Suites et séries de fonctions

La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes. On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts.
Si f est une fonction bornée sur I, on note $\|f\|_\infty$ sa norme infinie définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

I Convergence des suites de fonctions

1. Convergence simple et convergence uniforme des suites de fonctions

Définition : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ si $\forall x \in I$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
La fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est appelée **limite simple** de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque(s) :

(I.1) (f_n) converge simplement vers f sur I signifie : $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Exemple(s) :

(I.2) La suite (f_n) définie par $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

(I.3) La suite (f_n) définie par $f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0,n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t}$.

Attention :

1. *La suite (f_n) de fonctions continues, définie par $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & si\ x \in [0,1[\\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$ pourtant f n'est pas continue.*
2. *La suite (g_n) définie par $g_n : x \in [0,1] \mapsto n^3(1-x)x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $g = 0$ (qui est cette fois continue) mais $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t$.*

Définition : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** I vers f si

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

Remarque(s) :

(I.4) (f_n) converge uniformément vers f sur I signifie : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
L'entier n_0 ne dépend alors que de ε et est indépendant de $x \in I$.

Propriété [I.1] : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

Attention : La réciproque est fausse ; c/ex : (f_n) définie par $f_n : x \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ mais pas uniformément sur $[0,1]$.

Remarque(s) :

(I.5) Pour étudier la convergence uniforme de (f_n), on commencera donc par l'étude de la convergence simple, de façon à déterminer la fonction f, puis on s'intéressera à la suite $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété [I.2] : Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **indépendante de** x telle que

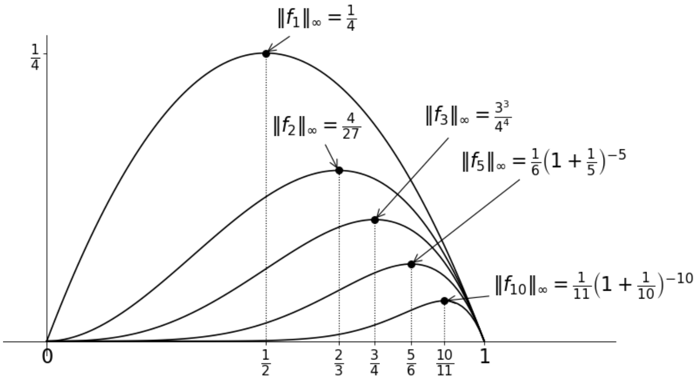
$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$$

Remarque(s) :

(I.6) La démonstration de la convergence uniforme peut donc se découper en deux parties (après avoir déterminé la limite simple f) :
- D'abord on majore $|f_n(x) - f(x)|$ indépendamment de x pour trouver une telle suite (α_n) ; pour cela on ne peut utiliser que les symboles $=$ et $\leqslant$ (ou le tableau de variations de $f_n - f$, en pensant à tenir compte de la valeur absolue ensuite).
- Puis on prouve que (α_n) tend vers 0 ; on peut cette fois utiliser toutes les méthodes connues pour les suites numériques, en particulier des équivalent ou des DL.

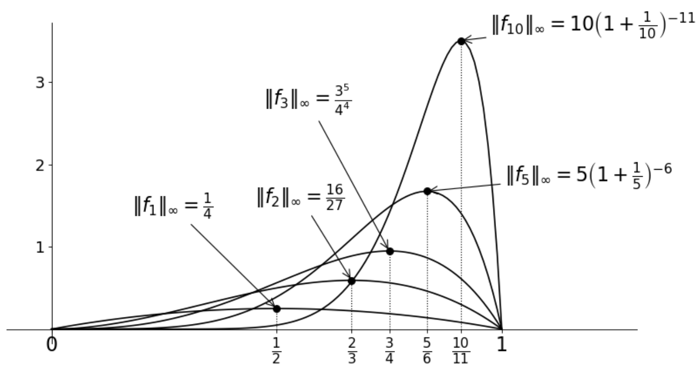
Exemple(s) :

