

## I Étude de suites de fonctions

### Exercice 1 [Solution]

Étudier la convergence simple, uniforme, uniforme sur tout segment des suites de fonctions :

- $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$ ,  $n \geq 1$ , sur  $\mathbb{R}$ .
- $f_n(x) = \frac{n^a \sin\left(\frac{x}{n}\right) - 1}{n^a \sin\left(\frac{x}{n}\right) + 1}$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , où  $a \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 2 (CCP MP 2012) [Solution]

On pose  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$ . Montrer que  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$ . Étudier la convergence uniforme sur  $[a, +\infty[$ , avec  $a > 0$ , puis sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

### Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2012) [Solution]

On pose  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{2n^2x^2 - nx - 1}{2n^2x + 1} \sin^2 \frac{\pi}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$  Étudier les convergences simple et uniforme de  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$ .

### Exercice 4 (CCP PSI 2016) [Solution]

Soit  $f_n(x) = \cos\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)x\right]$ .

- Étudier la convergence simple de la suite  $(f_n)$ .
- Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment de  $\mathbb{R}$ ? Sur  $\mathbb{R}$ ?

### Exercice 5 (CCINP PSI 2021) [Solution]

On pose  $f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx}$  si  $x \geq 0$  et  $f_n(x) = \frac{nx^3}{1 + nx^2}$  si  $x < 0$ .

- Montrer que  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers  $f$  à déterminer.
- Montrer que  $(f'_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  mais ne converge pas uniformément sur  $[-1, 1]$ .

### Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]

Pour  $n \geq 1$  et  $x \in [0, 1]$ , on pose  $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1 + n^2x^2}$

- Étudier la convergence simple de  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$
- Soit  $a \in ]0, 1[$ , a-t-on convergence uniforme sur  $[a, 1]$ ?
- Étudier la convergence uniforme de  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$
- On pose  $u_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ . Déterminer la limite de  $(u_n)$ .
- Étudier la convergence de  $\sum f_n$ .

### Exercice 7 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $g_n$  définie sur  $[0, 1]$  par  $g_n(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ .

- Montrer que pour tout réel  $t \in [0, 1]$ ,  $|g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$  puis que  $\left|1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right| \leq \frac{te^t}{n}$ .
- Étudier la convergence uniforme sur  $[0, 1]$  de la suite de fonctions  $I_n(x) = \int_0^x e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ .

### Exercice 8 (Mines-Ponts PSI 2014) [Solution]

Pour  $t \in [0, 1]$ , on pose  $f_0(t) = 0$  et  $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2}(t - f_n(t)^2)$ . Étudier les convergences simples et uniformes de  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$ .

### Exercice 9 (Centrale PSI 2023) [Solution]

Pour  $x \in [0, 1]$ , on définit  $g$  sur  $[0, 1]$  par  $\forall y \in [0, 1], g(y) = y - \frac{x}{2}y^2$

- Montrer que  $g$  est 1-lipschitzienne et que  $[0, 1]$  est stable par  $g$

2. On définit la suite de fonctions  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $h_0 = 1$  et  $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}h_n\left(\frac{x}{2}\right)^2$

a) Montrer que  $\forall x \in [0, 1], h_n(x) \in [0, 1]$

b) Montrer que  $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left| h_n\left(\frac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right) \right|$

c) En déduire que  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0, 1]$

*indication : prouver  $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left| h_1\left(\frac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right) \right|$ ; pour la CVU, utiliser  $f - h_n = \sum_{k=n}^{+\infty} h_{k+1} - h_k$*

3. Justifier qu'il existe une fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$ , telle que  $f(0) = 1$  et  $\forall x \in [0, 1], f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)^2$

### Exercice 10 (Centrale PSI 2023) [Solution]

1. Justifier l'existence, pour  $x \in \mathbb{R}$ , et déterminer la valeur de  $\varphi(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \cos(t) dt$  et  $\psi(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \sin(t) dt$

2. Déterminer les solutions bornées sur  $\mathbb{R}$  de  $y' - y + \cos(x) = 0$

*indication :  $\varphi$  est une solution de l'équation*

3. On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $f_0 = a \cos + b \sin$  et, pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_{n+1}(x) =$

$e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f_n(t) dt$ . Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément.

*indication : prouver  $f_n = \alpha_n \cos + \beta_n \sin$  puis déterminer  $\alpha_n$  et  $\beta_n$*

### Exercice 11 (Centrale PSI 2022) [Solution]

Soit  $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ . On pose  $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ , et  $S_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (k-nx)^r$ ,

pour  $x \in [0, 1]$ .

1. Citer la formule de Taylor avec reste intégral

2. Montrer que  $S_{n,0}(x) = 1$  et  $S_{n,1}(x) = 0$

On admet  $S_{n,2}(x) = nx(1-x)$

3. Montrer qu'il existe  $M \geq 0$  tel que  $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{Mx(1-x)}{2n}$  pour  $x \in [0, 1]$ .

En déduire que  $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $[0, 1]$

## II Modes de convergence des séries de fonctions

### Exercice 12 [Solution]

Étudier la convergence simple puis la convergence normale des séries de terme général

1.  $u_n(x) = x^a(1-x)^{nb}n^c$  sur  $[0, 1]$  où  $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$ .

2.  $u_n(x) = nx^\alpha e^{-nx^2}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 13 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

1. Convergence simple puis uniforme sur  $[0, 1]$  de la suite  $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$

2. Convergence simple puis uniforme de la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$ .

### Exercice 14 (CCINP PSI 2019) [Solution]

1. Trouver les  $x$  tels que la suite  $(f_n)$ ,  $f_n(x) = xe^{-\sqrt{n|x|}}$  converge; calculer  $\|f_n\|_\infty$ , que peut-on en déduire?

2. Déterminer le domaine de convergence  $D$  de  $\sum f_n$ . La convergence est-elle absolue sur  $D$ ? Normale? Que dire de la convergence sur  $\mathbb{R} \setminus ]-a, a[$ , avec  $a > 0$ ?

### Exercice 15 (IMT PSI 2019) [Solution]

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $g_n(x) = \sin(x) \cos^n(x)$  et  $f_n(x) = xg_n(x)$  avec  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

1. Étudier les variations de  $g_n$ .

2. Étudier la suite  $(f_n)$  puis la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$ .

### Exercice 16 (Mines-Ponts MP 2010) [Solution]

1. Si  $\alpha > 0$ , on pose  $u_n(x) = \sin^\alpha x \cos^n x$ ; montrer que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge simplement sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et calculer sa somme.

2. À quelle condition sur  $\alpha$  y a-t-il convergence normale ? uniforme ?

**Exercice 17 (CCP PSI 2016) [Solution]**

Soit  $f_n(x) = x^n \frac{e^{-x}}{n!}$  pour  $x \geq 0$ .

1. Montrer la convergence simple puis uniforme de la suite  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. Étudier la série  $\sum f_n$ .

**Exercice 18 (CCINP PSI 2019) [Solution]**

1. Montrer que, pour  $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ,  $|\ln(1+t) - t| \leq 2t^2$
2. Étudier la convergence simple et uniforme de  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 19 [Solution]**

on pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x \ln n}$ .

1. Étudier la convergence simple de  $\sum f_n$ .
2. Étudier la convergence normale de  $\sum f_n$ .
3. Étudier la convergence uniforme de  $\sum f_n$  sur  $[a, +\infty[ \subset ]1, +\infty[$ . Qu'en déduire pour la somme  $f$  de cette série ?
4. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left|f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right|$ . Que dire de la convergence uniforme de  $\sum f_n$  sur  $]1, +\infty[$  ?  
*indication : que dire de  $\|f_n\|_\infty$  si  $\sum f_n$  converge uniformément ?*

### III Continuité, limites, équivalents de sommes de séries

**Exercice 20 (Mines-Télécom PSI 2018) [Solution]**

1. Montrer que pour  $x \in I = ]-1, +\infty[$ ,  $S(x) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$  existe.
2. Montrer que  $S$  est continue sur  $I$ .
3. Montrer que  $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$  et en déduire un équivalent de  $S$  et  $-1^+$ .
4. La série converge-t-elle normalement sur  $I$  ?

**Exercice 21 (CCINP PSI 2021) [Solution]**

Soit  $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^{x+1}}$

1. Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
3. Étudier la continuité de  $f$  en 0.
4. Déterminer la limite de  $f(x) - x$  en  $+\infty$ .

**Exercice 22 (CCINP PSI 2021) [Solution]**

On pose, pour  $n \geq 2$  et  $x > 0$ ,  $u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$ .

1. Déterminer le domaine de convergence de  $\sum u_n(x)$ .
2. Montrer que  $\sum u_n$  ne converge pas normalement sur ce domaine.
3. On pose  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ ; montrer que  $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$  puis montrer que la somme de la série  $\sum u_n$  est continue sur son domaine de convergence.

**Exercice 23 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]**

1. Étudier les convergences simple et uniforme de  $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{-nx}}{1+n}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .  
*indication : utiliser  $R_n(1/n)$ .*

- On note  $f$  la somme de la série précédente ; est-elle continue ? dérivable ?
- Donner ses limites en 0 et  $+\infty$ .

**Exercice 24 (Centrale PSI 2014) [Solution]**

- Existence et continuité sur  $\mathbb{R}^{+*}$  de  $f(x) = \sum_{n \geq 1} x^{2-\alpha} e^{-nx}$  pour  $\alpha \in [0, 2[$ .
- Trouver une CNS pour que la série converge normalement sur  $\mathbb{R}^+$ .
- Si  $\alpha = 1$ , y a-t-il convergence uniforme ?

**Exercice 25 [Solution]**

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $u_k : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par  $u_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [1, k] \\ \left(1 - \frac{k}{t}\right)^t & \text{si } t > k \end{cases}$

- Montrer que  $\sum u_k$  converge normalement sur  $[1, +\infty[$ .
- En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$ . (*indication : commencer poser  $p = n - k$* )

**Exercice 26 [Solution]**

Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(nx)}$

- Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?
- Montrer que  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-x}$ .
- Mêmes questions pour  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\text{sh}^2(nx)}$ .

**Exercice 27 (CCINP PSI 2022) [Solution]**

Pour  $x \neq 0$ , on pose  $f_n(x) = \frac{1}{\text{sh}(nx)}$  et  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  lorsque la série converge.

- Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $f$ .
- Montrer que  $f$  est continue sur  $D$
- Étudier les variations de  $f$
- Montrer que, si  $x > 0$ ,  $f_n(x) \leq \frac{e^{-(n-1)x}}{\text{sh } x}$  et en déduire  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\text{sh } x}$

**Exercice 28 (CCP PSI 2023) [Solution]**

- Ensemble de définition de  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n}$ , en fonction de  $a$  ?
- On suppose  $|a| < 1$  jusqu'à la fin de l'exercice, montrer que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
- Déterminer une relation entre  $S(x+1)$  et  $S(x)$  et en déduire un équivalent de  $S$  en 0.
- Montrer que  $xS(x)$  tend vers  $\frac{1}{1-a}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 29 (CCP PSI 2018) [Solution]**

On note  $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$  et  $f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ .

- Donner l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ .
- Pour  $a > 0$ , montrer la convergence normale sur  $[a, +\infty[$  puis étudier la convergence normale sur  $D$ .
- $f$  est-elle continue sur  $D$  ? Déterminer sa limite en  $+\infty$ .
- Montrer que  $\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt$  et en déduire que  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$ .

**Exercice 30 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]**

Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$

- Déterminer le domaine de définition de  $f$

2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$

3. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^k}\right)$

**Exercice 31 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]**

On donne  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x^2}$ .

1. Domaine de définition et continuité de  $f$ .
2. Donner la limite de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .
3. Donner un équivalent de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .

**Exercice 32 (ENSAM PSI 2018) [Solution]**

Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ .

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
2. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et étudier ses variations.
3. Calculer  $f(x) + f(x+1)$  et en déduire des équivalents de  $f$  en  $0^+$  et  $+\infty$ .  
*indication : pour l'équivalent en  $+\infty$ , encadrer  $f(x)$  avec la valeur de  $f(x) + f(x+1)$  et la monotonie de  $f$ .*

**Exercice 33 (ENSAM PSI 2018) [Solution]**

Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$  lorsque la série converge.

1. Montrer que  $f$  est définie, continue et  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$ .
2. Pour  $x \in [0, 1[$ , on pose  $\varphi_x(t) = \frac{x^t}{1-x^t}$ . Montrer que  $\int_a^b \varphi_x(t) dt = \frac{\ln(1-x^a) - \ln(1-x^b)}{\ln x}$ .  
En déduire la limite et un équivalent de  $f$  en  $1^-$ .

**Exercice 34 (Centrale PSI 2022) [Solution]**

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{1-x^n}$ . On pose :  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ .

1. Montrer que  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$ .
2. On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1[$ ,  $v_n(x) = (1-x)u_n(x)$ . Montrer que  $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$  converge uniformément sur  $[0, 1[$  et en déduire un équivalent de  $f$  en  $1^-$ .

**Exercice 35 (Centrale PSI 2019) [Solution]**

1. Énoncer le théorème d'intégration par parties sur un intervalle  $[a, b]$ ,  $a < b$

2. Trouver une primitive de  $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$

3. a) Trouver le domaine de définition et la valeur de  $I(x) = \int_1^{+\infty} x^{\sqrt{t}} dt$

b) Trouver le domaine de définition et un équivalent en 1 de  $S(x) = \sum_{n \geq 1} x^{\sqrt{n}}$

**Exercice 36 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]**

On note  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ,  $u_n(t) = \frac{t^n \ln(t)}{H_n}$  et  $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$

1. Déterminer le domaine de définition de  $S$  et montrer que la série converge normalement sur tout  $]0, a[ \subset ]0, 1[$ .  
En est-il de même sur  $]0, 1[$  ?

