \dfrac{1}{n}(u^{n+1}(b) - b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\|u^{n+1}(b)\| = \|b\|$ (donc borné)

Exercice 19 *[sujet]* **1.** On introduit une base $\mathcal{B}$ de E et on utilise sur $\mathcal{L}(E)$ la norme $N(u) = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$ si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et sur E la norme $\|x\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. On vérifie alors, si on note $a_{i,j}(k)$ les coefficients de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k)$, $\|u^k(x_0)\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}(k)(x_0)_j\right| \leqslant n^2 N(u^k)\|x_0\|$ donc est bornée.

2. $u^n(x) = nu(x) + (1-n)x$ donc $\|u(x) - x\| = \dfrac{1}{n}\|u^n(x) - x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $(u^n(x))$ est bornée ; on en déduit $\ker(u-id)^2 \subset \ker(u-id)$, réciproque facile. Si $y \in \ker(u-id) \cap \mathrm{Im}(u-id)$ alors $y = u(x) - x$ et $x \in \ker(u-id)^2 = \ker(u-id)$ donc $y = (u-id)(x) = 0$; la somme est directe et le théorème du rang appliqué à $u - id$ permet de conclure.

3. On pose $x_0 = a + (u-id)(b)$ et on vérifie $x_n = a + \dfrac{1}{n}(u^{n+1}(b) - b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ puisque $(u_n(b))$ est bornée.

Exercice 20 *[sujet]* **1.** $(u - id)\circ v_n = \dfrac{1}{n+1}(u^{n+1} - id)$

2. si $x \in \ker(u-id) \cap \mathrm{Im}(u-id)$ alors $u(x) = x$ et $x = u(y) - y$ donc $v_n \circ (u-id)(y) = v_n(x) = x$ puis $x = v_n \circ (u-id)(y) = \dfrac{1}{n+1}(u^{n+1}(y) - y)$ donc $\|x\| \leqslant \dfrac{1}{n+1}(\|v^{n+1}(y)\| + \|y\|) \leqslant \dfrac{2}{n+1}\|y\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $x = 0$

3. th du rang appliqué à $u - id$

4. on vérifie $\|u(P)\| \leqslant \|P\|$, $\deg(u(P) - P) = 1 + \deg(P)$ (si $P \neq 0$) donc $\ker(u-id) = \{0\}$ et $1 \notin \mathrm{Im}(u-id)$ donc $\mathrm{Im}(u-id) \neq \mathbb{R}[X]$

Exercice 21 *[sujet]* Le polynôme $3X^3 - Xp^2 - X - 1 = (X-1)(X-r_1)(X-r_2)$ avec $r_i = \dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{3}$ annule A donc A est DZ : $A = QDQ^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(I_{n_1}, r_1 I_{n_2}, r_2 I_{n_3})$ comme $|r_i| < 1$, la suite (D_k) CV vers $\Delta = \mathrm{diag}(I_{n_1}, 0I_{n_2}, 0I_{n_3})$ et (A^k) CV vers $P = Q\Delta Q^{-1}$ par continuité de $M \mapsto QMQ^{-1}$ (linéaire)
On vérifie que P est la matrice du projecteur sur $E_1(A)$ parallèlement à $E_{r_1}(A) \oplus E_{r_2}(A) = \mathrm{Im}(A)$

Exercice 22 *[sujet]* **1.** si (x_n) CV faiblement vers x et x' alors $(x - x'|y) = -(x - x_n|y) + (x_n - x'|y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc $x - x' \in E^\perp$ donc $x = x'$.

2. par C-Sch, on a $|(x_n - x|y)| \leqslant \|x_n - x\| \times \|y\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3. Si (x_n) CV faiblement vers x et $\lim\|x_n\| = \|x\|$ alors $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - \|x\|^2 - 2(x_n - x|x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

4. Si (e_i) est une bon de E alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - x|e_i) = 0$ donc les coordonnées de x_n vérifient $x_n(i) = (x_n|e_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x|e_i) = x_i$ donc (x_n) CV vers x.

Exercice 23 *[sujet]* **1.** On a $\mathcal{X}_T = (X-1)^n$ donc C-Ham donne $N^n = 0$ donc N est bien nilpotente. On a alors $T^k = \sum\limits_{p=0}^{n-1}\dbinom{k}{p}T^p$ puis $\dbinom{k}{p} \leqslant k^p$ donc $1 \leqslant \|T^k\|_\infty \leqslant nk^pM$ avec $M = \max\{\|T^p\|_\infty, p \in [\![0, n-1]\!]\}$ et comme $(nk^pM)^{1/k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, on a la limite par encadrement.