(I.7) Etudier la convergence uniforme sur $[0,1]$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_n : x \in [0,1] \longmapsto (1-x)x^n$ puis de $g_n = n^2 \times f_n$.



$$\forall x \in [0,1], f_n(x) = (1-x)x^n$$
$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Représentation d'une suite qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers 0



$$\forall x \in [0,1], g_n(x) = n^2(1-x)x^n$$
$$\|g_n\|_\infty = n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Représentation d'une suite qui converge simplement sur $[0,1]$ vers 0 mais pas uniformément vers 0

Remarque(s) :

(I.8) Pour que la suite (g_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,1]$, il n'est pas nécessaire que la suite $(\|g_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$ (comme dans le deuxième exemple), il suffit que $(\|g_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 (donc si elle converge vers une limite non nulle, ou vers $+\infty$, ou encore si elle n'a pas de limite).

Définition : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur tout segment de** I vers f si pour tout segment $[a,b] \subset I$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} = 0, \text{ où } \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Remarque(s) :

(I.9) (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I signifie :
$\forall \varepsilon > 0, \forall [a,b] \subset I, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in [a,b], |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. L'entier n_0 ne dépend alors que de ε, a et b et est indépendant de $x \in [a,b]$.

(I.10) Si (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I alors (f_n) converge simplement vers f sur I.

(I.11) Si (f_n) converge uniformément sur I vers f alors (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I mais la réciproque est fausse ; c/ex : $f_n : x \in [0,1[\mapsto x^n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment de $[0,1[$ mais pas sur $[0,1[$.

(I.12) Si I est un segment, les notions de convergence uniforme sur I et sur tout segment de I sont équivalentes.

Méthode : pour étudier les modes de convergence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$,

- ◇ on détermine la limite simple f de (f_n) puis on étudie $\|f_n - f\|_\infty$
- ◇ pour montrer que (f_n) converge uniformément vers f on peut
  - — calculer $\|f_n - f\|_\infty$ (par une étude de fonction par exemple)
  - — chercher une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que $\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$.
- ◇ pour montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur I, on peut
  - — calculer $\|f_n - f\|_\infty$ et montrer que $\|f_n - f\|_\infty$ ne tend pas vers 0.
  - — chercher une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

Exemple(s) :

(I.13) Étudier les modes de convergence de la suite (f_n) définie par $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \dfrac{n^2x^3 - nx}{1 + (nx)^2}$.

(I.14) Étudier la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

2. Continuité et convergence uniforme

Propriété [I.3] : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur I vers f.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a alors f est continue en a.

Conséquence [I.4] : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On suppose que :

- ▷ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I.
- ▷ la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I) vers f.

Alors

f est continue sur I

Exemple(s) :

(I.15) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = x \geqslant 0 \\ v_0 = 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{array}\right. \text{ si } n \geqslant 0$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $l(x)$ puis que la fonction l est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque(s) :

(I.16) Ce théorème n'est pas très utile pour les suites de fonctions car le plus souvent, pour prouver la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on commence par déterminer la limite simple f donc comme on connaît l'expression de $f(x)$, la continuité de la fonction f est évidente.

(I.17) Ce théorème, pour les suites de fonctions, sert principalement à montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme (par contraposée) : la suite (f_n), définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_0 = 0$ et $f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$, ni sur $\mathbb{R}^{+*}$.

II Convergence des séries de fonctions

1. Modes de convergence des séries de fonctions

Définition : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ **converge simplement sur** I si pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ est convergente.

Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur I, on définit sa **somme** S par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et son **reste** $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Remarque(s) :

(II.1) Si $\sum f_n$ converge simplement sur I alors la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur I.

(II.2) $\sum f_n$ converge simplement vers S sur I signifie que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge pour tout $x \in I$ et

$$\forall x \in I, \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = S(x)$$

Exemple(s) :

(II.3) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ converge simplement sur $]-1, 1[$ vers $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

(II.4) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto e^x$.

(II.5) La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^x}$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ mais on ne sait pas expliciter sa somme à l'aide de fonctions usuelles ; on notera sa somme ζ définie par $\forall x > 1, \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ et on pourra dire que $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^x}$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ vers ζ.