2. Montrer que  $S$  est continue sur  $]0, 1[$ . Est-elle dérivable sur ce même intervalle ?

*indication : montrer que  $|R_n(t)| \leq \frac{-t \ln(t)}{(1-t)H_{n+1}}$  puis montrer qu'elle n'est pas dérivable en 1 (avec le taux d'accroissement) en utilisant  $-\ln(1-t) = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n}$  si  $|t| < 1$ .*

**Exercice 37 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]**

On pose  $f(x) = \sum_{n \geq 1} \ln(1 + e^{-nx})$ .

- Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ .
- Montrer que  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $D$ .
- Montrer que  $f$  admet une limite finie en  $+\infty$  et la déterminer.
- Déterminer un équivalent de  $f$  en  $0^+$  ; on donne  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ .

*indication : trouver l'équivalent en 0 en fonction d'une intégrale, poser  $y = e^{-xt}$ , qui se calculera en utilisant la somme donnée et  $\ln(1+t) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n}$  si  $t \in [0, 1]$ .*

**Exercice 38 (Centrale PSI 2019) [Solution]**

Pour  $x \in [1, +\infty[$ , on pose  $u_0(x) = x$  et  $u_{n+1}(x) = u_n(x) + \frac{1}{u_n(x)}$

- Montrer que  $(u_n(x))$  est bien définie. La suite  $(u_n(x))$  admet-elle une limite ?
- On pose  $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{u_n(x)}$  ; montrer que  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $[1, +\infty[$ .
- Montrer que  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  est continue sur  $[1, +\infty[$  mais que  $\sum f_n$  ne converge pas normalement sur  $[1, +\infty[$ .

**Exercice 39 (CCINP PSI 2022) [Solution]**

Soient  $I = [-a, a]$  et  $\varphi$  continue sur  $I$  pour laquelle il existe  $c > 0$  tel que  $\forall x \in I, |\varphi(x)| \leq C|x|$ . On cherche les fonctions

$f$ , définies sur  $I$ , continues en 0 et telles que  $\begin{cases} f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x) & \text{pour } x \in I \\ f(0) = 0 \end{cases}$

- Montrer que  $S : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$  est définie et continue sur  $I$ .
- Montrer que  $S$  est solution du problème posé
- Montrer que la différence de 2 solutions du problème est nulle ; que peut on en déduire sur l'ensemble des solutions ?
- On suppose  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , montrer que  $f$  est aussi  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

**Exercice 40 (Centrale PC 2015) [Solution]**

Trouver les fonctions  $f$ , continues en 0 telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) - f(x) = \ln(1+x^2)$ .

*indication : justifier que  $f(x) - f(0) = \sum_{n \geq 0} (f(2^{-n}x) - f(2^{-(n+1)}x))$  lorsque  $f$  est continue en 0.*

## IV Dérivabilité des séries de fonctions

**Exercice 41 (CCINP PSI 2018) [Solution]**

- Déterminer le domaine de définition de  $f(x) = \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$
- Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
- Calculer  $f(1)$  et trouver un équivalent de  $f(p)$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ , lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 42 (IMT PSI 2019) [Solution]**

- Donner le domaine de définition de  $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ .
- Étudier la continuité puis le caractère  $\mathcal{C}^1$  de  $f$ .

**Exercice 43 (CCINP PSI 2022) [Solution]**

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3 + x^2}$

- Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 44 (CCINP PSI 2022) [Solution]**

Soient  $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sh} x}$  et  $f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 nx}$

- $f$  est-elle prolongeable par continuité en 0. Montrer que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$

2. Montrer que  $\sum_{n \geq 1} f_n$  CVS sur  $\mathbb{R}^*$ ; on pose  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ .

3. Montrer que  $S$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

4. Exprimer  $f_n$  à l'aide de  $f$  et en déduire un équivalent simple de  $S$  en 0.

5. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 45 (Mines-Télécom PSI 2021) [Solution]**

Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n [\sqrt{n+x} - \sqrt{n}]$  pour  $x \geq 0$ .

1. Montrer que  $f$  est bien définie.

2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ; étudier ses variations.

3. Montrer que  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ .

*indication : raisonner par l'absurde et commencer par vérifier que  $f(x) \geq S_{2n+1}(x)$  avant de séparer les termes pairs/impairs.*

**Exercice 46 (CCINP PSI 2023) [Solution]**

Pour  $n \geq 1$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $u_n(x) = \frac{\ln(1+nx^2)}{n^2}$  et  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ .

1. Montrer que  $S$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

3. Montrer que  $\sum u_n$  ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}$ .

4. Calculer  $S(0)$  et  $\lim_{+\infty} S$ .

5. Montrer que  $S$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

6. Par une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent en 0 de  $S'$ .

**Exercice 47 (CCINP PSI 2022) [Solution]**

Soient  $u_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2 \ln(1+n)}$  et  $S(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$ .

1. Trouver le domaine de définition  $D$  de  $S$ .

2. Montrer que  $S$  est continue sur  $D$ .

3. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que  $\sum u'_n(x)$  converge uniformément sur  $D$ .

4. Montrer que  $S$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $D$ .

**Exercice 48 (Mines-Télécom PSI 2021) [Solution]**

1. Déterminer le domaine de convergence de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$  avec  $u_n(x) = \frac{1}{n^2x+n}$ .

2. Montrer que sa somme  $S$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

3. Montrer que, pour  $x > 0$ , on a  $\left| S(x) - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2x} \right| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3x^2}$  et en déduire un équivalent de  $S$  en  $+\infty$ .

**Exercice 49 [Solution]**

On note  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

2.  $f$  est-elle continue sur son ensemble de définition?

3. Déterminer  $\lim_{+\infty} f$ .

4. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

5. Montrer que  $f$  n'est pas dérivable en 0.

**Exercice 50 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]**

1. Déterminer le domaine de définition de  $f(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$ .

2. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$
3.  $f$  est-elle dérivable en 0? Continue en 0?

**Exercice 51 (CCINP PSI 2021) [Solution]**

Pour  $x \geq 0$  et  $n \geq 1$ , on pose  $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$  et  $S(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$

1. Montrer que  $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$  converge pour  $x \geq 0$ .
2.  $S$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}^+$ ?
3. Montrer que  $S$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
4. Calculer  $S(x)$  pour  $x \geq 0$ .

**Exercice 52 (CCP PSI 2012) [Solution]**

1. Montrer que le domaine de définition de  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$  est  $\mathbb{R}^+$ .
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
3. Calculer  $f''(x)$  puis  $f'(x)$  pour  $x > 0$ .
4. Montrer que  $f$  est non dérivable en 0.
5. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , on a  $f(x) = f(0) + \int_0^x \ln(1 - e^{-t}) dt$

**Exercice 53 (Mines-Ponts PSI 2013) [Solution]**

1. Donner le domaine de de définition  $D$  de  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + x^n)$
2. Montrer que  $f$  est continue et dérivable sur  $D$ .  
En déduire un équivalent de  $f$  en 0.
3. Montrer que, pour  $x \in [0, 1[$ ,  $\phi : t \mapsto \ln(1 + x^t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et en déduire un équivalent de  $f$  en 1.

**Exercice 54 (Centrale PSI 2014) [Solution]**

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + n^2 x}$ .
2. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
3. Montrer que  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x$  et déterminer un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .

**Exercice 55 (Mines-Ponts PSI 2016) [Solution]**

Soit  $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n(1 + nx^2)}$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ ; étudier sa continuité et sa dérivabilité.
2. Donner un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .

**Exercice 56 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]**

Pour  $x > 1$ , on pose  $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$  et  $\eta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$

1. Montrer que  $\zeta$  et  $\eta$  sont définies sur  $]1, +\infty[$ .
2. Montrer que  $\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$  pour  $x > 1$ .
3. Montrer que  $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$ .
4. Montrer que  $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{1}{x-1} + \gamma + o(x-1)$  où  $\gamma = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\eta'(1)}{\ln 2}$ .  
*indication : montrer que  $\eta$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  puis utiliser Taylor-Young et vérifier que  $\eta(1) = \ln(2)$ .*
5. Montrer que  $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$ .

*indication : il s'agit de trouver une expression de  $\eta'(1)$  : poser  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$ , montrer que  $\left( u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \right)$  CV et*

*relier  $\eta'(1)$  avec  $u_n$  et  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  en séparant les termes pairs et impairs.*

**Exercice 57 (ICNA PSI 2017) [Solution]**

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ .
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $\zeta$ .
3. Montrer que  $\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ .

**Exercice 58 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]**

1. Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + nx}$  et montrer que  $f$  est continue sur  $D$ .
2. Montrer que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et donner  $f'(x)$  sous forme d'une somme.
3. Calculer  $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis déterminer un équivalent de  $f(x) - l$  en  $+\infty$ .

**Exercice 59 (AADN PSI 2009) [Solution]**

1. Domaine de définition et limite en 0 de  $f(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + x^2}$ .  
*indication : étudier  $f(x) - f(0)$ .*
2. Montrer que  $f$  est  $C^\infty$ .  
*indication : décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ .*

**Exercice 60 (Centrale PSI 2009) [Solution]**

1. Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{2n-1}}{1 - x^{2n}}$ .
2.  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $D$ ? Etudier ses variations.

**Exercice 61 (ENSEA-ENSIIE PC 2014) [Solution]**

On pose  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t - t^2) dt$

1. Montrer que  $\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], 0 \leq u_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$
2. Montrer que  $\sum u_n$  converge sur  $[0, 1]$  vers une fonction  $u$  dérivable telle que  $u'(x) = u(x - x^2)$ .

**Exercice 62 (ENSAM PSI 2014) [Solution]**

Soit  $f$  continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $a > 0$ .

1. Montrer que  $(f_n)$  définie par  $f_0 = f$  et  $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$  est bien définie.
2. Montrer que  $f_n$  est de classe  $C^n$  sur  $\mathbb{R}$ , calculer ses dérivées successives et leur valeur en  $a$ . En déduire une expression de  $f_n$  à l'aide d'une intégrale de  $f$ .
3. Montrer l'existence de  $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  et donner une expression de  $g$  en fonction de  $f$ . (*indication :  $x$  est fixé*)
4. Montrer que  $g$  est solution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et en donner les solutions.

**Exercice 63 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]**

Soit  $f_0 \in C^1([a, b])$ . On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [a, b]$ ,  $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ .

1. On suppose que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[a, b]$  et que les hypothèses du théorème de dérivation des séries de fonctions sont satisfaites. Calculer  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  en fonction de  $f_0$ .
2. Montrer que les hypothèses précédentes sont vérifiées si  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$
3. Calculer  $S$  lorsque  $f_0(x) = \sin(2x)$  et  $[a, b] = [0, 1]$

## V Intégration par convergence uniforme

**Exercice 64** [Solution]

Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_n = \int_0^1 \frac{ne^{-t} + t^2}{n+t} dt$ .

**Exercice 65** (Mines-Ponts PSI 2013) [Solution]

On cherche  $r = \frac{a}{b}$  avec  $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $e^r = \frac{p}{q}$  avec  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . On pose  $P_n = \frac{1}{n!} X^n (bX - a)^n$ .

1. Montrer que  $P_n^{(k)}(0)$  et  $P_n^{(k)}(r)$  sont des entiers pour  $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .
2. Montrer que  $q \int_0^r P_n(t) e^t dt$  est un entier et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(t) e^t dt = 0$ . Conclure.

**Exercice 66** (ENSIIE PSI 2009) [Solution]

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  définie par  $f_1 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)^2 + t^2} dt$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ . En déduire que la suite  $(f_n)$  admet une limite simple  $f$  puis que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y' = \sqrt{y^2 + t^2}$  avec  $y(0) = 0$ .

**Exercice 67** (Mines-Télécom PSI 2019) [Solution]

Soient  $(\alpha_n)$  telle que  $\sum \alpha_n$  est absolument convergente,  $\omega_n \neq 0$  et  $u_n(x) = \alpha_n \cos(2\pi\omega_n x)$

1. Montrer que  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  est définie et continue sur  $[0, 1]$ .
2. Calculer  $\int_0^1 f(t) dt$ .
3. Justifier que  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}\right)$  converge quand  $N$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 68** (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $y > 0$ , on pose  $f(x, y) = \int_0^1 t^{xt^y} dt$ .

1. Justifier l'existence de  $f(x, y)$ .
2. On pose  $f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n!} (xt^y \ln t)^n & \text{si } t \in ]0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Montrer que  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[0, 1]$ .

3. En déduire  $\int_0^1 t^t dt = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$ .

**Exercice 69** (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On suppose qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$ . On pose  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) =$

$$\varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} [\varphi(x+n) + \varphi(x-n)].$$

1. Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f$  est 1-périodique.

3. Soit  $g$  une fonction 1-périodique continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $\varphi g$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et que :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ .

## VI Intégrations par convergence dominée

### Exercice 70 [Solution]

Déterminer la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{t}{n}}{1+t^2} dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-\frac{1}{n}} dx \quad ; \quad \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx \quad ; \quad \int_0^1 x^n \frac{\ln x}{(1-x^2)^{1/4}} dx$$

### Exercice 71 (CCP MP 2014) [Solution]

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+x^n e^{-x}}$ .

### Exercice 72 (CCP PSI 2010) [Solution]

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Étudier l'intégrabilité sur  $\mathbb{R}^{+*}$  de  $f : t \mapsto \frac{\arctan t}{t^\alpha}$ .
2. Existence de  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^{3/2} + t^n} dt$  et limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 73 (CCINP PSI 2018) [Solution]

1. Montrer que  $|\sin x| \leq |x|$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
2. Montrer l'existence de  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)} dt$
3. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$  et en trouver un équivalent.

### Exercice 74 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Soit  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4 x^3} dx$ , pour  $n \geq 1$ .

1. Justifier l'existence de  $I_n$ .
2. Montrer que  $I_n = \frac{1}{n^{5/3}} J_n$  avec  $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3} \sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3} dt$ .
3. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt$
4. Montrer, par changement de variable que  $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt$ .
5. En déduire  $2K = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3} dt = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
6. Conclure  $I_n \sim \frac{2\pi}{3\sqrt{3}n^{5/3}}$

### Exercice 75 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soit  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x+n)}{\sqrt{x}(n+x)} dx$

1. Justifier l'existence de  $I_n$ , pour  $n \geq 1$
2. Déterminer la limite de  $(I_n)_{n \geq 1}$
3. Calculer  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(n+x)}$
4. Déterminer un équivalent de  $I_n$ .