2. On montre par récurrence sur k que $|a_{i,j}(k)| \leqslant b_{i,j}(k)$ (ce sont les coefficients des puissances $k^{\text{ème}}$)

3. $B = \dfrac{1}{\rho(A)} = PTP^{-1}$ avec $T = D + N$; on introduit $T' = I_n + N^+$ (avec N^+ la matrice de coefficients $|t_{i,j}|$) à laquelle on peut appliquer la première question. On a $|t_{i,j}| \leqslant t'_{i,j}$ et il existe un coefficient diagonal de T de module 1, on a donc $1 \leqslant \|T^k\|_\infty^{1/k} \leqslant \|T'^k\|_\infty^{1/k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\|T^k\|_\infty = 1$.

On revient alors à A : les applications $M \mapsto PMP^{-1}$ et $M \mapsto P^{-1}MP$ sont linéaires donc lipschitziennes donc il existe α, β tels que $\alpha\|P^{-1}MP\|_\infty \leqslant \|M\|_\infty \leqslant \beta\|P^{-1}MP\|_\infty$ ce qui donne $\alpha^{1/k}\|T^k\|_\infty^{1/k} \leqslant \|B^k\|_\infty^{1/k} \leqslant \beta^{1/k}\|T^k\|_\infty^{1/k}$ puis $\lim\|B^k\|_\infty^{1/k} = 1$ et $\lim\|A\|_\infty^{1/k} = \rho(A)$

4. On choisit cette fois une norme $\| \|$ quelconque. La suite $\left(\dfrac{1}{\|A^k\|}A^k\right)$ est bornée pour la norme $\| \|$ donc aussi pour la norme $\| \|_\infty$, il existe donc a tel que $\|A^k\|_\infty \leqslant a\|A^k\|$; de même (en échangeant les 2 normes) on prouve l'existence de b tel que $\|A^k\| \leqslant b\|A^k\|_\infty$; on en déduit $a^{-1/k}\|A^k\|_\infty^{1/k} \leqslant \|A^k\|^{1/k} \leqslant b^{1/k}\|A^k\|_\infty^{1/k}$ ce qui donne le résultat par encadrement

Exercice 24 *[sujet]* **1.** $M(a)M(b) = \alpha M(b)$; si $a \neq 0$ alors $\mathrm{rg}(M(a)) = 1$, $ker(M(a)) = \{(x_i) \in \mathbb{R}^n, a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ et $\mathrm{Im}(M(a)) = \mathrm{Vect}\{a\}$

2. $\alpha = 1$

3. On a $M(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_jM_j$ où $M_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E_{k,j}$ donc $\{M(a), a \in \mathbb{K}^n\}$ est de dimension n

4. $M(a)^k = \alpha^k M(a)$ pour $k \geqslant 1$ donc $\exp(M(a)) = I_n + (e^\alpha - 1)M(a)$.

Exercice 25 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_A = (X-\lambda)^n$ donc C-Ham donne $(A - \lambda I_n)^n = 0$; on pose $N = A - \lambda I_n$ (nilpotente) et on a, pour $k \geqslant n$, $A^k = (\lambda I_n + N)^k = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\binom{k}{p}\lambda^{k-p}N^p$ puis $\dbinom{k}{p} \leqslant k^p$ et $\|A^k\| \leqslant \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} k^p r(A)^{k-p}\|N^p\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ (somme de n, fixé, suites tendant vers 0 puisque $r(A) < 1$).

2. $A = PDP^{-1}$, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} D^k = 0$ et par continuité de $M \mapsto PMP^{-1}$, on a aussi $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} A^k = 0$.

3. $F(X) = X \Leftrightarrow (A - I_n)X = -B$ qui admet une unique solution puisque $A - I_n$ est inversible car $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

4. On a $X_{p+1} - L = A(X_p - L)$ donc $X_p - L = A^p(B - L)$; par continuité de $M \mapsto M(B-L)$, on a $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}(A^p(B-L)) = (\lim_{p\to+\infty} A^p)(B - L) = 0$.

Exercice 26 *[sujet]* **1.** Soit i tel que $(AX)_i = \min(AX)$, on a $(AX)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \geqslant a_{i,j}x_j \geqslant \alpha x_j$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ donc $\min(AX) \geqslant \alpha\max(X)$.

2. Avec les mêmes notations, et si j est tel que $X_j = \max(X)$, on a $(AX)_i = a_{i,j}x_j + \displaystyle\sum_{k\neq j} a_{i,k}x_k \geqslant a_{i,j}\max(X) + \displaystyle\sum_{k\neq j} a_{k,i}\min(X) = a_{i,j}\max(X) + (1 - a_{i,j})\min(X) = \min(X) + a_{i,j}(\max(X) - \min(X)) \geqslant \min(X) + \alpha(\max(X) - \min(X))$ qui donne le résultat. La deuxième inégalité se prouve de la même façon.

