Correction du DM5

(Extrait E3A PSI 2009 Maths B)

Partie A

1. Si $\lambda < 0$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \sim \dfrac{-\lambda}{n} > 0$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour $n \geqslant n_0$; la suite (u_n) est donc croissante à partir d'un certain rang n_0 et $u_n \geqslant u_{n_0} > 0$ pour $n \geqslant n_0$. La suite (u_n) ne tend pas vers 0 donc $\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement}}$

2. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\beta - \lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

3. a) On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \sim \dfrac{\beta - \lambda}{n} < 0$ donc $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \text{ pour } n \geqslant N}$

b) On fait apparaître un télescopage sous forme de produit (on peut aussi s'intéresser à $\ln(u_n)$ pour faire apparaître une somme) : $u_n = u_N \displaystyle\prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant u_N \prod_{k=N}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{u_N}{v_N} v_n$ donc $\boxed{u_n \leqslant \dfrac{u_N}{v_N} v_n \text{ pour } n \geqslant N}$

c) On a $\beta > 1$ donc $\sum v_n$ converge et $0 < u_n = O(v_n)$ donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

4. On choisit β tel que $\lambda < \beta < 1$, on a alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \sim \dfrac{\beta - \lambda}{n} > 0$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour $n \geqslant N_1$. On en déduit $u_n \geqslant \dfrac{u_{N_1}}{v_{N_1}} v_n$ pour $n \geqslant N_1$. Enfin, comme $\beta < 1$, $\sum v_n$ diverge donc $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$

5. On a $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\lambda = 1$ et $\boxed{\sum x_n \text{ diverge}}$

Puis, $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-1} \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{-2} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^{-2}$; et $\dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \sim \dfrac{1}{n\ln(n)} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\lambda = 1$. On montre que $\sum y_n$ converge par comparaison à une intégrale : $t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$; de plus $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^2} = \left[\frac{-1}{\ln(t)}\right]_2^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{\ln(2)}$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ donc $\boxed{\sum y_n \text{ converge}}$

Partie B

1. On a $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \in]0, \pi[$ donc $w_n > 0$ et $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{6n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) = 1 - \dfrac{1}{6n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\lambda = \dfrac{1}{6} < 1$ et $\boxed{\sum w_n \text{ diverge}}$

2. a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^4)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\dfrac{1}{(1+t^4)^n} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{4n}}$; pour $n \geqslant 1$, on a $4n > 1$ donc $\boxed{t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^4)^n} \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[\text{ pour } n \geqslant 1}$

b) On a $4n(I_n - I_{n+1}) = 4n \displaystyle\int_0^{+\infty} t \times \frac{t^3}{(1+t^4)^{n+1}}\, \mathrm{d}t$; puis on effectue une intégration par parties : les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \dfrac{-1}{(1+t^4)^n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et on a $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{-t}{(1+t^4)^n} = 0$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \times \frac{4nt^3}{(1+t^4)^{n+1}}\, \mathrm{d}t = \left[t \times \frac{-1}{(1+t^4)^n}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$, ce qui donne $\boxed{4n(I_n - I_{n+1}) = I_n}$

c) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^4)^n}$ est continue, positive, non nulle et intégrable sur $[0, +\infty[$ donc $I_n > 0$ et on a $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \dfrac{1}{4n}$ donc $\boxed{\sum I_n \text{ diverge}}$ $(\lambda = 1/4 < 1)$

3. a) $\alpha \notin \mathbb{N}$ donc $a_n \neq 0$ et $|a_n| > 0$; $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n - \alpha}{n+1}$ pour $n \geqslant \alpha$, puis $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(1 - \dfrac{\alpha}{n}\right)\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \dfrac{1+\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$; $\alpha \neq 0$ donc $1 + \alpha \neq 1$, la règle de Raabe-Duhamel permet de conclure dans tous les cas : $\boxed{\sum a_n \text{ est absolument convergente si et seulement si } \alpha > 0}$

b) Si $\alpha < -1$ alors $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 - \dfrac{1+\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $1+\alpha < 0$ donc on a vu que $(|a_n|)$ est croissante à partir d'un certain rang, ce qui prouve que (a_n) ne tend pas vers 0 et $\boxed{\sum a_n \text{ diverge grossièrement}}$

c) i. $\ln|a_{n+1}| - \ln|a_n| = \ln\left(1 - \dfrac{1+\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \sim \dfrac{-(1+\alpha)}{n}$ donc $\sum(\ln|a_{n+1}| - \ln|a_n|)$ est une série divergente à termes négatifs. Comme $\ln|a_n| = \ln|a_0| + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(\ln|a_{k+1}| - \ln|a_k|)$, on a $\boxed{\lim \ln|a_n| = -\infty}$

ii. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\alpha - n}{n+1} < 0$ (car $\alpha < 0$) donc $\sum a_n$ est une série alternée. De plus $\lim |a_n| = -\infty$ donc $\lim |a_n| = 0$. Enfin, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 - \dfrac{1+\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $1+\alpha > 0$ donc $(|a_n|)$ est décroissante à partir d'un certain rang. D'après le CSSA, $\boxed{\sum a_n \text{ converge}}$