Définition [II.1] : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

1. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ **converge uniformément sur** I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ converge uniformément sur I.
Cela signifie que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur I et la **suite de fonctions** $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers** 0 **sur** I, ie $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$.

2. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ **converge uniformément sur tout segment de** I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, ie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur I et la **suite de fonctions** $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers** 0 **sur tout segment de** I.

Remarque(s) :

(II.6) Pour prouver la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur I, on doit donc commencer par justifier sa convergence simple (ce qui donne l'existence des fonctions S et R_n) puis étudier la convergence uniforme de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$: on sait déjà que cette suite converge simplement vers 0, il faut donc étudier la suite $(\|R_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$.
On peut alors utiliser les deux méthodes vues précédemment :
— Calculer $\|R_n\|_\infty$ par une étude de fonctions, ce qui sera difficile en général car on ne connaît pas d'expression simple de $R_n(x)$.
— Chercher une suite (α_n), indépendante de x telle que $\forall x \in I, |R_n(x)| \leqslant \alpha_n$ et telle que (α_n) tende vers 0.

Exemple(s) :

(II.7) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,1[$ mais pas sur $]-1,1[$.

Définition : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

1. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ **converge normalement sur** I si la **série** (numérique) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge.
2. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ **converge normalement sur tout segment de** I si, pour tout segment $[a,b] \subset I$, la **série** $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge.

Remarque(s) :

(II.8) Il s'agit à nouveau de procéder en deux temps :
— D'abord on calcule la valeur de $\|f_n\|_\infty$ (par une étude de fonction par exemple) ; cette quantité dépend en général de n mais doit absolument être indépendante de x.
— Ensuite on prouve la convergence de la série de terme général $\|f_n\|_\infty$, souvent par le théorème de comparaison (c'est obligatoirement une série à termes positifs).

Exemple(s) :

(II.9) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$ mais pas sur $]-1,1[$.

Propriété [II.2] : Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **indépendante de** x telle que

$$\forall x \in I, |f_n(x)| \leqslant \alpha_n \quad \text{et} \quad \text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \text{ converge}$$

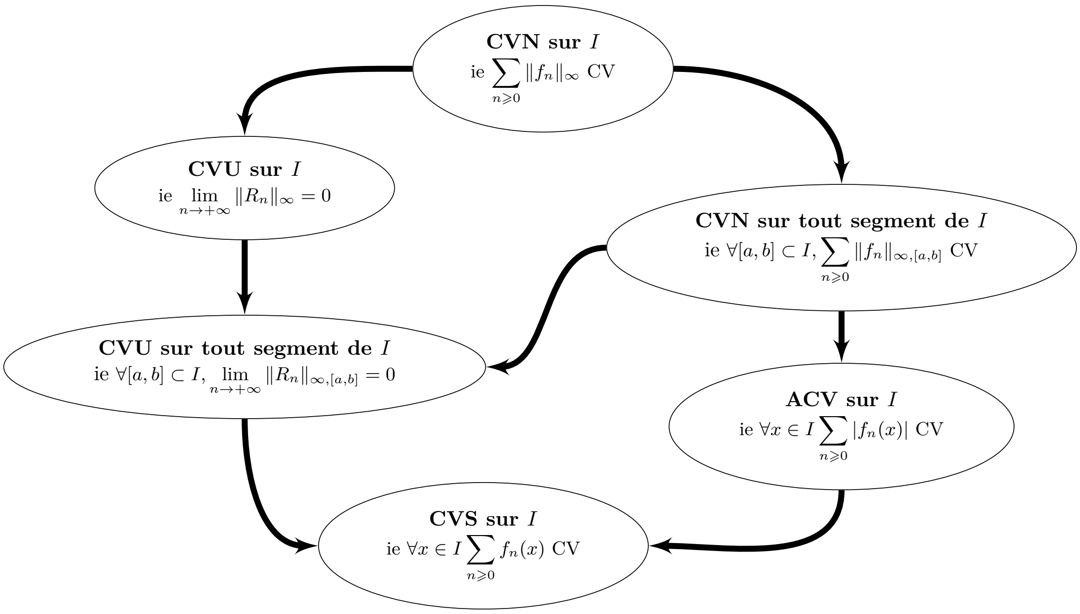
Remarque(s) :

