PSI2.LA CORDE VIBRANTE. ONDES STATIONNAIRES

Début fait en cours.

2e)Voir les animations gif dans le cahier. Il y a au moins les deux premiers cas.

2f)Chacun des termes de la somme est solution donc la somme est solution car l'EDP est linéaire. Par contre, l'affirmation de l'énoncé est trop générale : on vient de trouver la solution générale du problème dans un cas très précis : les solutions avec séparation de variables.

2g)L'élément n°n de la somme est tout simplement l'harmonique n de la solution. On a tout simplement une décomposition en série de Fourier.

3)On cherche ici les solutions sinusoïdales du temps (ce qui n'était pas le cas de la question 2). On connaît alors l'ensemble des solutions : une OPPH+ + une OPPH-. Pour des calculs gérables, on passe en notation complexe.

$$\underline{y}(0,t) = 0 = A.e^{j(\omega t)} + B.e^{j(\omega t)} \; donne \; A = -B$$

$$\underline{y}(L,t) = -B.e^{j(\omega t - kL)} + B.e^{j(\omega t + kL)} = 0 \;\; donne \quad 2Bj.sin(kL) = 0$$

Soit B=0 et on retombe sur la fonction nulle qui est évidemment solution.
Soit $sin(kL) = 0$ *et on retombe sur les solutions obtenues à la question 2.*

Exercice A.

a) $y(x,t) = y(\alpha_1) \;/\; \alpha_1 = t - \frac{x}{c}$

$y(x'=0,\, t'=t-\frac{x}{c}) = y(\alpha_2) \;/\; \alpha_2 = t' - \frac{x'}{c} = t - \frac{x}{c} = \alpha_1$

$\Rightarrow y(\alpha_1) = y(\alpha_2) \Rightarrow \boxed{y(x,t) = y(x'=0,\, t-\frac{x}{c})}$

INTERPRÉTATION : L'ÉBRANLEMENT PRÉSENT EN x À L'INSTANT t ÉTAIT À L'ORIGINE À L'INSTANT $t-\frac{x}{c}$

$\frac{x}{c}$: TEMPS DE PARCOURS DE O À x

b) LA MÊME CHOSE AVEC D'AUTRES MOTS – FORMULE PLUS GÉNÉRALE

c) cf COURS :

Exercice B.

PREMIERE METHODE

$$\left.\begin{array}{l}\vec{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}\\ \vec{k} = k_x\vec{e_x} + k_y\vec{e_y} + k_z\vec{e_z}\end{array}\right) \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{OM} = x\cdot k_x + y\,k_y + z\,k_z.$$

$\hookrightarrow$ $s(M,t) = s_0\cos(\omega t - x k_x - y k_y - z k_z)$

$\hookrightarrow$ $\dfrac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_0 \sin(\omega t - x k_x - y k_y - z k_z)$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 s_0\cos(\text{——}) = -\omega^2 s(M,t)}$

$\hookrightarrow$ $\dfrac{\partial s}{\partial x} = k_x s_0 \sin(\omega t - x k_x - y k_y - z k_z)$

$\hookrightarrow$ $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k_x^2 s_0\cos(\omega t - x k_x - y k_y - z k_z) = -k_x^2 s(M,t)$

$\hookrightarrow$ $\dfrac{\partial^2 s}{\partial y^2} = -k_y^2 s(M,t)$ $\quad \dfrac{\partial^2 s}{\partial z^2} = -k_z^2 s(M,t)$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\Delta s = \dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 s}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\, s(M,t) = \|\vec{k}\|^2 s(M,t)}$

$s(M,t)$ OBEIT À L'EQUATION D'ONDE $\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2\Delta s$

$$\xRightarrow[s(M,t)\neq 0]{} \omega^2 = c^2\|\vec{k}\|^2 \Rightarrow \boxed{\|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c}}$$

SECONDE METHODE — LE PRODUIT SCALAIRE NE DEPEND PAS DE LA BON CHOISIE. JE PEUX DONC LA CHOISIR APRÈS AVOIR DÉFINI $\vec{k}$.

JE DEFINIS $\vec{e_x}$ / $\vec{k} = \|\vec{k}\|\,\vec{e_x}$; $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ / $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ BOND.