### Exercice 76 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(nt)}{(1+n^4 t^2)^2} dt$ .

1. Justifier l'existence de  $I_n$
2. Limite et équivalent de  $I_n$  ?

### Exercice 77 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

1. Montrer que  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx$  est définie.
2. Trouver la limite et un équivalent de  $I_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 78 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]**

Soit  $I_n = \int_0^1 \ln(x) \ln(1 - x^n) dx$ , pour  $n \geq 1$ .

1. Justifier l'existence de  $I_n$ .
2. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
3. Déterminer un équivalent de  $I_n$

**Exercice 79 (CCP PSI 2018) [Solution]**

1. Résoudre l'équation  $\operatorname{sh}(x) = 1$ .
2. On pose  $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$  et  $I_n = \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^n dt$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
3. Montrer que  $nI_n + (n - 1)I_{n-2} = \sqrt{2}$  pour  $n \geq 2$ .
4. Déterminer un équivalent de  $I_n$ .

**Exercice 80 (CCINP PSI 2019) [Solution]**

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^n t}$

1. Montrer que  $I_n(x)$  existe pour  $n \in \mathbb{N}$
2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de  $(I_n)$
3. Trouver une relation entre  $I_n$  et  $I_{n+2}$
4. En déduire la valeur de  $I = \int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^3 t} dt$

**Exercice 81 (CCP PSI 2013) [Solution]**

Pour  $n > 0$  et  $x > 0$ , on pose  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx + x^2}$

1. Montrer que les  $f_n$  sont prolongeables par continuité en 0 et intégrables sur  $[0, +\infty[$ .
2. Montrer que la suite de terme général  $u_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 82 (CCP PSI 2017) [Solution]**

On pose  $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)$  si  $t \in ]0, n]$  et  $f_n(t) = 0$  si  $t > n$ .

1. Montrer que  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et déterminer sa limite.
2. Montrer que  $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(t) dt$ .
3. Sachant que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ , montrer que  $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt = -\gamma$ . On pourra faire le changement de variable  $t = nu$  puis une IPP.

**Exercice 83 (CCP PSI 2018) [Solution]**

Pour  $n \geq 1$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ , on pose  $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sin(x) & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Étudier la convergence simple de  $(f_n)$ .
2. Étudier la convergence de  $(v_n)_{n \geq 1}$ , où  $v_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ .
3. a) Étudier les variations de  $x \mapsto \ln(1 + x) - x$ .  
b) En déduire que  $(f_n)$  converge uniformément.  
*indication : montrer que  $|f_n(x) - f(x)| \leq 1 - e^{n^{1/4} - n \ln(1 - n^{-3/4})}$  si  $x \in [0, n^{1/4}]$  et  $|f_n(x) - f(x)| \leq 2e^{-x}$  si  $x \geq n^{1/4}$*

**Exercice 84 (CCINP PSI 2023) [Solution]**

Soient  $f_n(x) = \frac{(1 + \frac{x}{n})^n - 1}{x}$  et  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

1. Montrer que  $I_n$  est bien définie.

2. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \times k!}$

indication : chercher la limite de  $I_n$  sous forme d'une intégrale pour commencer

**Exercice 85 (Centrale PSI 2011)** [Solution]

1. Pour quels entiers  $n$ ,  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\sin t + t^n} dt$  est-elle définie ?

2. Donner la limite  $I$  de  $(I_n)$  sous forme d'une intégrale.

3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(I_n - I)$  (on pourra faire un changement de variable).

**Exercice 86 (Centrale PSI 2007)** [Solution]

cours : changement de variable.

Application : équivalent en  $+\infty$  de  $u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$  où  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$  et  $f(1) \neq 0$ .

**Exercice 87 (CCP PSI 2013)** [Solution]

Déterminer la limite de  $n \int_0^1 t^n f(t) dt$  où  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 88 (Mines-Ponts MP 2011)** [Solution]

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{x+1}{x^n e^x + x^2 + x + 1} dx$ .

**Exercice 89 (ENTPE-EIVP PC 2014)** [Solution]

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} dx$

**Exercice 90 (Mines-Ponts PSI 2013)** [Solution]

Étudier la convergence de la suite de terme général  $u_n = \int_1^{+\infty} \exp(-x^n) dx$ , puis la convergence de la série de terme général  $u_n$ .

**Exercice 91 (Centrale PSI 2022)** [Solution]

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n x}{x^2} dx$

1. Justifier l'existence de  $u_n$  pour  $n \geq 1$

2. Montrer que  $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n$  avec  $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n \left( \sqrt{\frac{2t}{n}} \right)}{t\sqrt{t}} dt$ .

3. Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que si  $t \in [0, \alpha]$  alors  $\ln(\cos t) \geq -2t^2$

4. Déterminer un équivalent de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ; on donne  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}$ .

**Exercice 92 (ENSEA PSI 2016)** [Solution]

1. Énoncer le théorème de convergence dominée.

2. Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites réelles bornées telles qu'il existe  $c < d$  pour lesquels  $\forall x \in [c, d], (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  tend vers 0.

Montrer qu'il existe  $\varphi_n$  tel que  $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(nx + \varphi_n)$ .

3. Calculer  $I_n = \int_c^d (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))^2 dx$  et montrer qu'à partir d'un certain rang on a  $I_n \geq \frac{(a_n^2 + b_n^2)(d - c)}{4}$ .

4. Conclure que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  tendent vers 0.

## VII Intégration terme à terme

**Exercice 93 (ENSAM PSI 2011)** [Solution]

1. Convergence de la série de terme général  $(-1)^n a_n$  où  $a_n = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} t^n dt$  et calcul de sa somme.

2. Etablir une relation entre  $a_n$  et  $a_{n+2}$ .

3. Convergence de la série de terme général  $a_n$  et calcul de la somme.

**Exercice 94 (Mines-Ponts PSI 2010) [Solution]**

Justifier la convergence de  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} x} dx$  et expression sous forme d'une série.

**Exercice 95 (CCP PSI 2015) [Solution]**

1. Montrer que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}$  et  $I = \int_0^1 x^x dx$  existent.

2. Pour  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ , on pose  $f_{n,p}(t) = t^p (\ln t)^n$ . Calculer  $\int_0^1 f_{n,p}(t) dt$

3. Montrer que  $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$ .

**Exercice 96 (Mines-Ponts PSI 2021) [Solution]**

Soit  $x > 0$ ; on pose  $f(x) = \int_0^1 t^{t^x} dt$ . Montrer que  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(xn+1)^{n+1}}$

**Exercice 97 (Mines-Ponts PSI 2007) [Solution]**

Pour  $a > 0$  et  $b > 0$ , montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+b} = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a} dt$ .

**Exercice 98 (ENTPE-EIVP PC 2015) [Solution]**

Calculer  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x) dx$  de deux façons différentes et en déduire la valeur de  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ .

**Exercice 99 (CCP PSI 2006) [Solution]**

Montrer que  $\frac{1}{x^\alpha} \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$  existe pour  $x \in ]0, 1[$  et  $\alpha > 0$ . En déduire  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}$

**Exercice 100 (CCINP PSI 2022) [Solution]**

Soit  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$ . On donne  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. Montrer que  $I$  existe

2. Montrer que  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

**Exercice 101 (CCINP PSI 2018) [Solution]**

Montrer que  $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$  existe et vaut  $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{n^3}$

**Exercice 102 (CCINP PSI 2022) [Solution]**

1. Montrer l'existence de  $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx$

2. Montrer que  $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$

**Exercice 103 (CCINP PSI 2023) [Solution]**

Soit  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t} dt$ .

1. Montrer que  $I$  converge.

2. Montrer que  $\forall t \in ]0, +\infty[$ ,  $\frac{\sin t}{\operatorname{sh} t} = 2e^{-t} \sin t \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt}$ .

3. Montrer que  $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2 + 1}$ .

*indication : utiliser  $|\sin(t)| \leq t$  pour appliquer le TITT*

4. Montrer que :  $\frac{\pi}{4} \leq I \leq 1 + \frac{\pi}{4}$ .

*indication : comparaison série/intégrale*

**Exercice 104 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]**

1. Montrer l'existence de  $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln(t)}{t^2} dt$ .

2. Montrer que  $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)^2}$  et en déduire la valeur de  $I$  à l'aide de constantes usuelles.

$$\text{indication : } -\ln(1-u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n} \text{ si } |u| < 1$$

**Exercice 105 (Centrale PSI 2019) [Solution]**

1. Soient  $(u_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . On pose  $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$  et  $a_n = b_{n+1} - b_n$ .

Montrer que  $\sum a_n$  converge et en déduire qu'il existe  $\lambda > 0$  tel que  $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$ .

2. Pour  $x \in ]-1, 0[$ , on pose  $f(x) = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^x}{t} dt$ .

a) Justifier que  $f$  est bien définie.

b) À l'aide de 1, montrer que  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x(x-1)\dots(x-n+1)}{n \times n!}$

$$\text{indication : } (1-t)^x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} t^n \text{ si } |t| < 1$$

**Exercice 106 (ENSAM PSI 2015) [Solution]**

1. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , justifier l'existence de  $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1} dx$ .

2. Montrer que  $I(\alpha) = \sum_{n \geq 1} \frac{a}{b+n^2}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

3. En déduire un équivalent de  $I(\alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 107 (CCINP PSI 2018) [Solution]**

Soit  $(a_n)$  une suite complexe telle que  $\sum |a_n|$  converge.

1. Montrer que  $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

2. Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et calculer  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ .

**Exercice 108 (CCINP PSI 2019) [Solution]**

1. Montrer que  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt$  existe.

2. Montrer que  $I = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{1+n^2}$

**Exercice 109 (Mines-Ponts PSI 20121) [Solution]**

1. Étudier la convergence et la convergence absolue de  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}$

2. Montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} \cos(xt) dt$

**Exercice 110 (ENSEA PSI 2018) [Solution]**

Nature et somme de la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  avec  $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$ .

**Exercice 111 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]**

1. Montrer que  $\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt$

2. Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

**Exercice 112 (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]**

1. Déterminer le domaine de convergence de  $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$ .

2. Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et calculer cette intégrale.

*indication : pour le calcul de l'intégrale, on a calculé la somme de la série dans le chapitre sur les séries.*

**Exercice 113 (AADN PSI 2012) [Solution]**

1. Montrer que la série de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par  $f_n(t) = t^n \sin(\pi t)$  converge simplement et déterminer la somme de  $\sum_{n \geq 0} f_n$  notée  $F$ . Y a-t-il convergence uniforme ?

2. Montrer que  $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$ .

**Exercice 114 (CCP PSI 2018) [Solution]**

Soit  $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$ .

1. Montrer que  $\sum u_n$  converge.

*indication : montrer que  $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  soit par IPP, soit en vérifiant que  $\sin(\pi x) \leq \pi(1-x)$*

2. Montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$ .

**Exercice 115 (TPE-EIVP PSI 2018) [Solution]**

Existence et valeur de  $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$  sachant que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**Exercice 116 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^+)$ . On pose  $u_n = \int_0^1 f(t)t^n dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $I = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} dt$ .

Montrer que  $I$  et  $\sum u_n$  sont de même nature . Lien entre les deux en cas de convergence ?

## Solutions

**Exercice 1** [sujet] 1.  $(f_n)$  CS vers 0 sur  $\mathbb{R}$ , uniformément sur  $[-a, a]$  car  $\|f_n\|_{\infty, [-a, a]} = f_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  mais pas sur  $\mathbb{R}^+$  car  $f_n(n) = \frac{\pi}{4}$ .

2. Si  $a > 1$ ,  $(f_n)$  CS sur  $I$  vers  $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  donc pas de CU sur  $I$  ( $f_n$  est continue et pas  $f$ ); par contre

$\|f_n - 1\|_{\infty, [\alpha, 0]} = \frac{2}{1 + n^a \sin \frac{\alpha}{n}}$  donc CU sur  $[\alpha, \pi/2]$  si  $\alpha > 0$ .

Si  $a = 1$  alors  $(f_n)$  CS vers  $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$  puis  $\left| f_n(x) - \frac{x-1}{x+1} \right| \leq x - n \sin \frac{x}{n} \leq \frac{\pi}{2} - n \sin \frac{\pi}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc CU sur  $I$ .

Si  $a < 1$  alors  $(f_n)$  CS vers  $-1$  et  $|f_n(x) + 1| \leq 2n^a \sin(x/n) \leq 2n^a \sin \frac{\pi}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc CU sur  $I$ .

**Exercice 2** [sujet]  $(f_n)$  CS vers 0; si  $x \geq a$  alors  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1 + n^2 a^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc CU sur  $[a, +\infty[$  et  $(f_n(1/n))$  ne tend pas vers 0 donc pas CU sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Exercice 3** [sujet] Si  $x > 0$  alors  $f_n(x) = \frac{2n^2 x^2 + nx + 1}{2n^2 x + 1} \sin^2 \frac{\pi}{x}$  à partir d'un certain rang donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = x \sin^2 \frac{\pi}{x}$  et  $f_n(0) = 0$ . Si  $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ ,  $|f_n(x) - f(x)| = x \sin^2 \frac{\pi}{x} \leq x \leq \frac{1}{n}$  et si  $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ ,  $|f_n(x) - f(x)| = \frac{|(n+1)x + 1|}{2n^2 x + 1} \sin^2 \frac{\pi}{x} \leq \frac{(n+1)x + 1}{2n^2 x + 1} \stackrel{\text{étude fct}}{\leq} \frac{1}{n}$  donc  $\|f_n - f\|_{\infty} \leq \frac{1}{n}$  donc CVU sur  $[0, 1]$

**Exercice 4** [sujet] 1.  $(f_n)$  CS vers  $\cos$  sur  $\mathbb{R}$

2. si  $x \in [-a, a]$  alors  $|f_n(x) - \cos(x)| = 2 \left| \sin \frac{x}{n} \sin \left(2 + \frac{1}{n}\right) x \right| \leq \frac{2a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc CU sur  $[-a, a]$ ; par contre  $|f(n\pi) - \cos(n\pi)| = 2$  donc pas de CU sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 5** [sujet] 1.  $f(x) = x$  puis, pour  $x \geq 0$ ,  $|f_n(x) - x| = \frac{x}{1 + nx} \leq \frac{1}{n}$  alors que si  $x < 0$ ,  $|f_n(x) - x| = \frac{-x}{1 + nx^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$  (étude de fct) donc CVU sur  $\mathbb{R}$ .

