PSI2. devoir libre n°2. Mardi 5 novembre 2024.

N. Aspects micro- et macro-scopiques de la propagation d'ondes dans la matière. Pas dans le programme, mais... Donc pour les ambitieux.

A l'échelle microscopique, un matériau solide homogène peut être modélisé par par une chaîne infinie d'atomes assimilés à des points matériels de même masse m reliés entre eux par des ressorts identiques, de longueur à vide a et de raideur K. Ces ressorts modélisent dans l'approximation linéaire les interactions électromagnétiques entre les atomes lorsqu'ils se déplacent au voisinage de leur position d'équilibre.

Considérons un modèle unidimensionnel dans lequel tous les atomes se déplacent sans frottement sur un axe Ox. La figure 1 représente cette disposition où chaque atome est numéroté par un entier n. lorsqu'il est en équilibre mécanique, l'atome référencé (n) est situé à l'abscisse x_n(éq)=na; en dehors de l'équilibre, sa position devient $x_n(t)=na+u_n(t)$.

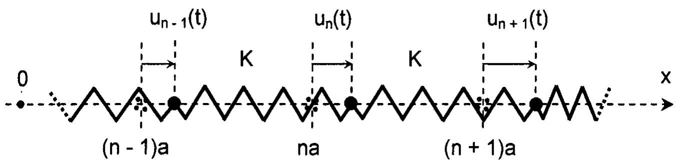

Figure 1 : Chaîne infinie d'atomes

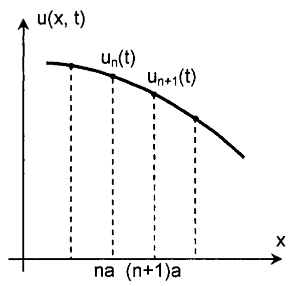

Figure 2 : Représentation de u(x, t) à t fixé

1.a)*Etablir l'expression de la résultante des forces exercées par les atomes (n-1) et (n+1) sur l'atome (n).*

1.b)*En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'atome (n) et montrer qu'elle peut s'écrire : $\ddot{u}_n = \pm\, \omega_o^2(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$ en prenant le bon signe. On donnera l'expression de la constante positive ω_o en fonction de K et de m. Une erreur de signe est-elle détectable a posteriori ?*

Dans toute question 2, nous étudions une solution particulière de la forme :

$$\underline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{exp}[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\omega t} - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{na})]\ \textbf{pour tout } \boldsymbol{n}$$

où $\underline{A}$ est un nombre complexe indépendant de n et k un nombre réel.

2a)*Quelle signification physique peut-on attacher à ce type de déplacement ? Quelle hypothèse fait-on en supposant que $\underline{A}$ est indépendant de n ?*

2b)*Vérifier que l'expression proposée est bien solution de l'équation obtenue en 1b à condition que :*

$$\omega = 2\omega_o \left|sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right|$$

Quelles sont les valeurs possibles de ω ? Dessiner l'allure de $\omega = \omega(k)$ pour k dans [-3π/a +3π/a[.

2c)*On restreint l'intervalle de variation de k à [-π/a +π/a[. Expliquer. Dans ce nouvel intervalle, décrire plus précisément les différences entre k>0 et k<0.*

3)*L'approximation des milieux continus permet de faire passer une fonction u(x,t) par tous les points représentatifs des atomes de la chaîne à chaque instant (cf figure 2). cela est possible lorsque u_n est peu différent de u_{n+1}. Définissons la fonction continue et dérivable u(x,t) telle que $u(x,t)=u_n(t)$ lorsque x=na. Supposons que u(x,t) varie peu dans l'espace à l'échelle de a. En considérant que l'atome n occupe l'abscisse x, remarquons que :*

$$u(x+a,t) = u(na+a,t) = u_{n+1}(t) \quad et\ \ u(x-a,t) = u(na-a,t) = u_{n-1}(t)$$

En utilisant un DL limité à l'ordre 2, montrer que la fonction u(x,t) vérifie une équation de d'Alembert dont on exprimera la célérité en fonction de K, m et a. A quel cas de la question 2 cela correspond-il ?

AT1. Où Fourier rejoint Fourier…

On s'intéresse à un problème de conduction de chaleur dans un barreau d'axe Ox et de longueur L, compris entre les abscisses –L/2 et +L/2. On se limite au cas unidimensionnel où le champ de température s'écrit $\theta(x,t)$. L'équation de la chaleur noté EDP s'écrit : $\frac{\partial\theta}{\partial t} = D.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$

1)*On cherche une solution de la forme $\theta(x,t)=A.\sin(kx).\exp(-\alpha t)$ où k et α sont des constantes positives et où A est une constante réelle. Montrer qu'une telle fonction peut être solution si k et α vérifient une certaine relation.*

Au début du $XIX^{ème}$ siècle, un certain Joseph Fourier a voulu s'attaquer au problème suivant : trouver $\theta(x,t)$ dans l'état initial suivant, où θ_0 est une constante positive :
A t=0, pour x compris entre –L/2 et 0, $\theta(x,0) = -\theta_o$;
pour x compris entre 0 et +L/2, $\theta(x,0) = +\theta_o$.
Il a eu l'idée de remarquer que, presque partout, :

$$\theta(x,0) = \frac{4\theta_o}{\pi}.\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2p+1}\sin\left[\frac{(2p+1)2\pi}{L}.x\right]$$

2)*Décrire en termes modernes l'écriture de cette fonction.*

3)*Préciser l'expression « presque partout ».*

4)*Montrer qu'en utilisant les résultats de la question 1 et une propriété fondamentale de EDP que le sieur Joseph Fourier a pu effectivement proposer une solution au problème posé.*

D'un point de vue historique, il est à noter que si l'approche formellement critiquable de M Fourier lui a permis de devenir célèbre au point d'être certainement le physicien le plus cité dans les ouvrages scientifiques modernes, son mémoire dont la première version date de 1807 n'a été publié par l'Académie qu'en 1824 … quand il en est devenu le patron.