$\hookrightarrow$ $\vec{k}\cdot\vec{OM} = \|\vec{k}\|\cdot x$

$\hookrightarrow$ $s(M,t) = s_0\cos(\omega t - \|\vec{k}\|x)$

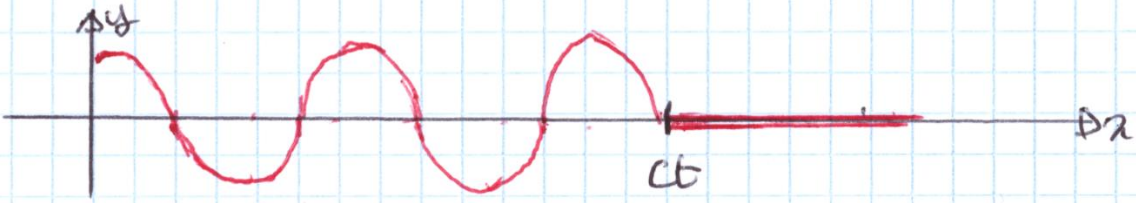
$\hookrightarrow$ $\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 s(M,t)$; $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\|\vec{k}\|^2 s(M,t)$; $\dfrac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0.$

Puis

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2\Delta s \xRightarrow[s(M,t)\neq 0]{} \omega^2 = c^2\|\vec{k}\|^2 \Rightarrow \|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c}$$

C

1. L'ONDE AVANCE À LA VITESSE c. ELLE PART DE L'ORIGINE À L'INSTANT ORIGINEL. ELLE A DONC PARCOURU LA DISTANCE ct. AU-DELÀ DE CETTE DISTANCE, ELLE N'EST PAS ENCORE ARRIVÉE.



A L'INSTANT t

2. UTILISATION DE Aa PUISQUE C'EST UNE OPP+

POUR
$0 \leq x \leq ct$ $\quad y(x,t) = y\left(0, t - \frac{x}{c}\right) = A\sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$

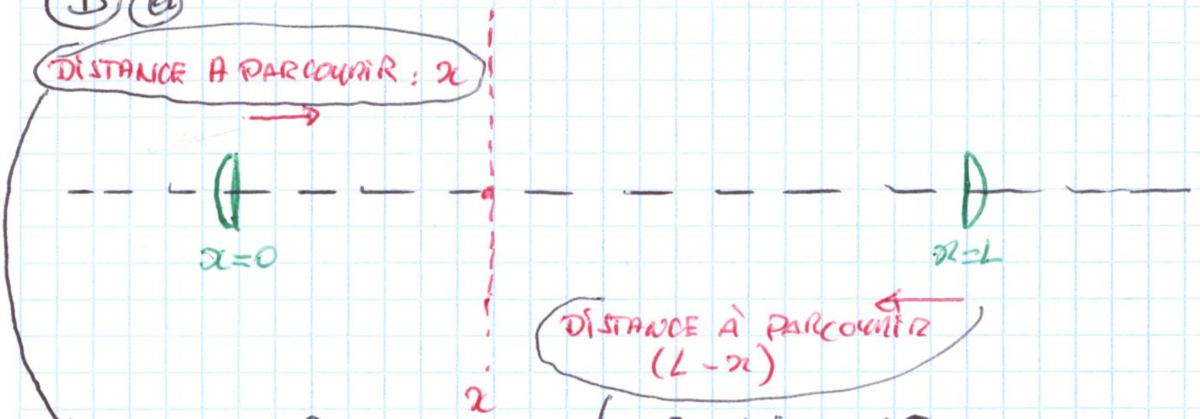
$= A\sin(\omega t - kx)$

avec $k = \frac{\omega}{c}$

$ct \leq x$ $\quad y(x,t) = 0$

Exercice D.

D (a)



↳ EXERCICE A(b)

$$y_1(x,t) = y_1\left(0, t - \frac{x}{c}\right) = A\cos(\omega t - kx)$$

↳ EXERCICE A(b)

$$y_2(x,t) = y_2\left(0, t - \frac{(L-x)}{c}\right) = A\cos(\omega t + k(x-L))$$

AVEC $k = \frac{\omega}{c}$

(b)

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\left[\cos(\omega t - kL) + \cos(\omega t + k(x-L))\right]$$

ENSUITE AU CHOIX

(1) TRIGO $\cos a + \cos b$ $=\!=$

(2) COMPLEXE $\underline{y}(x,t) = A\, e^{j\omega t}\left[\exp(-jkx) + \exp(+jk(x-L))\right]$

$$= A\exp(j\omega t)\exp\left(-j\frac{kL}{2}\right)\left[e^{jk(x-\frac{L}{2})} + e^{-jk(x-\frac{L}{2})}\right]$$

$$= A\exp\left[j\left(\omega t - \frac{kL}{2}\right)\right] \cdot 2\cos\left(k\left(x - \frac{L}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow y(x,t) = \mathrm{Re}(\underline{y}(x,t)) = \underbrace{2A\cos\left[k\left(x-\frac{L}{2}\right)\right]} \cos\left[\omega t - \frac{kL}{2}\right]$$

AMPLITUDE LOCALE $A'(x) = \left|2A\cos\left[k\left(x - \frac{L}{2}\right)\right]\right|$

DECOUPLAGE SPATIO TEMPOREL

$\boxed{\text{ONDE STATIONNAIRE}}$

OU AUSSI : INTERFERENCES CONSTRUCTIVES $A'(x) = 2A$

— DESTRUCTIVES $A'(x) = 0$

Exercice E.