(II.10) La démonstration de la convergence normale peut donc se découper en deux parties :
— D'abord on majore $|f_n(x)|$ indépendamment de x pour trouver une telle suite (α_n) ; pour cela on ne peut utiliser que les symboles $=$ et $\leqslant$ (ou le tableau de variations de f_n, en pensant à tenir compte de la valeur absolue ensuite).
— Puis on prouve que $\sum \alpha_n$ converge ; on peut cette fois utiliser toutes les méthodes connues pour les séries numériques, en particulier le théorème de comparaison, des équivalent ou des DL.

Propriété [II.3] : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

1. Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur tout segment de I (en particulier si elle converge normalement sur I) alors pour tout $x\in I$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ est absolument convergente, ie la série de fonction $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ converge simplement sur I.

2. Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur I (resp. sur tout segment de I) alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur I (resp. sur tout segment de I).



Modes de convergence des séries de fonctions

Méthode : pour étudier une fonction S définie par $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$,

- ◇ on étudie la convergence simple de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ pour déterminer l'ensemble de définition D de S
- ◇ pour étudier la convergence normale sur D (éventuellement sur tout segment de D), on peut
  - — calculer $\|f_n\|_\infty$ et vérifier que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge (par le théorème de comparaison par exemple).
  - — trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendante de x, telle que $\forall x\in I, |f_n(x)| \leqslant \alpha_n$ et telle que $\sum \alpha_n$ est une série convergente.
- ◇ Si la série n'est pas normalement convergente, on peut essayer d'étudier la convergence uniforme sur I (ou sur tout segment de I) en étudiant $\|R_n\|_\infty$: il s'agit de trouver une suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tendant vers 0 et telle que $\forall x\in I, |R_n(x)| \leqslant \beta_n$; la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit être indépendante de x.

Exemple(s) :

II.11 Si $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

II.12 Si $g_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ mais pas sur $\mathbb{R}^{+*}$ (ni sur $\mathbb{R}^+$) mais converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

2. Continuité de la somme d'une série de fonctions

<u>Théorème</u> [II.4] : (Continuité de la somme d'une série de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
On suppose que :

- ▷ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I.
- ▷ la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge $\left\{\begin{array}{l}\textbf{normalement sur tout segment de } I\\ \text{ou normalement sur } I\\ \text{ou uniformément sur tout segment de } I\\ \text{ou uniformément sur } I\end{array}\right.$

Alors

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ est continue sur } I$$

<u>Remarque(s) :</u>

(II.13) Ce théorème n'a pas besoin d'être utilisé lorsque la somme S est calculable : $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ pour $x \in]-1,1[$; on sait déjà que $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est continue sur $]-1,1[$.

(II.14) Ce théorème doit être utilisé pour toute question où l'on demande de justifier qu'une fonction S, définie comme la somme d'une série (que l'on ne parvient pas à calculer), est continue.

(II.15) La conclusion obtenue est identique quel que soit le mode de convergence prouvé : le plus simple est donc toujours de <u>commencer par essayer de vérifier la convergence normale sur tout segment de I</u>.

<u>Exemple(s) :</u>

(II.16) Les fonctions $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ et $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$.

<u>Théorème</u> [II.5] : (Théorème de double limite)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et a **une borne de** I ($a = \pm\infty$ éventuellement).
On suppose que :

- ▷ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie l_n en a.
- ▷ la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement (ou uniformément) sur I.

Alors la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} l_n$ converge et, si S est la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$, on a $\displaystyle\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$; ie

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

<u>Remarque(s) :</u>

(II.17) Ce théorème sert souvent à déterminer les limites de la somme S de $\sum f_n$ aux bornes de son domaine de définition.