2. si  $x > 0$ ,  $f'_n(x) = \frac{nx(2x + nx)}{(1 + nx)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ ,  $f'_n(0) = 0$  et pour  $x < 0$ ,  $f'_n(x) = \frac{nx^2(3 + nx^2)}{(1 + nx^2)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ ; pas de CVU sur  $[-1, 1]$  car les  $f'_n$  sont continues en 0 et pas la limite simple de  $f'_n$

**Exercice 6** [sujet] 1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2.  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1 + n^2 a^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc CVUTS de  $]0, 1]$

3.  $f$  n'est plus continue en 0

4.  $\lim u_n = 0$  par TCD avec  $|f_n(x)| \leq 1$

5.  $u_n \geq e^{-1} \int_0^1 \frac{dx}{1 + n^2 x^2} = \frac{e^{-1}}{n} \arctan(n) \sim \frac{e^{-1}}{n} \frac{\pi}{2}$  donc (SATP)  $\sum u_n$  DVG

**Exercice 7** [sujet] 1.  $|g'_n(t)| = \frac{t}{n} e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{e^t}{t}$  puis par IAF,  $|g(t) - g(0)| \leq \frac{te^t}{n}$

2. On a  $\left| I_n(x) - \int_0^x 1 dt \right| \leq \int_0^x \left| e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - 1 \right| dt \leq \frac{1}{n} \int_0^x te^t dt \leq \frac{1}{n} \int_0^1 te^t dt$  donc  $(f_n)$  CU sur  $[0, 1]$  vers  $f : x \mapsto \int_0^x dt = x$ .

**Exercice 8** [sujet] Si  $(f_n(x))$  converge vers  $f(x)$  alors  $f(x) = \sqrt{x}$  (car  $f_n(x) \geq 0$ ) puis  $|f_{n+1}(x) - \sqrt{x}| = |f_n(x) - \sqrt{x}| \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + f_n(x))\right) \leq \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) |f_n(x) - \sqrt{x}|$  ce qui donne par récurrence  $|f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n = g_n(\sqrt{x})$ ; on étudie  $g_n(t) = t \left(1 - \frac{t}{2}\right)^n$  pour trouver  $\|g_n\|_{\infty} = g_n\left(\frac{2}{n+1}\right) \leq \frac{2}{n+1}$  donc  $\|f_n - \sqrt{\cdot}\|_{\infty} \leq \|g_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $(f_n)$  CU sur  $[0, 1]$  vers la fonction racine carrée.

**Exercice 9** [sujet] 1. on vérifie  $g'(y) = 1 - xy \in [0, 1]$  donc (IAF)  $g$  est 1-lip et  $[0, 1]$  est stable (variations)

2. a)  $h_0 \in [0, 1]$  et  $h_{n+1}(x) = g\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ , d'où le résultat par récurrence

b)  $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| = \left|g\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right) - g\left(h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right| \stackrel{1\text{-lip}}{\leq} \left|h_n\left(\frac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$

c) On en déduit  $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left|h_1\left(\frac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| = \frac{x}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$  donc  $\sum (h_{n+1}(x) - h_n(x))$  est ACV et  $(h_n)$  CVS vers  $f$  sur  $[0, 1]$ . Puis  $|f(x) - h_n(x)| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} h_{k+1}(x) - h_k(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n}$  donc  $\|f - h_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $(h_n)$  CVU vers  $f$  sur  $[0, 1]$

3. par récurrence, on vérifie que  $h_n$  est continue sur  $[0, 1]$  donc  $f$  aussi par CVU;  $h_n(0) = 1$  donc  $f(0) = 1$  et par passage à la limite dans la relation qui définit  $h_n(x)$ , on trouve l'équation fonctionnelle de  $f$

**Exercice 10** [sujet] 1.  $|e^{-t}e^{it}| = e^{-t}$  est intégrable sur  $[x, +\infty[$  puis on trouve  $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) - \sin(x))$  et  $\psi(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))$

2.  $\varphi(x) = -e^x \int_0^x e^{-t} \cos(t) dt + e^x \varphi(0)$  donc  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\varphi'(x) = \varphi(x) - \cos(x)$ . Les solutions sont  $y(x) = \alpha e^x + \varphi(x)$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On a ensuite  $|\varphi(x)| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = 1$  donc  $\varphi$  est bornée et  $y$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\alpha = 0$

3. Si  $f_n = \alpha_n \cos + \beta_n \sin$  alors  $f_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \cos + \frac{\beta_n - \alpha_n}{2} \sin$ ; on a donc  $\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$  puis  $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ; on vérifie ensuite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = 0$  (calculer la puissance) donc  $(\alpha_n, \beta_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$  et  $\|f_n\|_\infty \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$  et  $(f_n)$  CVU vers 0 sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 11** [sujet] 1. cours

2.  $S_{n,0}$  facile; si  $k \geq 1$ ,  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$  donc  $S_{n,1}(x) = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} - nx S_{n,0}(x) \stackrel{j=k-1}{=} nx(x + 1-x)^{n-1} - nx = 0$

3. on a  $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) - \left(\frac{k}{n} - x\right) f'(x)\right| \leq \frac{M}{2} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2$  avec  $M = \max_{[0,1]} |f''|$  (th des bornes atteintes); en sommant et avec l'inég triangulaire, on obtient  $\left|B_n(f) - S_{n,0}(x)f(x) - \frac{1}{n} S_{n,1}(x)f'(x)\right| \leq \frac{M}{2n^2} S_{n,2}(x)$  qui donne le résultat.  $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$  donc  $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{M}{8n}$  donc  $(B_n(f))$  CVU sur  $[0, 1]$  vers  $f$ .

**Exercice 12** [sujet] 1. On a  $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  pour  $x \in [0, 1]$  fixé donc  $\sum u_n$  CS sur  $[0, 1]$ . De plus  $\|u_n\|_\infty =$

$$u_n\left(\frac{a}{a+nb}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{a}{b}\right)^a e^{-a} \frac{1}{n^{a-c}}$$

donc CN sur  $[0, 1]$  si et seulement si  $a - c > 1$ .

2.  $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc CS sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Puis  $u'_n(x) = n(\alpha - 2nx^2)x^{\alpha-1}e^{-nx^2}$  on discute sur le signe de  $\alpha$  :

— Si  $\alpha < 0$  alors  $u_n$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}^{+*}$  donc la CN n'a même pas de sens.

— Si  $\alpha = 0$  alors  $\|u_n\|_\infty = \lim_{x \rightarrow 0} u_n(x) = n$  donc pas de CN.

— Si  $\alpha > 0$  alors  $\|u_n\|_\infty = u_n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}\right) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\alpha/2} \times \frac{1}{n^{\alpha/2-1}}$  donc CN si et seulement si  $\alpha/2 - 1 > 1$

**Exercice 13** [sujet] 1.  $(f_n)$  CVS vers 0 sur  $[0, 1]$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;  $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{e}$  donc  $(f_n)$  CVU sur  $[0, 1]$  si et seulement si  $\alpha < 1$

2.  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $\sum f_n$  CVS sur  $[0, 1]$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; d'après la première question,  $\sum f_n$  CVN sur  $[0, 1]$  si et seulement si  $\alpha < 0$ . Si  $\alpha \geq 0$  alors  $R_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \geq n \times (n+1)^\alpha \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \sim \frac{n^\alpha}{e^2}$  qui ne tend pas vers 0 donc pas de CVU sur  $[0, 1]$

**Exercice 14** [sujet] 1.  $(f_n)$  CVS sur  $\mathbb{R}$  vers 0;  $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{4}{n}\right) = \frac{4e^{-4}}{n}$  donc CVU sur  $\mathbb{R}$ .

2.  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  si  $x \neq 0$  et  $f_n(0) = 0$  donc ACV sur  $\mathbb{R}$ ; pas de CVN sur  $\mathbb{R}$  avec la première question mais CVN sur  $E = \mathbb{R} \setminus ]-a, a[$  car  $\|f_n\|_{\infty, E} = f_n(a)$  pour  $n$  grand et la CVS en  $a$  donne la CVN sur  $E$ .

**Exercice 15** [sujet] 1.  $g'_n(x) = \cos^n x [(n+1) \cos(x) - n]$  donc  $\|g_n\|_{\infty} = g_n\left(\arccos \frac{n}{n+1}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

2.  $\|f_n\|_{\infty} \leq \frac{\pi}{2} \|g_n\|_{\infty} \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $(f_n)$  CVU sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  vers 0.

$\sum f_n$  CVS sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ;  $S(x) = \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}$  si  $x \neq 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 2$  alors que  $S(0) = 0$  donc pas de CVU sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Il y a par contre CVN sur tout segment de  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  car  $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq b \cos^n(a)$  (car  $\cos$  décroît sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ) et  $|\cos(a)| < 1$ .

**Exercice 16** [sujet] 1. si  $|\cos(x)| < 1$  alors  $\sum u_n(x)$  CV et  $u_n(0) = 0$  donc  $\sum u_n(0)$  CV aussi. Puis  $f(x) =$

$$\sum_{n \geq 0} u_n(x) = \frac{\sin^\alpha x}{1 - \cos(x)} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

2.  $\|u_n\|_{\infty} = u_n\left(\arctan \sqrt{\frac{\alpha}{n}}\right) = \left(\frac{\sqrt{\alpha/n}}{1 + \alpha/n}\right)^\alpha \left(\frac{1}{1 + \alpha/n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha^{\alpha/2} e^{-\alpha} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$  donc CN sur  $[0, \pi/2]$  si et seulement si  $\alpha > 2$ .

Si  $\alpha \leq 2$  alors  $\frac{\sin^\alpha x}{1 - \cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x^{\alpha-2}$  donc  $f$  n'est pas continue en 0; comme les  $u_n$  sont continue en 0, la convergence n'est pas uniforme non plus.

**Exercice 17** [sujet] 1.  $(f_n)$  CS vers 0 sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\|f_n\|_{\infty} = f_n(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $(f_n)$  CVU vers 0 sur  $\mathbb{R}^+$ .

2.  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$  vers 1 et la convergence ne peut pas être uniforme sur  $\mathbb{R}^+$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

On a par contre CN sur tout segment puisque  $\|f_n\|_{\infty, [0, a]} \leq \frac{a^n}{n!}$

**Exercice 18** [sujet] 1. Étudier 2 fonctions

2. On vérifie  $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$  donc  $1 + \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} > 0$  puis  $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right) = \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc la série CVS sur  $\mathbb{R}$ .

On a  $\left|f_n(t) - \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right| \leq 2 \frac{x^2}{n^2(1+x^2)^2}$  car  $\left|\frac{x}{n(1+x^2)}\right| \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2}$ . On en déduit  $\left\|f_n(t) - \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right\|_{\infty} \leq \frac{2}{4n^2} = \frac{1}{2n^2}$ ; de plus  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  CVU sur  $\mathbb{R}$  (la somme est une constante). Comme

$\sum_{k=1}^n f_k(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x}{k(1+x^2)} + \sum_{k=1}^n \left(f_k(t) - \frac{(-1)^k x}{k(1+x^2)}\right)$ , somme d'une série CVU et d'une série CVN sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit  $\sum f_k$  CVU sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 19** [sujet] 1.  $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n \ln x}$  donc  $\sum f_n$  CS sur  $]1, +\infty[$

2. La convergence absolue n'étant vérifiée que sur  $]e^2, +\infty[$ , il ne peut pas y avoir CN sur  $]1, +\infty[$ .

3. Par CSSA, on a  $|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1) \ln x} \leq \frac{1}{(n+1) \ln a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc CU sur  $[a, +\infty[$  si  $a > 1$ ; comme les  $f_n$  sont continues sur  $]1, +\infty[$ , on en déduit que la somme est aussi continue sur  $]1, +\infty[$ .

4.  $\left|f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right| = \exp\left[-\ln(n) \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  donc  $\|f_n\|_{\infty} \geq 1$ . Si on avait CU sur  $]1, +\infty[$ , on aurait  $\|f_n\|_{\infty} = \|R_{n-1} - R_n\|_{\infty} \leq \|R_{n-1}\|_{\infty} + \|R_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , ce qui n'est pas le cas.

**Exercice 20** [sujet] 1.  $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2.  $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} = f_n(b)$  donc CN sur tout segment

3.  $S(x+1) - S(x) = \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} \right) = \frac{1}{1+x}$  par télescopage; on a  $S(x) = -\frac{1}{1+x} + S(x+1) \stackrel{-1}{=} -\frac{1}{1+x} + S(0) + o(1)$  par continuité de  $S$  en 0.
4.  $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$  donc non

**Exercice 21** [sujet] 1.  $D = \mathbb{R}^+$ .

2. CVNTS avec  $|f_n(x)| \leq \frac{b}{n^{1+a}}$  et  $1+a > 0$ .
3.  $f(x) \geq f_1(x) + \int_1^{+\infty} \frac{x}{t^{1+x}} dt = x+1$  donc  $f$  ne tend pas vers  $f(0) = 0$  en 0
4.  $\lim_{+\infty} f - id = 0$  par double limite avec CVN sur  $[1, +\infty[$  car  $f_n$  décroît sur  $\left[ \frac{1}{\ln(n)}, +\infty \right[$ .

**Exercice 22** [sujet] 1. Si  $x > 1$  alors  $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$  donc  $\sum u_n(x)$  CV,  $u_n(1) = 0$  et si  $x < 1$ ,  $\sum u_n(x)$  DVG. Ainsi,  $D_f = [1, +\infty[$ .