Comme la corde est fixée en x=0, on a forcément y(x=0,t)=0, ce que ne valide pas l'onde incidente. Il existe forcément une autre onde, que nous imaginons être l'onde réfléchie, soit ici une OPPH- qu'on va noter $y_r(x,t)$.

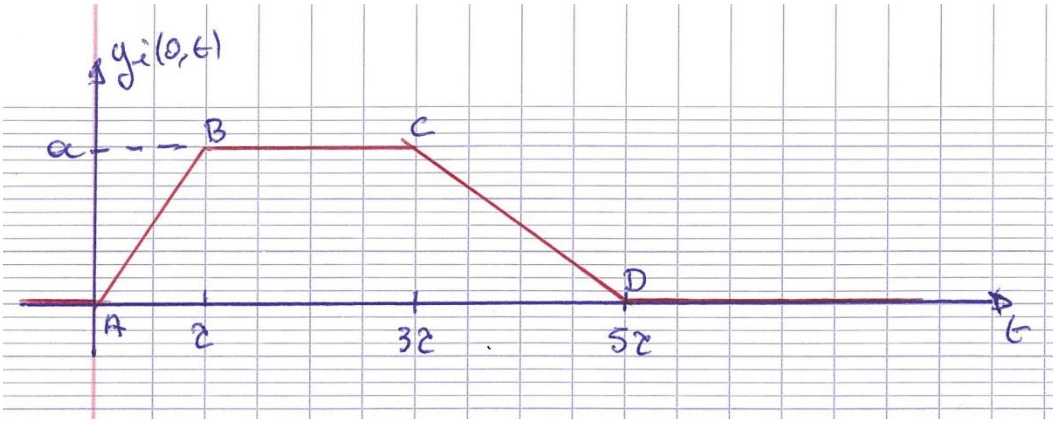
On obtient donc $y_r(x=0,t) = -y_{inc}(x=0,t) = -A\cos(\omega t)$

Comme l'onde réfléchie est une OPP-, on a $y_r(x,t) = y_r(x=0, t + x/c) = -A\cos(\omega t + kx)$

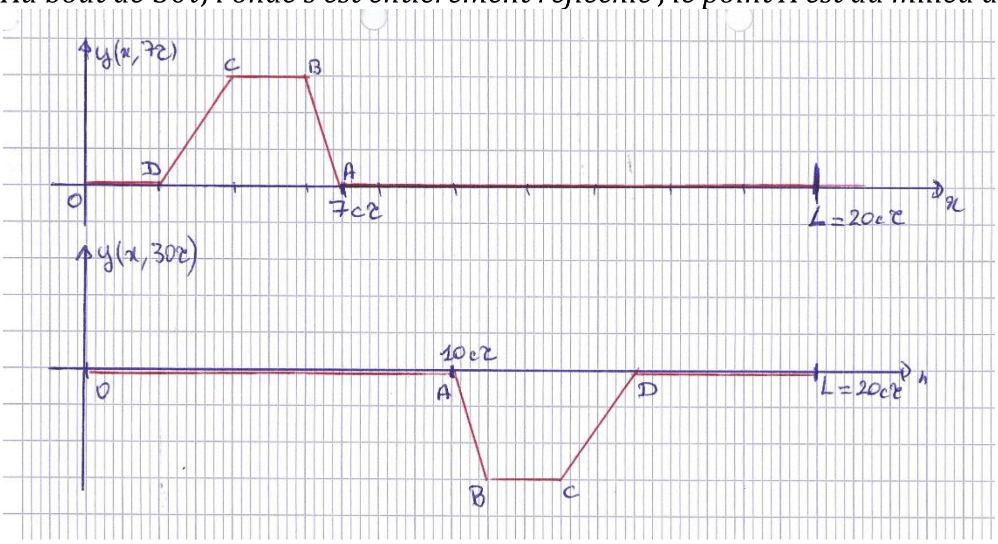
Exercice F.

L'onde va se propager sur la corde. Elle arrive en bout de corde à l'instant $t = 20\tau$, et se réfléchira alors en changeant de signe puis en se propageant dans l'autre sens.