3. On note $u_p = \max(A^pX)$ et $v_p = \min(AX)$ et on vérifie que (u_p) et (v_p) sont adjacentes : on a $(AX)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \leqslant \max(X)\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \max(X)$ ce qui donne $u_{p+1} \leqslant u_p$; on prouve de même que (v_p) est croissante. Puis $\max(AX) - \min(AX) \leqslant (1 - 2\alpha)(\max(X) - \min(X))$ avec les deux inégalités de la question précédente ; on en déduit $0 \leqslant u_p - v_p \leqslant (1-2\alpha)^p(u_0 - v_0)$ donc $\lim(u_p - v_p)0$ car $0 \leqslant 1 - 2\alpha < 1$ (car $\alpha \in]0, 1/2[$). On en déduit que (u_p) et (v_p) converge vers la même limite l.
En prenant $X = E_i$ un des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui est à coordonnées positives), tous les coeffs de la $i^{\text{ème}}$ colonne de A^p convergent donc vers la même limite l_i par encadrement (entre u_p et v_p) ; ainsi tous les coefficients de A^p convergent donc (A^p) converge vers L. De plus toutes les lignes de L sont égales d'après ce qui précède et sont non nulles car on conserve, par passage à la limite, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} l_{i,j} = 1$ (et $l_{i,j} \geqslant 0$) donc $\mathrm{rg}(L) = 1$.

Exercice 27 *[sujet]* **1.** On pose $u_n = m_1e^{in\theta_1} + \cdots + m_pe^{in\theta_p}$ et on a $(M_nY)_k = u_{kn} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (suite extraite de (u_n))

2. $\det(M_n) = e^{in(\theta_1+\ldots,\theta_p)} \times V\left(e^{in\theta_1}, \ldots, e^{in\theta_p}\right)$ (factoriser par colonne) donc $|\det(M_n)| = \displaystyle\prod_{1\leqslant h<k\leqslp} 2\left|\sin\frac{n(\theta_k - \theta_h)}{2}\right|$.
Il s'agit de prouver que $(\det(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 donc que aucune des suites $\left(\sin\dfrac{n(\theta_k - \theta_h)}{2}\right)$ ne tend vers 0 : on pose $x = \dfrac{|\theta_k - \theta_h|}{2} \in]0, \pi[$ et on suppose que $(\sin(nx))$ tend vers 0 ; on a alors $\sin(n+1)x = \sin(x)\cos(nx) + \cos(x)\sin(nx)$ et on en déduit $\sin(x)\cos(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui est absurde car $\sin(x) \neq 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\cos^2(nx) = 1$ (car $\sin^2 + \cos^2 = 1$).

3. On a, avec C-Ham, $\mathcal{X}_{M_{\varphi(n)}}(M_{\varphi(n)})Y = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M_{\varphi(n)}^kY = 0$ donc il reste (seul le terme constant donne une limite à priori non nulle) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(-1)^p\det(M_{\varphi(n)})Y = 0$ ce qui est absurde car si $m_k \neq 0$, la ligne k donnerait $m_k\det(M_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 28 *[sujet]* **1.** Si on choisit la norme $\| \|\infty$, la CV de la série $\sum \|u_n\|_\infty$ donne la CVA des séries $\sum u_n(i)$ où $u_n(i)$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de u_n. Comme une série absolument convergente est aussi CV, on en déduit que $\sum u_n(i)$ CV, ie toutes les coordonnées de la série de vecteurs $\sum u_n$ CV donc $\sum u_n$ CV aussi.

Si une telle constante C n'existait pas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existerait x_n tel que $\|x_n\|_\infty > n\|x_n\|$ (donc $x_n \neq 0$). Si on pose $y_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{n}\|x_n\|}$, on a $\|y_n\| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc (y_n) CV vers 0 pour la norme $\| \|$ alors que $\|y_n\|_\infty \geqslant \sqrt{n}$ donc (y_n) ne tend pas vers 0 pour $\| \|_\infty$ ce qui est absurde en dimension finie.

L'existence de la constante C permet de justifier que si $\sum \|u_n\|$ CV alors, par th de comparaison, $\sum \|u_n\|_\infty$ CV aussi et le premier cas permet de conclure.

2. On a $\|u_{n+1} - u_n\| = \|f(u_n) - f(u_{n-1})\| \leqslant k\|u_n - u_{n-1}\|$, ce qui donne $\|u_{n+1} - u_n\| \leqslant k^n\|u_1 - u_0\|$ donc $\sum \|u_{n+1} - u_n\|$ CV (car $k \in [0, 1[$) puis $\sum(u_{n+1} - u_n)$ CV d'après **1** et (u_n) CV par télescopage.

Si on note l la limite de (u_n), f étant continue car lipschitzienne, on a $f(l) = l$. Si on suppose que l' est un point fixe de f, on a $\|l - l'\| = \|f(l) - f(l')\| \leqslant k\|l - l'\|$ donc $\|l - l'\| = 0$ car $k < 1$; le point fixe est donc unique.