2. On a  $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n \ln(n)}$  et  $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$  DV (Bertrand)
3. Si  $x > 1$ ,  $|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^k \ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{\ln(x)/x^{n+1}}{1-1/x} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{\ln(x)}{x-1} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$  car on vérifie que  $\ln(x) \leq x-1$ . L'inégalité finale reste aussi valable si  $x = 1$  donc  $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc la série CU sur  $[1, +\infty[$  et comme les  $u_n$  sont continues sur ce domaine, on en déduit que la somme de cette série est elle aussi continue sur  $[1, +\infty[$ .

**Exercice 23** [sujet] 1. On a  $u_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc CS sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ;  $R_n(1/n) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{e^{-k/n}}{k+1} \geq e^{-2} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1} \geq e^{-2} \frac{n}{2n+1}$  ne tend pas vers 0 donc  $\|R_n\|_\infty$  non plus.

2. On a  $\|u_n\|_{\infty, [a, b]} \leq u_n(a)$  donc CN sur tout segment de  $\mathbb{R}^{+*}$  puis  $f$  est continue. De même  $\|u'_n(x)\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{ne^{-na}}{1+n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $\sum u'_n$  CN sur tout segment de  $\mathbb{R}^{+*}$  d'où la classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

3. En  $+\infty$ :  $\|u_n\|_{\infty, [1, +\infty[} = u_n(1)$  donc CN sur  $[1, +\infty[$ , le théorème de double limite s'applique et  $\lim_{+\infty} f = 1$ .

En 0:  $f$  est décroissante donc admet une limite  $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ ; si  $l \neq +\infty$  alors  $l \geq f(x) \geq \sum_{n=0}^N u_n(x)$  pour

tout  $N \in \mathbb{N}$ ; en faisant tendre  $x$  vers 0 dans l'inégalité (somme finie), on aurait  $l \geq \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1}$  ce qui est absurde

puisque cette somme partielle de SATP DV vers  $+\infty$ . On a donc  $l = +\infty$ .

**Exercice 24** [sujet] 1. On a  $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq b^{2-\alpha} e^{-na} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc CN sur tout segment de  $\mathbb{R}^{+*}$  et la  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

2.  $\|f_n\|_\infty = u_n\left(\frac{2-\alpha}{n}\right) = (2-\alpha)^{2-\alpha} e^{\alpha-2} \frac{1}{n^{2-\alpha}}$  donc CN sur  $\mathbb{R}^{+*}$  si et seulement si  $\alpha < 1$ .

3. Si  $\alpha = 1$  alors  $f(x) = \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  et comme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$ , le théorème de double limite assure qu'il n'y a pas CU sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

**Exercice 25** [sujet] 1. Comme  $\ln\left(1 - \frac{k}{t}\right) \leq -\frac{k}{t}$  (si  $k < t$ ) donc  $\|u_k\|_\infty \leq e^{-k}$  donc CN sur  $[1, +\infty[$ .

2.  $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{p=1}^{n-1} \left(1 - \frac{p}{n}\right)^n = \sum_{p=1}^{n-1} u_p(n) = f(n)$ ; on calcule alors la limite de  $f$  en  $+\infty$  par le théorème de double

limite:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_k(t) = e^{-k}$  donc  $\lim_{+\infty} f = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k} = \frac{1}{e-1}$ .

**Exercice 26** [sujet] 1. Si  $x > 0$ ,  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-nx}$  donc CS sur  $\mathbb{R}^*$  par imparité

2.  $e^x f(x) = \sum_{n \geq 1} g_n(x)$  avec  $|g_n(x)| \leq \frac{2}{e^{n-1} - 1}$  si  $x \geq 1$  donc  $\sum g_n$  CN sur  $[1, +\infty[$  et le théorème de double limite permet de conclure
3.  $f_n(x)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4e^{-2nx}$  donc CS sur  $\mathbb{R}^*$  aussi. On trouve de même  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 4e^{-2x}$

**Exercice 27** [sujet] 1.  $f_n$  est impaire et, si  $x > 0$ ,  $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-nx}$  et  $0 < e^{-x} < 1$  donc  $D = \mathbb{R}^*$

2. CVNTS de  $\mathbb{R}^{+*}$  avec  $|f_n(x)| \leq f_n(a)$  si  $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$
3.  $f_n$  décroît sur  $\mathbb{R}^{+*}$  donc  $f$  aussi
4.  $\frac{\text{sh } x}{\text{sh } nx} = e^{-(n-1)x} \frac{1 - e^{-2x}}{1 - e^{-2nx}} \leq e^{-(n-1)x}$ . On a alors  $0 \leq f(x) - \frac{1}{\text{sh } x} = \frac{1}{\text{sh } 2x} + \sum_{n=3}^{+\infty} f_n(x) \leq \frac{1}{\text{sh } 2x} + \sum_{n=3}^{+\infty} e^{-(n-1)x} = \frac{1}{\text{sh } 2x} + \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}} \underset{+\infty}{=} o(e^{-x})$  et  $\frac{1}{\text{sh } x} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-x}$

**Exercice 28** [sujet] 1. Si  $|a| < 1$  alors  $\frac{a^n}{x+n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a^n)$  donc CS sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ , idem pour  $a = -1$  par CSSA ; pour  $a = 1$  ou  $|a| > 1$  la série DV

2.  $|u_n(x)| \leq a^n$  si  $n \geq 1$  donc  $\sum_{n \geq 1} u_n$  CN sur  $\mathbb{R}^{+*}$
3.  $aS(x+1) = S(x) - \frac{1}{x}$  donc  $S(x) = aS(x+1) + \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$  car  $S(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} S(1)$  par continuité (donc  $o\left(\frac{1}{x}\right)$ )
4.  $xS(x) - \frac{1}{1-a} = \sum_{n \geq 0} a^n \left( \frac{x}{x+n} - 1 \right) = - \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{1+x/n}$  puis  $\left| \frac{a^n}{1+x/n} \right| \leq a^n$  donc la série CN sur  $[1, +\infty[$  et le théorème de double limite donne la réponse.

**Exercice 29** [sujet] 1. si  $x > 0$ ,  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc CS sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et DVG si  $x \leq 0$ .

2. si  $x \geq a$  alors  $|f_n(x)| \leq f_n(a)$  donc CN sur  $[a, +\infty[$  mais  $\|f_n\|_\infty = 1$  donc pas sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
3.  $f$  est continue par CN sur tout segment et  $\lim_{+\infty} f = 0$  par CN sur  $[1, +\infty[$  et théorème de double limite.
4. Comparaison série intégrale et changement de variable  $u = x\sqrt{t}$  dans  $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt$ .

**Exercice 30** [sujet] 1. si  $x > 0$ ,  $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et DVG si  $x \leq 0$

2.  $|f_n(x)| \leq f_n(a)$  si  $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$
3.  $x^k f(x) = \sum_{n \geq 1} g_n(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = 0$  et  $|g_n(x)| \leq g_n(a) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  pour  $n \geq \left(\frac{k}{a}\right)^2$  dont le th de dble limite donne la réponse

**Exercice 31** [sujet] 1.  $D_f = \mathbb{R}^*$  et  $f$  est paire.  $f$  est continue par CVNTS de  $\mathbb{R}^{+*}$  avec  $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} = f_n(a)$

2. Par double limite,  $\lim_{+\infty} f = 1$  par CVN sur  $[1, +\infty[$  avec  $\|f_n\|_{\infty, [1, +\infty[} = f_n(1)$
3. Par comparaison série intégrale,  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt$  et  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt \stackrel{u=xt}{=} \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$  ce qui donne  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ .
- 4.
- 5.

**Exercice 32** [sujet] 1. CSSA

2.  $|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$  si  $n \geq 1$  donc  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  CN sur  $\mathbb{R}^{+*}$  (et  $f_0$  est aussi  $\mathcal{C}^1$ );  $f'(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$  vérifie le CSSA donc  $f'(x)$  est du signe de  $f'_0(x) \leq 0$
3. Par télescopage  $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$ ; par continuité de  $f$  en 1,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - f(1) + o(x) \sim \frac{1}{x}$  et avec la décroissance de  $f$ , on a  $\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{2(x-1)}$  donc  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$

**Exercice 33** [sujet] 1. Si  $x \in ]-1, 1[$  alors  $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$  décroît vers  $+\infty \sim x^n$  donc  $\sum f_n(x)$  est ACV ; si  $x \in [-a, a] \subset ]-1, 1[$ ,  $|f'_n(x)| \leq \frac{na^{n-1}}{(1-a^n)^2} \sim na^{n-1}$  donc  $\sum f'_n$  CN sur tout segment de  $] -1, 1[$

2. Calcul de l'intégrale facile. Par décroissance de  $\varphi_x$ , on a  $\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq f(x) \leq f_1(x) + \int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt$  donc  $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{\ln x} \sim \frac{\ln(1-x)}{x-1}$

**Exercice 34** [sujet] 1. Si  $x \in ]-1, 1[$  alors  $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x^n$  donc  $\sum f_n(x)$  est ACV ; si  $x \in [-a, a] \subset ]-1, 1[$ ,  $|f'_n(x)| \leq \frac{na^{n-1}}{(1-a^n)^2} \sim na^{n-1}$  donc  $\sum f'_n$  CN sur tout segment de  $] -1, 1[$

2.  $v_n(x) = \frac{(-1)^n}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^n}}$  donc  $\sum v_n(x)$  vérifie le CSSA ; on a donc  $|R_n(x)| \leq |v_{n+1}(x)| \leq |v_{n+1}(1)| = \frac{1}{n+1}$  car  $|v_n|$  est une fonction croissante sur  $[0, 1]$ .

On en déduit, par double limite,  $(1-x)f(x) = \sum_{n \geq 1} v_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$  donc  $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{-\ln 2}{1-x}$

**Exercice 35** [sujet] 1. Cours

2.  $\int_0^x e^{-\sqrt{t}} dt \stackrel{u=\sqrt{t}}{=} 2 \int_0^{\sqrt{x}} ue^{-u} du$  ; on trouve ensuite  $t \mapsto -2e^{-\sqrt{t}}(\sqrt{t} + 1)$

3. a) Si  $x \in ]0, 1[$ ,  $e^{\sqrt{t} \ln(x)} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  alors que si  $x \geq 1$ ,  $x^{\sqrt{t}} \geq 1$  donc  $D_I = ]0, 1[$  puis  $I(x) \stackrel{u=t(\ln x)^2}{=} \frac{1}{(\ln x)^2} \int_{(\ln x)^2}^{+\infty} e^{-\sqrt{u}} du$   
donc  $I(x) = 2 \frac{x(1-\ln x)}{(\ln x)^2}$

b)  $S$  est définie sur  $]0, 1[$  (mêmes arguments que pour  $I$ ) et par comparaison série/intégrale, on trouve  $I(x) \leq S(x) \leq 1 + I(x)$  donc  $S(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{2}{(\ln x)^2} \sim \frac{2}{(1-x)^2}$

**Exercice 36** [sujet] 1.  $u_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(t^n)$  donc CS sur  $[0, 1[$  ;  $u_n(1) = 0$  et DVG si  $t > 1$  car  $H_n \leq n$ . La fonction  $u_n$  est décroissante (et négative) sur  $]0, e^{-1/n}]$  donc si  $n$  est assez grand (dépendant de  $a$ ),  $\|u_n\|_{\infty, ]0, a]} = -u_n(a)$  donc CN sur  $]0, a]$  ; par contre  $\|u_n\|_{\infty} = u_n(e^{-1/n}) = \frac{e^{-1}}{nH_n}$  donc avec  $H_n \sim \ln(n)$ , pas de CN sur  $]0, 1[$  (Bertrand).

2. Si  $t \in ]0, 1[$ ,  $|R_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k |\ln(t)|}{H_{n+1}} = \frac{-\ln(t)t^{n+1}}{H_{n+1}(1-t)} \leq \frac{-\ln(t)t}{H_{n+1}(1-t)}$  ; la fonction  $t \mapsto \frac{-\ln(t)t}{1-t}$  est prolongeable par continuité au segment  $[0, 1]$  donc bornée ;  $|R_n(t)| \leq \frac{C}{H_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  (valable si  $t = 1$ ) aussi donc CU sur  $]0, 1]$  et  $S$  est continue sur  $]0, 1]$ .

$\frac{S(t) - S(1)}{t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \ln(t)}{H_n(t-1)}$  et il existe  $K > 0$  tel que si  $t \in [1/2, 1[$ ,  $\frac{\ln(t)}{t-1} \geq K$  puis  $\frac{S(t) - S(1)}{t-1} \geq K \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{H_n} \geq -K \ln(1-t)$  car  $H_n \leq n$  ; on a donc  $\frac{S(t) - S(1)}{t-1} \xrightarrow{t \rightarrow 1} +\infty$  donc  $S$  n'est pas dérivable en 1.

**Exercice 37** [sujet] 1. Si  $x > 0$   $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-nx}$  donc la série CV car  $|e^{-x}| < 1$  puis DVG pour  $x \leq 0$  et  $D = \mathbb{R}^{+*}$ .

2.  $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} = f_n(a)$  donne la continuité ; toutes les  $f_n$  sont strictement décroissantes donc  $f$  aussi.

3.  $\lim_{+\infty} f = 0$  par double limite avec  $\|f_n\|_{\infty, [1, +\infty[} = f_n(1)$ .

4. Pour  $x > 0$ , on trouve  $\int_1^{+\infty} \ln(1 + e^{-xt}) dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-xt}) dt$  ; on trouve  $\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-xt}) dt \stackrel{y=e^{-xt}}{=} \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ , par CVU sur  $[0, 1]$  car  $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ , et comme  $\left| \int_0^1 \ln(1 + e^{-xt}) dt \right| \leq \ln 2$ , on trouve le même équivalent pour le terme de gauche et  $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi^2}{12x}$

**Exercice 38** [sujet] 1. On prouve par récurrence que  $u_n(x) \geq 1$  donc  $(u_n(x))$  est définie.  $u_{n+1}(x) - u_n(x) \geq 0$  donc  $(u_n(x))$  croît ; si elle CV vers  $\ell$  alors on a  $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$  qui n'a pas de solution donc  $\lim u_n(x) = +\infty$ .