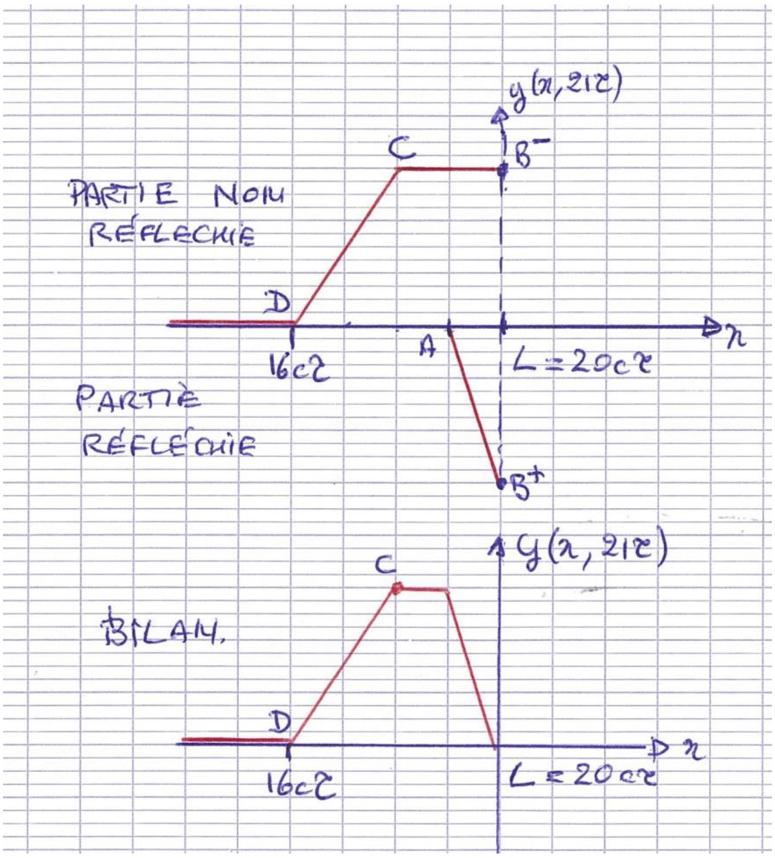
1)



2)Au bout de 7τ, le point A a parcouru $7c\tau$ et on place alors les autres points de l'onde. Au bout de 30τ, l'onde s'est entièrement réfléchie , le point A est au milieu de la corde.



C'est plus compliqué au bout de 21τ, car l'onde est en partie réfléchie. Il faut la traiter en 2 étapes : le début de l'onde reparti dans l'autre sens en s'inversant, la fin qui n'a pas encore atteint le bout de la corde :



<u>Exercice G . Fait en cours.</u>

H)Câble coaxial.

1)Cf cours. A maîtriser absolument.

2a) *Cf cours. La solution générale de l'équation d'onde est la somme d'une $OPP+$ et d'une $OPP-$. C'est ce qui est écrit ici.*

On fait évidemment la même chose pour $v(x,t)$:

$$v(x,t) = v_+(\alpha = t - x/c) + v_-(\beta = t + x/c)$$

2b)

On peut prendre l'équation 1b : $\frac{\partial v_+}{\partial x} = -\Lambda\left(\frac{\partial i_+}{\partial t}\right)$ *qu'on transforme :* $\frac{dv_+}{d\alpha} = \Lambda c\frac{di_+}{d\alpha}$

Qu'on peut évidemment intégrer :

$$v_+ = \Lambda c.i_+ + Cte$$

On peut éventuellement garder la cte ou l'éliminer en disant que les deux grandeurs nulles ensemble est solution. On a donc une loi d'Ohm avec $R_C = \Lambda c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$

2c)*Même méthode de calcul. Là , il reste un signe -.*

2d)*La somme des deux solutions écrites est aussi solution.*

$$v(x,t) = v_+(\alpha) + v_-(\beta) = R_C(i_+ - i_-)$$

$$i(x,t) = i_+(\alpha) + i_-(\beta) = \frac{1}{R_C}(v_+ - v_-)$$

2e) *On aurait pu directement prendre une OPPH et utiliser la notation complexe.*

Je fais l'$OPPH+$: $\underline{v}(x,t) = \underline{V_o}expj(\omega t - kx)$ $\underline{i}(x,t) = \underline{I_o}expj(\omega t - kx)$