(II.18) Pour appliquer ce théorème, a doit être **une borne de** I ce qui implique les deux remarques suivantes :
— on <u>ne peut pas</u> utiliser la CVN sur des segments de I.
— on <u>peut</u> choisir l'intervalle I en fonction de la borne a à étudier : si on souhaite étudier la limite en $+\infty$ de S, qui est définie sur $]0,+\infty[$, on peut se placer sur $I = [1,+\infty[$ par exemple, ie **UN intervalle dont** a **est une borne**.

<u>Exemple(s) :</u>

(II.19) Étudier les fonctions $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\theta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ sur leurs ensembles de définition.

(*II.20*) Étudier $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+(nx)^2}$.

(*II.21*) Étudier $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ sur $\mathbb{R}^+$.

III Intégration et dérivation des suites et séries de fonctions

1. Intégration des suites de fonctions

Théorème [III.1] : (Intégration de fonctions continues sur un segment)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
On suppose que :

- ▷ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le **segment** $[a,b]$.
- ▷ la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur le **segment** $[a,b]$ vers f.

Alors f est continue sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Attention : Comme on l'a vu au début du chapitre, la convergence simple n'est pas suffisante pour intervertir une limite et une intégrale.

Remarque(s) :

(*III.1*) Ce théorème ne s'applique que pour des fonctions f_n continues sur un segment $[a,b]$ et la convergence uniforme doit être prouvée sur le segment $[a,b]$.

Exemple(s) :

(*III.2*) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \mathrm{d}t$.

(*III.3*) Étudier la convergence de $f_n : x \mapsto (n+1)\cos x \sin^n x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Théorème [III.2] : (Théorème de convergence dominée)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On suppose que :

- ▷ la suite (f_n) converge simplement sur I vers f.
- ▷ les fonctions f_n et la fonction f sont continues par morceaux sur I.
- ▷ il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, **indépendante de n**, et intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$$

Alors les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

Remarque(s) :

(*III.4*) L'hypothèse la plus importante (qui donne son nom au théorème) est l'hypothèse de domination. Elle se vérifie en deux temps :
- — on commence par majorer le module de $f_n(x)$ par une fonction φ **indépendante de** n (en n'utilisant que les symboles $=$ et $\leqslant$).
- — Une fois que la fonction φ est trouvée, on prouve son intégrabilité sur I : le plus souvent, on vérifie qu'elle est continue par morceaux et on lui applique le théorème de comparaison (donc on peut cette fois utiliser les symboles $\sim$, o, O,...)

(*III.5*) Le TCD est plus général que le théorème précédent : on peut cette fois l'utiliser avec des fonctions continues par morceaux et se placer sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ (pas nécessairement un segment). De plus, lorsque les hypothèses du théorème III.1 sont vérifiées, on peut aussi appliquer le TCD (en dominant par une fonction constante).

Exemple(s) :

(III.6) Limite et équivalent de $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

(III.7) Limite de $v_n = n\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$

(III.8) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en utilisant $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

2. Intégration des séries de fonctions

Théorème [III.3] : (Intégration sur un segment d'une série de fonctions continues)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
On suppose que :

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le **segment** $[a,b]$.
- la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement (ou uniformément) sur le **segment** $[a,b]$.

Alors S définie par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $[a,b]$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque(s) :

(III.9) Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$ vers S et si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$ alors la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_a^b |S(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$.

Exemple(s) :

(III.10) Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ puis montrer que $\ln 2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Théorème [III.4] : (Théorème d'intégration terme à terme)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
On suppose que :

- la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I.
- les fonctions f_n <u>et</u> la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sont continues par morceaux sur I.
- les fonctions f_n sont intégrables sur I.
- la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_I |f_n|$ converge.

Alors la fontion S est intégrable sur I, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_I f_n$ converge et

$$\int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

Remarque(s) :

(III.11) Le plus souvent, la continuité par morceaux de la fonctions S est facile à vérifier car on calcule explicitement cette fonction lorsqu'on applique ce théorème.

(*III.12*) La quatrième hypothèse se prouve en général en deux temps :

— D'abord on calcule $\displaystyle\int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ ou on majore $\displaystyle\int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \alpha_n$; on obtient donc une suite qui ne peut dépendre que de n.

