TD7 : Séries numériques

Exercice 1 (CCP PSI 2016)
Montrer que la série de terme général $u_n = \ln(n + 2(-1)^n) - \ln(n)$ converge mais ne converge pas absolument.
Vérifie-t-elle le CSSA ?

Exercice 2
Déterminer la nature des séries $\sum u_n$

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^a + (-1)^n}}$ où $a > 0$.
2. $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$, où $\alpha \neq \beta$. *(*)*

Exercice 3 (CCINP PSI 2023)
Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$, pour $n \geqslant 1$

1. Montrer que u_n existe et tend vers 0
2. On pose $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} u_n$. Montrer que $\sum v_n$ converge
3. On pose $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum w_n$? *(*)*
4. On pose $x_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de $\sum x_n$?

Exercice 4
Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Exercice 5 (CCINP PSI 2018)
Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1. Quelle est la limite de la suite (nu_n) ?
2. Donner la nature des séries de termes généraux u_n et $(-1)^n u_n$. *(*)*

Exercice 6 (CCP PSI 2019)

1. Montrer que $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ admet une unique solution dans $[0, 1]$; on la note x_n.
2. Montrer que (x_n) tend vers 0.
3. Étudier la nature de la série de terme général x_n puis $(-1)^n x_n$. *(*)*

Indications

Exercice 2

2. *distinguer $\alpha > \beta$ et $\alpha < \beta$.*

Exercice 3

3. *faire apparaître u_n.*

Exercice 5

2. *ne pas chercher à utiliser le CSSA mais un DL pour la dernière.*

Exercice 6

3. *chercher un équivalent de x_n pour la première en remarquant que $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(1 - x_n^n)$; ne pas chercher à utiliser le CSSA mais un DL pour la dernière.*