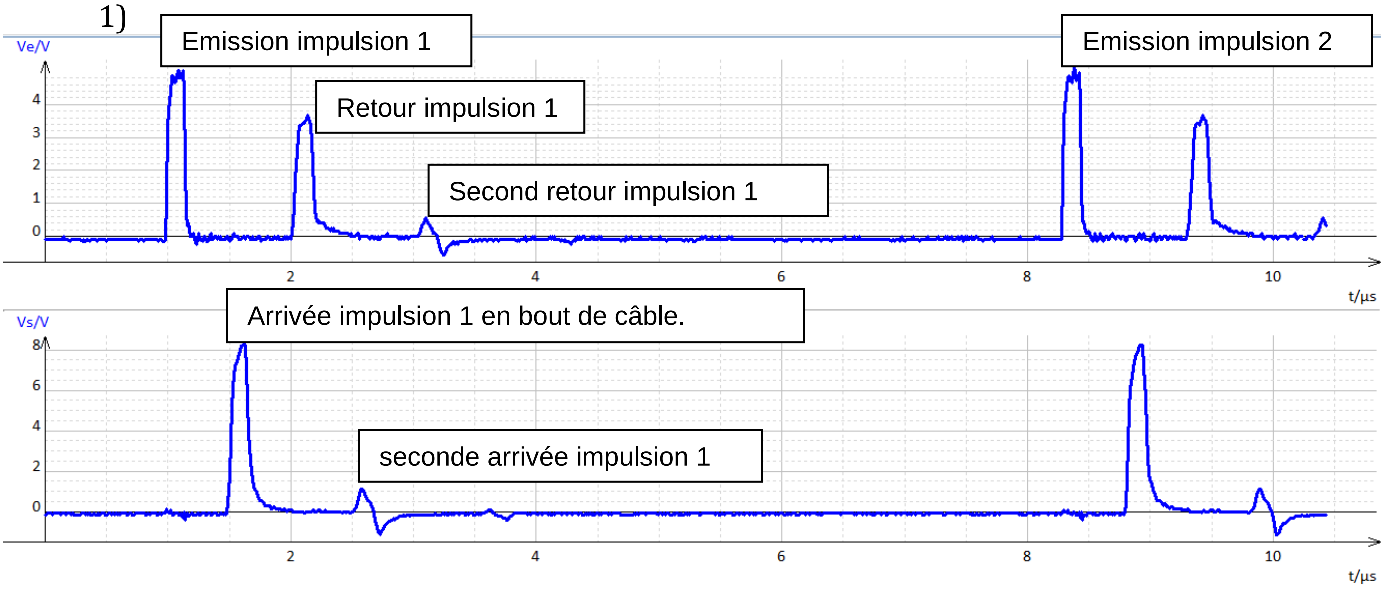
On peut prendre l'équation 1b : $\frac{\partial \underline{v}}{\partial x} = -\Lambda\left(\frac{\partial \underline{i}}{\partial t}\right)$ *qui donne* $-jk.\underline{v}(x,t) = -\Lambda.j\omega\underline{i}(x,t)$

On retombe sur : $\underline{v}(x,t) = R_C\underline{i}(x,t)$

Même principe pour l'$OPPH-$. C'est beaucoup plus rapide et on n'a besoin de connaître les relations fournies. C'est même une méthode pour retrouver les relations fournies si on vous les demande.

L.Onde dans un câble coaxial.

1)



Au premier retour de l'impulsion, l'onde est quasiment entièrement absorbée car la résistance interne du GBF est la aussi la résistance caractéristique du câble.

2)L'intervalle de temps entre l'émission de 2 impulsions est d'environ 7,2µs .

3)L'impulsion met environ 1µs pour faire l'aller-retour soit 200m. ce qui correspond à une vitesse de $2\ 10^8$ $m.s^{-1}$ soit les deux tiers de la vitesse de la lumière dans le vide.

4)Expérimentalement, l'onde va être absorber au cours de sa propagation, donc son amplitude doit décroître dans le temps. Ce qui ne semble pas être le cas car on a une hauteur de 5V en entrée et 8V en sortie.

En fait, en sortie, on a a la fois l'onde réfléchie et l'onde incidente. Par le calcul, ou en regardant les simulations, ces deux ondes sont égales en sortie. Donc, la hauteur de l'onde incidente en sortie est seulement de 4V. Il y a bien atténuation.

5)A faire en liaison avec les calculs effectués dans l'exercice H ou les simulations du cours.

<u>Avec la sortie court-circuitée</u>, on a bien inversion de l'onde incidente à la réflexion. L'onde réfléchie est quasiment entièrement absorbée à son retour en entrée de ligne.

<u>Avec la sortie fermée sur 50Ω.</u> La sortie est fermée sur son impédance caractéristique et est donc absorbée. Pas d'écho. On peut voir l'atténuation de l'onde au cours de sa propagation : 5V en entrée et 4V en sortie.