— Puis on prouve la convergence de la série de terme général $\displaystyle\int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ ou α_n, souvent en utilisant le théorème de comparaison (donc des symboles $\sim$, o, O ...)

(*III.13*) Ce théorème est particulièrement efficace lorsque les fonctions f_n sont de signe fixe sur I : les intégrales qui apparaissent dans la 4ème hypothèse et dans la conclusion se calculent en même temps.

Exemple(s) :

(*III.14*) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

(*III.15*) Montrer que, si $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^{xt}-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

(*III.16*) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ en utilisant $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+e^t}$.

3. Dérivation des suites de fonctions

Attention : La convergence uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ n'est pas suffisante pour que la limite soit de classe $\mathcal{C}^1$:

1. *Si $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ alors la limite de (f_n) n'est pas dérivable.*

2. *Si $f_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$ alors la limite f de (f_n) est dérivable mais $f'(x) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$.*

Théorème [III.5] : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
On suppose que :

- ▷ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- ▷ la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f.
- ▷ la suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I) vers g.

Alors

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \text{ et } f' = g$$

Remarque(s) :

(*III.17*) Sous les hypothèses de ce théorème, on prouve également que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur tout segment de I.

(*III.18*) Comme pour le théorème de continuité, ce théorème n'est pas très utile pour les suites de fonctions car le plus souvent on calcule explicitement la fonction f, il est alors évident de vérifier sa classe $\mathcal{C}^1$ et de caluler f'.

Conséquence [III.6] : Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et k un entier, $k \geqslant 1$.
On suppose que :

- ▷ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
- ▷ pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite de fonctions $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I.
- ▷ la suite de fonctions $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I) vers g.

Alors, en notant f la limite de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \text{ et } f^{(k)} = g$$

Remarque(s) :

III.19 Sous les hypothèses de ce théorème, les suites de fonctions $(f_n^{(j)})$ sont toutes uniformément convergentes sur tout segment de I.
Si on note g_j la limite de $(f_n^{(j)})$, alors $f^{(j)} = g_j$.

III.20 Avec $k = 1$, on retrouve le théorème donnant la classe $\mathcal{C}^1$.

4. Dérivation des séries de fonctions

Théorème [III.7] : (« Dérivation » de la somme d'une série de fonctions)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
On suppose que :

- ▷ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- ▷ la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I.
- ▷ la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ converge $\left\{\begin{array}{l}\textbf{normalement sur tout segment de } I\\ \text{ou normalement sur } I\\ \text{ou uniformément sur tout segment de } I\\ \text{ou uniformément sur } I\end{array}\right.$

Alors $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall x \in I, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

Exemple(s) :

III.21 Calculer, lorsque la série converge, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

III.22 Montrer que $\theta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Conséquence [III.8] : Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et k un entier, $k \geqslant 1$.
On suppose que :

- ▷ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
- ▷ pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(j)}$ converge simplement sur I.
- ▷ la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(k)}$ converge $\left\{\begin{array}{l}\textbf{normalement sur tout segment de } I\\ \text{ou normalement sur } I\\ \text{ou uniformément sur tout segment de } I\\ \text{ou uniformément sur } I\end{array}\right.$

Alors $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et

$$\forall x \in I, \forall j \in [\![1, k]\!], S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x).$$

Remarque(s) :

III.23 Comme pour le théorème donnant la continuité de la somme d'une série de fonction, la conclusion étant identique quel que soit le mode de convergence prouvé, on commence par essayer de prouver la convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ sur tout segment de I.

III.24 Ce dernier résultat redonne, dans le cas où $k = 1$, le théorème précédent.

(III.25) Si $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur I ou sur tout segment de I et si pour $j \in [\![0, k-1]\!]$ la série de fonctions $\sum |f_n^{(j)}|$ converge simplement sur I alors pour $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ converge normalement sur tout segment de I, mais pas forcément sur I entier.

Exemple(s) :

(III.26) Montrer que $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

(III.27) Tracer le graphe de f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.