2.  $\sum f_n(x)$  CV par CSSA avec la question 1

3. Par CSSA,  $\|R_n\|_\infty \leq \|f_{n+1}\|_\infty = f_{n+1}(1)$  car  $u_n$  est croissante sur  $[1, +\infty[$  :  $u'_{n+1}(x) = u'_n(x) \frac{u_n(x)^2 - 1}{u_n(x)^2} \geq 0$  par récurrence. La CVS de  $(f_n)$  en 1 donne la CVU de  $\sum f_n$  sur  $[1, +\infty[$  puis la continuité de  $f$  (les  $f_n$  sont continues par récurrence).  
Par contre  $\|f_n\|_\infty = |f_n(1)| = u_{n+1}(1) - u_n(1)$  donc  $\sum f_n(1)$  DV (série télescopique)

**Exercice 39** [sujet] 1.  $\left| \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \leq C \frac{a}{2^n}$  donc CVN sur  $I$

2. facile

3. si  $f$  et  $g$  sont solutions et  $u = f - g$ , on a  $u(x) = u\left(\frac{x}{2}\right) \stackrel{\text{rec}}{=} u\left(\frac{x}{2^n}\right)$  et, comme  $u$  est continue en 0, en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on trouve  $u(x) = u(0) = 0$  donc  $u$  est nulle. Il y a donc une unique solution (qui est  $S$ )

4. si  $u_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$  alors  $|u'_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \|\varphi'\|_\infty$  car  $\varphi'$  est continue donc bornée sur le segment  $I$ .  $\sum u'_n$  CVN sur  $I$  donc  $S$  est  $\mathcal{C}^1$ .

**Exercice 40** [sujet] Si  $f$  est solution alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(2^{-n}x) = f(0)$  par continuité en 0 de  $f$  donc  $f(x) = f(0) + \sum_{n \geq 0} (f(2^{-n}x) - f(2^{-(n+1)}x))$  par télescopage puis  $f(x) = f(0) + \sum_{n \geq 0} \ln\left(1 + \frac{x^2}{4^{n+1}}\right)$ . Réciproquement, toute fonction

de cette forme est solution car continue sur  $\mathbb{R}$  par CN sur tout segment :  $\|f_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{a^2}{4^{n+1}}$ .

**Exercice 41** [sujet] 1.  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$  (si  $x \neq 0$ ) donc  $D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^{-*}$

2.  $\|f'_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \frac{1}{n^2}$  donc  $\sum f'_n$  CVN sur  $\mathbb{R}^+$ .

3.  $f(1) = 1$  par télescopage et  $f(p) = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(p)$ .

**Exercice 42** [sujet] 1.  $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$  donc  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

2.  $f'_n(x) = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$  donc  $\sum f'_n$  CVN sur tout segment de  $\mathbb{R}^{+*}$  car  $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} = f'_n(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 a^2}$  donc  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  ( $f$  est impaire) mais  $f$  n'est pas  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  : si on suppose  $f'$  continue en 0, on a, pour  $x > 0$  et tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $f'(x) \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(1+k^2x^2)}$  puis en faisant tendre  $x$  vers 0 (somme finie et on a supposé  $\lim_0 f' = f'(0)$ ), on aurait  $f'(0) \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$ , pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , ce qui est absurde car  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = +\infty$ .

**Exercice 43** [sujet] 1.  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$

2.  $\sum f'_n$  CVNTS  $[-a, a]$  de  $\mathbb{R}$  car, si  $|x| \leq a$ ,  $|f'_n(x)| \leq \frac{n|\sin nx|}{n^3 + x^2} + \frac{2|x \cos nx|}{(n^3 + x^2)^2} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{2a}{n^6}$

**Exercice 44** [sujet] 1.  $\lim_0 f = 1$  et par convexité de sh sur  $\mathbb{R}^+$ , on a  $\text{sh}(x) \geq x \geq 0$  donc  $0 \leq f(x) \leq 1$  sur  $\mathbb{R}^+$  donc sur  $\mathbb{R}$  par parité.

2.  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

3. On applique le théorème de dérivation avec  $|f'_n(x)| = \frac{2n \text{ch}(nx)}{\text{sh}^3 nx}$  qui décroît (redériver) donc  $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} = \frac{2n \text{ch}(na)}{\text{sh}^3 na} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  si  $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

4.  $f_n(x) = \frac{f(nx)^2}{n^2 x^2}$  donc  $S(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(nx)^2}{n^2}$  et par double limite,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(nx)^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  car  $\left| \frac{f(nx)^2}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$  donc CVN sur  $]0, 1[$

5.  $\frac{1}{f(x)} = \frac{\text{sh} x}{x}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  car DSE sur  $\mathbb{R}$  (utiliser le DSE de sh) et ne s'annule pas car  $f(0) = 1$  donc  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 45** [sujet] 1. Par CSSA avec  $\sqrt{n+x} - \sqrt{n} = \frac{x}{\sqrt{n+x} + \sqrt{n}}$

2. CVUTS sur  $\mathbb{R}^+$  avec CSSA et  $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \sqrt{n+1+b} - \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $\mathcal{C}^0$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n+x}} \text{ donc CVUTS par CSSA avec } \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f'_k(x) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{n+a}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \text{ (pas sur } \mathbb{R}^+ \text{ car } f_0 \text{ n'est pas}$$

dérivable en 0). Puis  $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{\sqrt{n+x}} \geq 0$  tjs par CSSA

3. Si  $f$  ne tend pas vers  $+\infty$  en  $+\infty$  alors  $f$  CV vers  $\ell$  (croissante) et  $f(x) \leq \ell$ . Comme  $R_n(x)$  est du signe de  $f_{n+1}(x)$ ,  $R_{2n+1}(x) \geq 0$  donc  $\ell \geq f(x) = S_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x) \geq S_{2n+1}(x) = \sum_{p=0}^n f_{2p}(x) - f_{2p+1}(x)$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{2p}(x) - f_{2p+1}(x) = \sqrt{2p+1} - \sqrt{2p}$ , en faisant tend  $x$  vers  $+\infty$  (somme finie), on aurait  $\ell \geq \sum_{p=0}^n \sqrt{2p+1} - \sqrt{2p}$ , pour tout  $n$ ; ce qui est absurde puisque c'est la somme partielle d'une SATP DV

**Exercice 46** [sujet] 1.  $u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

2.  $\|u_n\|_{\infty, [-a, a]} = u_n(a)$  donc CVNTS

3.  $u_n$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}$

4.  $S(0) = 0$  et  $S(x) \geq u_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

5.  $u'_n(x) = \frac{2x}{n(1+nx^2)}$  donc  $\|u'_n\|_{\infty} = u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n^{3/2}}$

6.  $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{t(1+tx^2)} dt \leq S'(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{2x}{t(1+tx^2)} dt + u'_1(x)$  donc  $S'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -4x \ln(x)$

**Exercice 47** [sujet] 1. Si  $x \neq 0$  alors  $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$  et  $u_n(0) = 0$  donc  $D = \mathbb{R}$  (et  $S$  est paire).

2.  $\|u_n\|_{\infty, [-a, a]} = u_n(a)$  donc CN sur tout segment de  $\mathbb{R}$ .

3. Pour  $x > 0$ ,  $0 \leq u'_n(x) = \frac{2x}{\ln(1+n)(1+n^2x^2)} \leq \int_{n-1}^n \frac{2x}{\ln(1+t)(1+t^2x^2)} dt$  donc  $\sum u'_n(x)$  CS et  $0 \leq R_n(x) \leq \int_n^{+\infty} \frac{2x}{\ln(1+t)(1+t^2x^2)} dt \leq \frac{1}{\ln(1+n)} \int_n^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2t^2} dt = \frac{2}{\ln(1+n)} \left[ \arctan(xt) \right]_{t=n}^{t=+\infty} \leq \frac{\pi}{\ln(1+n)}$  donc CVU sur  $\mathbb{R}^+$  puis sur  $\mathbb{R}$  par imparité.

4. Facile

**Exercice 48** [sujet] 1.  $f_n(0) = \frac{1}{n}$  et  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{xn^2}$  (signe fixe) donc  $D_S = \mathbb{R} \setminus \{-1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$

2.  $f'_n(x) = \frac{-1}{n(nx+1)^2}$  donc  $\|f'_n\|_{\infty}^{[a, b]} = \frac{1}{n(na+1)^2} \sim \frac{1}{n^3 a^2}$  donc  $\sum f'_n$  CVNTS de  $\mathbb{R}^{+*}$

3.  $\left| S(s) - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 x} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 x (nx+1)} \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$  donc  $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ .

**Exercice 49** [sujet] 1. Si  $x < 0$  alors DVG et sur  $\mathbb{R}^+$ ,  $\|f_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{1+n^2}$  donc CS et CN sur  $\mathbb{R}^{+*}$

2. oui : cf 1.

3. Par double limite et CN sur  $\mathbb{R}^+$ ,  $\lim_{+\infty} f = 1$

4. Si  $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} = \frac{ne^{-na}}{1+n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $\sum f'_n$  CN sur tout segment de  $\mathbb{R}^{+*}$

5.  $-f'(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n^2+1} e^{-nx}$  est décroissante donc admet une limite  $l \in \mathbb{R} \cap +\infty$  en 0; si  $l \neq +\infty$  alors pour tout  $N$ ,

on a  $l \geq \sum_{n=0}^N \frac{n}{n^2+1} e^{-nx}$  puis quand  $x \rightarrow 0$  (somme finie),  $l \geq \sum_{n=0}^N \frac{n}{n^2+1}$  ce qui est absurde puisque la somme

partielle de cette SATP DV vers  $+\infty$ ; on a donc  $\lim_0 f' = -\infty$  et comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , par le TAF, on

obtient que  $\lim_0 \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_0 f' = -\infty$

**Exercice 50** [sujet] 1.  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  si  $x > 0$ ,  $f_n(0) = 0$  et DVG si  $x > 0$  donc  $D_f = \mathbb{R}^+$ .

2. Si  $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{e^{-na}(1+nb)}{\ln n}$  donc  $\sum f'_n$  CVN sur tout segment de  $\mathbb{R}^{+*}$
3.  $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \sum_{n \geq 2} \frac{e^{-nx}}{\ln n}$  est une fonction décroissante donc tend vers  $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  en 0; comme la série

est à termes positifs, on a  $g(x) \geq \sum_{n=2}^N \frac{e^{-nx}}{\ln n}$  pour tout  $N \geq 2$ ; si on suppose  $l$  finie, quand  $x \rightarrow 0$ , on obtient

$l \geq \sum_{n=2}^N \frac{1}{\ln n}$  pour tout  $N$  ce qui est absurde (somme partielle d'une SATP DV). On en déduit  $l = +\infty$  donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

On prouve la CVU de  $\sum f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$  (car il n'y a pas CVN) :  $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k \geq n+1} x e^{-kx} = \frac{1}{\ln(n+1)} \times \frac{x e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} \leq \frac{C}{\ln(n+1)}$  car  $x \mapsto \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}}$  est bornée sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

**Exercice 51** [sujet] 1. CSSA (indispensable pour  $x = 0$ )

2. CVU sur  $\mathbb{R}^+$  car, par CSSA,  $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$
3. CVNTS de  $\sum u'_n$  car  $|u'_n(x)| \leq e^{-na}$  pour  $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$
4. On a aussi  $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$  donc  $S(x) = -\ln(1 - e^{-x}) + C$  pour  $x > 0$ . On trouve ensuite  $C = 0$  car  $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$  par double limite (et CVU sur  $\mathbb{R}^+$ ) et on étend à  $x = 0$  par continuité de  $S$  en 0 (donc  $S(0) = -\ln(2)$ )

**Exercice 52** [sujet] 1. Sur  $\mathbb{R}^+$ ,  $\|f_n\|_{\infty} = \frac{1}{n^2}$  donc CN sur  $\mathbb{R}^+$  et DVG si  $x < 0$ .

2. Continue sur  $\mathbb{R}^+$  par CN sur  $\mathbb{R}^+$ . Puis  $u'_n(x) = \frac{-e^{-nx}}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-nx})$  donc  $\sum f'_n$  CS sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et si  $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\|u''_n\|_{\infty, [a, b]} = e^{-na}$  donc  $\sum u''_n$  CN sur tout segment de  $\mathbb{R}^{+*}$
3.  $f''(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$  puis  $f'(x) = C + \ln(1 - e^{-x})$  avec  $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} f' = 0$  car  $\|f'_n\|_{\infty, [1, +\infty[} = \frac{e^{-n}}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-n})$  donc  $\sum f'_n$  CN sur  $[1, +\infty[$  et le théorème de double limite donne la limite de  $f'$  en  $+\infty$ .
4. On a  $\lim f' = -\infty$  et  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  donc le TAF donne  $f$  non dérivable en 0.
5.  $t \mapsto \ln(1 - e^{-t})$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  (car  $\underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$ ) donc  $x \mapsto \int_0^x \ln(1 - e^{-t}) dt$  est la primitive de  $f'$  qui tend vers 0 en 0, c'est donc  $f - f(0)$ .

**Exercice 53** [sujet] 1. Si  $|x| < 1$  alors  $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x^n$  donc la série est ACV, si  $x \geq 1$ , DVG et si  $x \leq -1$  les termes n'existent pas

2.  $\|u_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq a^n$  donc CN sur tout segment de  $] -1, 1[$  puis continuité sur  $] -1, 1[$ ;  $\|u'_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq n a^{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $\sum u'_n$  CN sur tout segment de  $] -1, 1[$ . On a alors  $f'(0) = 1$  et par Taylor-Young,  $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .
3.  $\phi$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\phi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{t \ln(x)}$  avec  $\ln(x) < 0$  donc  $\phi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . Par comparaison à une intégrale,  $f$  est équivalente en 1 à  $\int_0^{+\infty} \phi(t) dt \stackrel{u=e^{t \ln(x)}}{=} \frac{-1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} dt$

**Exercice 54** [sujet] 1. Si  $x \neq 0$  alors  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1/x}{n^2}$  (signe fixe) donc  $D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

2. Si  $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{n^2 a^2}$  donc  $\sum f'_n$  CN sur tout segment de  $\mathbb{R}^{+*}$
3. Par comparaison avec une intégrale,  $f$  est équivalente à  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2 x}$  en 0 puis calculer cette intégrale.
- En  $+\infty$ ,  $xf(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + n/x}$  qui CN sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par  $\left| \frac{1}{n^2 + n/x} \right| \leq \frac{1}{n^2}$  et le théorème de double limite donnera  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**Exercice 55** [sujet] 1. Si  $x \neq 0$ ,  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{xn^2}$  et  $f_n(0) = 0$  donc CS sur  $\mathbb{R}$  (et impaire). De plus, si  $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{b}{n(1+na^2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b}{an^2}$  donc CN sur tout segment de  $\mathbb{R}^{+*}$  et continuité sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ; de même  $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1+nb^2}{n(1+na^2)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b^2}{a^2n^2}$  donc  $\sum f'_n$  CN sur tout segment de  $\mathbb{R}^{+*}$  et  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

Pour la continuité en 0 : si  $x > 0$ , par comparaison à une intégrale,  $f$  est équivalente en 0 à  $\int_1^{+\infty} \frac{x dt}{t(1+tx^2)}$  calcul  $\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2x \ln(x)$  donc  $f$  est bien continue en 0 mais pas dérivable car le même calcul donne  $\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$

2.  $xf(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1/x^2)}$  et  $\left| \frac{1}{n(n+1/x^2)} \right| \leq \frac{1}{n^2}$  donc CN sur  $[1, +\infty[$  et me théorème de double limite donne  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**Exercice 56** [sujet] 1. Fait en cours

2. Fait en cours (séparer les termes pairs et impairs dans  $\eta(x)$ )

3. Fait en cours

4.  $\eta$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  fait en cours puis  $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{1}{1 - e^{(x-1)\ln 2}} (\eta(1) + (x-1)\eta'(1) + o(x-1))$  donne le résultat en utilisant  $\eta(1) = \ln 2$  (fait en cours, soit avec le développement asymptotique de  $H_n$ , soit à partir du DSE de  $\ln(1+x)$  qui CU sur  $[0, 1]$  grâce au CSSA)

5. Poser  $v_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$ , montrer que  $\sum (v_{n+1} - v_n)$  CV (par DL) donc  $(v_n)$  CV vers un réel  $l$ . En séparant les termes pairs et impairs, on trouve  $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = (\ln 2)H_n + u_n - u_{2n}$  et comme  $u_n = \frac{(\ln n)^2}{2} + l + o(1)$ , on obtient le résultat annoncé.

**Exercice 57** [sujet] 1.  $x > 1$

2. cours

3.  $2^x(\zeta - 1) = \sum_{n \geq 2} \frac{2^x}{n^x}$  CN sur  $[3, +\infty[$  car  $\left| \frac{2^x}{n^x} \right| \leq \frac{1}{(n/2)^3}$  et le théorème de double limite donne  $\zeta - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^x} = e^{-x \ln 2}$  donc  $\zeta - 1$  est intégrable sur  $[2, +\infty[$ . On termine par TITT avec  $\int_2^{+\infty} \left| \frac{1}{n^x} \right| dt = \frac{1}{n^2 \ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

**Exercice 58** [sujet] 1. Si  $x \notin \{0\} \cup \{-1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$  alors  $\sum f_n(x)$  CV par CSSA (vérifié à partir d'un certain rang donc  $D = \mathbb{R}^* \setminus \{-1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$ ). Si  $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ , on a, par CSSA,  $\|R_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{1+na} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , si  $[a, b] \subset ]-\frac{1}{N}, -\frac{1}{N+1}[$  alors le CSSA est vérifié pour  $n \geq N+1$  donc on a  $\|R_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{1+nb}$  et si  $[a, b] \subset ]-\infty, -1[$ , le CSSA donne  $\|R_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{1+nb}$  donc CVU sur tout segment de  $D$ .

2. Sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $\sum f'_n(x)$  vérifie le CSSA donc si  $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\left\| \sum_{k=1+n}^{+\infty} f'_k(x) \right\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{n}{(1+na)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $\sum f'_n$  CVU sur tout segment de  $\mathbb{R}^{+*}$ .

3. Par CVU de  $\sum f_n$  sur  $[1, +\infty[$  (par CSSA et majoration du reste), on a  $\lim_{+\infty} f = 1$  puis  $f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx} \underset{+\infty}{\sim}$

$$\frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ car } \left| f(x) - 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{nx} \right| \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

**Exercice 59** [sujet] 1. La série CV toujours par CSSA (vérifié à partir d'un certain rang mais qui dépend de  $x$ !). On a

$$f(x) - \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^2}{n(n^2+x^2)} \text{ vérifie le CSSA dès } n=1 \text{ donc } |R_n(x)| \leq \frac{x^2}{(n+1)((n+1)^2+x^2)} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc CU sur } \mathbb{R} \text{ puis } \lim_0 f = f(0)$$

2.  $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \left( \frac{i}{x+in} - \frac{i}{x-in} \right)$  donc  $f_n^{(k)} = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \left( \frac{(-1)^k ik!}{(x+in)^{k+1}} - \frac{(-1)^k ik!}{(x-in)^{k+1}} \right)$  ce qui donne la CN sur  $\mathbb{R}$  de  $\sum f_n^{(k)}$  par  $|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{(x^2+n^2)^{k+1}} \leq \frac{k!}{n^{2(k+1)}}$  avec  $k \geq 1$  (la CS pour  $k=0$  suffit et a déjà été prouvée).

**Exercice 60** [sujet] 1. Si  $|x| < 1$ , alors  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nx^{2n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et si  $|x| > 1$  alors  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-n}{x}$  donc DVG

2.  $|f'_n(x)| \leq n \frac{(2n-1)a^{2n-2} + a^{4n-2}}{(1-a^{2n})^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  si  $x \in [-a, a] \subset ]-1, 1[$  donc  $\sum f'_n$  CN sur tout segment de  $] -1, 1[$ ;  $f'(x) = \sum_{n \geq 1} n \frac{(2n-1)x^{2n-2} + x^{4n-2}}{(1-x^{2n})^2} \geq 0$ .

**Exercice 61** [sujet] 1. Par récurrence sur  $n$  en remarquant que si  $u_n(t) \leq \frac{t^n}{n!}$  alors  $u_n(t-t^2) \leq \frac{t^n(1-t)^n}{n!} \leq \frac{t^n}{n!}$   
 2.  $\|u_n\|_\infty \leq \frac{1}{n!}$  donc  $\sum u_n$  CN sur  $[0, 1]$  vers  $u$  telle que (intégration sur un segment avec CN)  $u(x) = \int_0^x u(t-t^2) dt$ ; comme  $t \mapsto u(t-t^2)$  est continue,  $u$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $u'(t) = u(t-t^2)$ .

**Exercice 62** [sujet] 1.  $f_n$  est continue par récurrence  
 2. Par récurrence sur  $n$  :  $f_n$  est  $\mathcal{C}^n$ ,  $f_n^{(k)}(a) = 0$  si  $k \leq n-1$  et  $f_n^{(n)} = f$ . Avec Taylor, on en déduit  $f_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$   
 3.  $\|f_n\|_{\infty, [a, x]} \leq \|f\|_{\infty, [a, x]} \frac{(x-a)^n}{n!}$  donc CN sur le segment  $[a, x]$  (ou  $[x, a]$ ) et  $g(x) = \int_a^x f(t) \sum_{n \geq 1} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \int_a^x f(t) e^{x-t} dt$   
 4.  $g(x) = e^x \int_a^x f(t) e^{-t} dt$  est donc  $\mathcal{C}^1$  et solution de  $y'(x) - y(x) = f(x)$

**Exercice 63** [sujet] 1.  $f_n$  est  $\mathcal{C}^1$  par réc et  $f'_{n+1} = f_n$  puis  $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n = f'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = f'_0 + S$ . On en déduit  $S(x) = \alpha e^x + e^x \int_a^x e^{-t} f'_0(t) dt$  et  $S(a) = f_0(a)$  donne  $\alpha = e^{-a} f_0(a)$   
 2.  $\|f'_n\|_\infty = \|f_{n-1}\|_\infty$   
 3.  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$  donc  $\sum f_n$  CVU sur  $[0, 1]$  et  $S(x) = e^x \int_0^x e^{-t} \sin(2t) dt = e^x \operatorname{Im} \left( \int_0^x e^{-(1+2i)t} dt \right) = \dots$

**Exercice 64** [sujet] On pose  $f_n(t) = \frac{ne^{-t} + t^2}{n+t}$ ;  $(f_n)$  CS sur  $[0, 1]$  vers  $f : t \mapsto e^{-t}$  et  $|f_n(t) - e^{-t}| \leq \frac{1+e^{-1}}{n}$  donc  $(f_n)$  CU sur  $[0, 1]$  vers  $f$ ; par intégration  $\lim u_n = \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - e^{-1}$ .

**Exercice 65** [sujet] 1. On a  $P_n^{(k)}(0) = 0$  si  $k < n$  ou  $k > 2n$  et, si  $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$ , par la formule de Leibniz,  $P_n^{(k)}(0) = \binom{k}{n} n(n-1) \dots (2n-k+1) b p^{k-n} (-a)^{2n-k}$  est entier. Puis  $P_n(r-X) = P_n(X)$  donne les dérivées en  $r$  par symétrie.  
 2.  $u_n = q \int_0^r P_n(t) e^t dt$  est un entier par IPP successives avec la question précédente et le fait que  $qe^r \in \mathbb{Z}$ . On a  $\|P_n \exp\|_\infty \leq \frac{1}{n!} r^n (br)^n e^r$  donc  $(P_n \exp)$  CU sur  $[0, r]$  vers 0 et par intégration  $(u_n)$  tend vers 0. Or  $(u_n)$  est une suite d'entiers, elle est donc nulle à partir d'un certain rang et comme  $P_n \exp$  est continue et positive sur  $[0, r]$ , on en déduit  $P_n \exp = 0$  sur  $[0, r]$  ce qui est absurde. On vient donc de prouver par l'absurde que si  $r \in \mathbb{Q}$  alors  $e^r$  est irrationnel donc en particulier (avec  $r = 1$ ),  $e$  est irrationnel.

**Exercice 66** [sujet] 1. Par récurrence : si  $f_n$  est  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  alors  $t \mapsto \sqrt{f_n(t)^2 + t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $f_{n+1}$  est  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ .

2.  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_0^x (f_n(t) - f_{n-1}(t)) \frac{f_n(t) + f_{n-1}(t)}{\sqrt{t^2 + f_n(t)^2} + \sqrt{t^2 + f_{n-1}(t)^2}} dt$  donne le résultat par récurrence sur  $n$   
 car  $\left| \frac{f_n(t) + f_{n-1}(t)}{\sqrt{t^2 + f_n(t)^2} + \sqrt{t^2 + f_{n-1}(t)^2}} \right| \leq 1$ .  
 On en déduit  $\|f_{n+1} - f_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$  donc  $\sum (f_{n+1} - f_n)$  CN sur tout segment de  $\mathbb{R}$  ce qui donne la CS de  $(f_n)$  et la continuité de  $f = \sum_{n \geq 1} (f_{n+1} - f_n)$  par télescopage.

3. Pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, on vérifie la CU de  $(g_n)$  sur  $[0, x]$  (ou  $[x, 0]$ ) avec  $g_n(t) = \sqrt{t^2 + f_n(t)^2}$  car  $|g_n(t) - \sqrt{t^2 + f(t)^2}| = |f_n(t) - f(t)| \frac{f_n(t) + f(t)}{\sqrt{t^2 + f_n(t)^2} + \sqrt{t^2 + f(t)^2}} \leq \|f_n - f\|_{\infty, [0, x]}$  donc par intégration, on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f(t)^2} dt$  puis  $f(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f(t)^2} dt$  ce qui prouve que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  par continuité de  $f$  et, en dérivant,  $f'(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2}$ .

**Exercice 67** [sujet] 1.  $\|u_n\| \leq |\alpha_n|$  donc CVN sur  $[0, 1]$

2. Par CVN,  $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n \geq 1} \int_0^1 u_n(t) dt = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \frac{\sin(2\pi\omega_n)}{2\pi\omega_n}$

3.  $f$  est  $\mathcal{C}^0$  sur  $[0, 1]$  donc  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}\right) = \int_0^1 f(t) dt$  (somme de Riemann).

**Exercice 68** [sujet] 1.  $t^{xt^y} = e^{xt^y \ln(t)} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$  car  $y > 0$ .

2.  $\|f_n\|_{\infty} = \frac{1}{n!} \left(\frac{|x|}{ey}\right)^n$

3. Les  $f_n$  sont continues sur  $[0, 1]$  donc on peut intervertir  $\sum / \int$  sur le segment  $[0, 1]$  par CN :  $\sum_{n \geq 0} f_n(t) = t^{xt^y}$  par

DSE de exp et  $\int_0^1 f_n(t) dt \stackrel{n\text{IPP}}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$

**Exercice 69** [sujet] 1. Si  $x \in [-a, a]$  alors pour  $n \geq a$ , on a  $(x+n)^2 \geq (a+n)^2$  et  $(x-n)^2 \geq (n-a)^2$  donc  $\|f_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{C}{(n+a)^2} + \frac{C}{(n-a)^2}$  donc CVNTS de  $\mathbb{R}$ .

2. Les deux séries CV donc, avec des changements d'indices,  $f(x+1) = \varphi(x+1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \varphi(x+k) + \sum_{h=0}^{+\infty} \varphi(x-h) = f(x)$

3.  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et 1-périodique donc bornée et  $|\varphi(x)g(x)| \leq \frac{C\|g\|_{\infty}}{1+x^2}$ , intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

$\|f_n g\|_{\infty, [0, 1]} \leq \|g\|_{\infty} \|f_n\|_{\infty, [0, 1]}$  donc la série CVN sur  $[0, 1]$  et on a  $\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 \varphi(x)g(x) dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \varphi(x+n)g(x) dx + \int_0^1 \varphi(x-n)g(x) dx$ . Par changements de variables et avec la 1-périodicité de  $g$ , on a  $\int_0^1 \varphi(x+n)g(x) dx = \int_n^{n+1} \varphi(u)g(u) du$  et  $\int_0^1 \varphi(x-n)g(x) dx = \int_{-n}^{-n+1} \varphi(u)g(u) du$  ce qui donne, avec Chasles,  $\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x) dx$ .

**Exercice 70** [sujet] TCD à chaque fois

1.  $\left| \frac{\cos \frac{t}{n}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$  donc limite  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ .

2.  $\left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-\frac{1}{n}} \right| \leq \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-2} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in ]0, 1[ \end{cases}$  si  $n \geq 2$  donc limite  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ .

3. On prolonge par 0 sur  $]n, +\infty[$  puis  $|f_n(x)| \leq e^{-x}$  donc limite  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dt = 1$ .

4.  $\left| x^n \frac{\ln x}{(1-x^2)^{1/4}} \right| \leq \frac{|\ln x|}{(1-x^2)^{1/4}}$  donc limite  $\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x^2)^{1/4}} dx$

**Exercice 71** [sujet]  $\left| \frac{1}{1+x^2+x^n e^{-x}} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$  donc limite  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ .

**Exercice 72** [sujet] 1.  $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$  et  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t^{\alpha}}$  donc  $f_{\alpha}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  si et seulement si  $\alpha \in ]1, 2[$ .

2.  $|f_n(t)| \leq f_{3/2}$  donc limite  $\int_0^1 \frac{\arctan t}{t^{3/2}} dt$

**Exercice 73** [sujet] 1. Étude de fct

2.  $\frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{n}$  et  $\frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$  donc  $I_n$  existe.

3.  $|I_n| \leq \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$  (qui existe) par Q1 donc  $\lim I_n = 0$ . Puis par TCD,  $nI_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$  car  $\left| \frac{n \sin(t/n)}{t(1+t^2)} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$  par Q1

**Exercice 74** [sujet] 1.  $\frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^3}\right)$

2. Poser  $t = xn^{4/3}$

3. Par TCD avec  $|f_n(t)| \leq \frac{t}{1+t^3}$  ( $|\sin(u)| \leq |u|$ )

4. Ajouter les 2 valeurs de  $K$  puis  $2K = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1-t+t^2} = \frac{4}{3} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right]_0^{+\infty}$

5. facile

**Exercice 75** [sujet] 1.  $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x^{3/2}}$

2.  $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(n+x)} \underset{x=u^2}{=} \pi \int_0^{+\infty} \frac{du}{n+u^2} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$

3. fait au dessus

4.  $\arctan(n) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(n+x)} \leq I_n \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(n+x)}$  donne  $I_n \sim \frac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$

**Exercice 76** [sujet] 1.  $\frac{\arctan(nt)}{(1+n^4t^2)^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n^8t^4}$

2.  $\lim I_n = 0$  par TCD avec  $\left| \frac{\arctan(nt)}{(1+n^4t^2)^2} \right| \leq \frac{\pi/2}{(1+t^2)^2}$  puis  $I_n \underset{u=n^2t}{=} \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(u/n)}{(1+u^2)^2} du$  donc  $\lim n^3 I_n = \int_0^{+\infty} \frac{u}{(1+u^2)^2} du = 1$  par TCD avec  $\left| \frac{\arctan(u/n)}{(1+u^2)^2} \right| \leq \frac{\pi/2}{(1+u^2)^2}$

**Exercice 77** [sujet] 1. fct continue sur  $[0, 1]$

2.  $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$  donc  $\lim I_n = 0$  (ou par TCD en dominant par 1); on pose  $u = x^n$  :  $nI_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}+u^{2/n}} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}$  par TCD avec  $\left| \frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}+u^{2/n}} \right| \leq 1$ .

**Exercice 78** [sujet] 1.  $\ln(x) \ln(1-x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\ln x)$  et  $\ln(x) \ln(1-x^n) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} (x-1) \ln(1-x^n) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ .

2.  $|\ln(x) \ln(1-x^n)| = |\ln x| \times (-\ln(1-x^n)) \leq |\ln x| \times (-\ln(1-x))$  donc  $\lim I_n = 0$ .

3.  $I_n \underset{u=x^n}{=} \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{\ln u \ln(1-u)}{u} u^{1/n} du$  puis  $\left| \frac{\ln u \ln(1-u)}{u} u^{1/n} \right| \leq \frac{\ln u \ln(1-u)}{u}$  qui est intégrable sur  $]0, 1[$  (car  $\underset{u \rightarrow 0}{\sim} \ln u$  et  $\underset{u \rightarrow 1}{\rightarrow} 0$ ) donc  $I_n \sim \frac{C}{n^2}$  avec  $C = \int_0^1 \frac{\ln u \ln(1-u)}{u} du > 0$ .

**Exercice 79** [sujet] 1.  $\text{sh } x = 1 \overset{X=e^x}{\Leftrightarrow} X^2 - 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1 + \sqrt{2}$  car  $X = e^x > 0$

2.  $\lim I_n = 0$  par TCD car  $|\text{sh}^n t| \leq 1$  sur  $[0, \alpha]$

3. IPP

4.  $(I_n)$  est décroissante donc  $(2n-1)I_n \leq nI_n + (n-1)I_{n-2} \leq (2n-1)I_{n-2}$  puis  $I_n \sim \frac{1}{n\sqrt{2}}$

**Exercice 80** [sujet] 1.  $\frac{1}{\text{ch}^n}$  est  $\mathcal{CM}^0$  sur  $[0, x]$  (ou  $[x, 0]$ )

2. Par TCD (sur  $[0, x]$ ),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = 0$  car  $\left| \frac{1}{\text{ch}^n t} \right| \leq 1$ ; la CV est uniforme car  $\|I_n\|_\infty = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}^n t} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  par TCD avec  $\left| \frac{1}{\text{ch}^n t} \right| \leq \frac{1}{\text{ch } t}$  pour  $n \geq 1$

3.  $I_{n+2}(x) = \int_0^x \frac{\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t}{\text{ch}^{n+2} t} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} I_n(x) - \left[ \text{sh } t \frac{-1}{(n+1) \text{ch}^{n+1} t} \right]_0^x - \frac{1}{n+1} I_n(x)$

4.  $I = I_1(\ln 2) - I_3(\ln 2)$  puis  $I_1$  se calcule en posant  $u = e^x$

**Exercice 81** [sujet] 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 1$  et  $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2.  $|f_n(x)| \leq \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 1 & \text{si } x \in ]0, 1[ \end{cases}$  car  $|\sin(nx)| \leq nx$  donc  $\lim u_n = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$ .

**Exercice 82** [sujet] 1.  $(f_n)$  CS vers  $e^{-t} \ln(t)$  (forme exponentielle et DL)

2.  $|f_n(t)| \leq |\ln(t)| e^{-(n-1)\frac{t}{n}} \leq |\ln(t)| e^{-t/2}$  si  $n \geq 2$

3.  $\int_0^n f_n(t) dt = n \ln(n) \int_0^1 (1-u)^{n-1} du + n \int_0^1 (1-u)^{n-1} \ln(u) du$  puis  $n \ln(n) \int_0^1 (1-u)^{n-1} du = \ln(n)$  et  $n \int_0^1 (1-u)^{n-1} \ln(u) du \stackrel{\text{IPP}}{=} - \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du = - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-u)^k du = -H_n$ .

**Exercice 83** [sujet] 1.  $(f_n)$  CS sur  $\mathbb{R}^+$  vers  $x \mapsto e^{-x} \sin(x)$

2.  $\lim v_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(x) dx = \frac{1}{2}$  par TCD avec  $|f_n(x)| \leq e^{-x} |\sin x| \leq e^{-x}$

3. a)  $x \mapsto \ln(1+x) - x$  croît sur  $] -1, 0]$  et décroît sur  $\mathbb{R}^+$

b) Si  $x \in [0, n]$ ,  $|f_n(x) - f(x)| \leq e^{-x} - e^{n \ln(1-x/n)} \leq 1 - e^{x+n \ln(1-x/n)}$  donc  $|f_n(x) - f(x)| \leq 1 - e^{n^{1/4} + n \ln(1-n^{-3/4})}$  sur  $[0, n^{1/4}]$ . Si  $x \geq n^{1/4}$  alors  $|f_n(x) - f(x)| \leq 2e^{-x} \leq 2e^{-n^{1/4}}$ . En regroupant les deux, on a  $\|f_n - f\|_\infty \leq 2e^{-n^{1/4}} + (1 - e^{n^{1/4} + n \ln(1-n^{-3/4})}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

**Exercice 84** [sujet] 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 1$

2.  $\lim I_n = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$  par TCD avec  $|f_n(x)| \leq \frac{e^x - 1}{x}$  et  $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ . Puis, pour  $x \in ]0, 1]$ ,  $\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$

et on intègre terme à terme avec le TITT ou CVN sur  $[0, 1]$  car  $\left| \frac{x^{k-1}}{k!} \right| \leq \frac{1}{k!}$

**Exercice 85** [sujet] 1.  $f_0$  n'est pas  $\mathcal{CM}^0$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  car  $\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} f_0(t) = +\infty$ ;  $f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{n-1}}$  n'est intégrable sur  $[1, +\infty[$  que pour  $n \geq 3$  (et l'intégrale DV si  $f_n$  n'est pas intégrable car  $f_n \geq 0$  au voisinage de  $+\infty$ ). Enfin  $\lim_{n \rightarrow 0} f_n = 1$  si  $n \geq 3$ .

2.  $I = \int_0^1 \frac{t}{\sin(t)} dt$  par  $|f_n(t)| \leq \begin{cases} \frac{t}{t^3 - 1} & \text{si } t \geq 1 \\ \frac{t}{\sin(t)} & \text{si } t \in ]0, 1[ \end{cases}$

3.  $n(I_n - I) \stackrel{u=t^n}{=} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2/n-1}}{u + \sin(u^{1/n})} du - \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{\sin(u^{1/n})(u + \sin(u^{1/n}))} du$  puis par  $\left| \frac{u^{2/n-1}}{u + \sin(u^{1/n})} \right| \leq \frac{u^{2/3-1}}{u-1}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2/n-1}}{u + \sin(u^{1/n})} du = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(u + \sin(1))}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{\sin(u^{1/n})(u + \sin(u^{1/n}))} du = \int_0^1 \frac{du}{\sin(1)(u + \sin(1))}$  par  $\left| \frac{u^{1/n}}{\sin(u^{1/n})(u + \sin(u^{1/n}))} \right| \leq \frac{1}{\sin(u^{1/3})(u + \sin(u^{1/3}))}$  puisque  $\sin$  est croissante sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 86** [sujet] On pose  $u = t^n$  :  $nu_n = \int_0^1 u^{1/n} f(u^{1/n}) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 1 f(1) du = f(1)$  par TCD et continuité de  $f$  en 1 avec  $|u^{1/n} f(u^{1/n})| \leq \|f\|_\infty$  car  $f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$  donc bornée.

**Exercice 87** [sujet]  $n \int_0^1 t^n f(t) dt \stackrel{u=t^n}{=} \int_0^1 u^{1/n} f(u^{1/n}) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(1) du = f(1)$  car  $|u^{1/n} f(u^{1/n})| \leq \|f\|_\infty$ .

**Exercice 88** [sujet] On complète par 0 sur  $]n, +\infty[$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{x+1}{x^n e^x + x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2 + x + 1} dx$  car

$|f_n(x)| \leq \begin{cases} \frac{x+1}{x^2 + x + 1} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x+1}{e^x + x^2 + x + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

**Exercice 89** [sujet] On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} dx = \int_0^1 dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  car  $\left| \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} \right| \leq \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

**Exercice 90** [sujet]  $\lim u_n = 0$  car  $|\exp(-x^n)| \leq e^{-x}$  puis  $u_n \stackrel{u=x^n}{=} \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} e^{-u} u^{1/n-1} du$  donc  $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = C > 0$  car  $|e^{-u} u^{1/n-1}| \leq e^{-u}$  donc  $u_n \sim \frac{C}{n}$  (positif) et  $\sum u_n$  DV.

**Exercice 91** [sujet] 1.  $\frac{1 - \cos^n x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{n}{2}$  et  $\frac{1 - \cos^n x}{x^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .

2. on pose  $x = \sqrt{\frac{2t}{n}}$

3.  $\lim_0 \frac{\ln(\cos t)}{t^2} = -\frac{1}{2}$

4. on trouve la limite de  $(v_n)$  par TCD : si  $f_n(t) = \frac{1 - \cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)}{t\sqrt{t}}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t\sqrt{t}}$ . Reste la domination :

si  $t \geq 1$  alors  $|f_n(t)| \leq \frac{2}{t\sqrt{t}}$  ; si  $t < 1$  alors  $\sqrt{\frac{2t}{n}} \in \left[0, \sqrt{\frac{2}{n}}\right] \subset [0, \alpha]$  si  $n \geq n_0$  ( $n_0$  ne dépend pas de  $t$ ) et

$\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right) = \exp\left[n \ln \cos\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\right] \geq \exp\left[-2n \frac{2t}{n}\right] = e^{-4t}$ . On a donc  $|f_n(t)| = f_n(t) \leq \frac{1 - e^{-4t}}{t\sqrt{t}}$  sur  $]0, 1]$  si  $n \geq n_0$ .

On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x\sqrt{x}} dx \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \stackrel{x=t^2}{=} \frac{2}{3} \sqrt{\pi}$ . Au final,  $u_n \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{3\sqrt{2}}$

**Exercice 92** [sujet] 1. cours

2. il suffit que  $\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$  et  $\sin(\varphi_n) = -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$  donc  $\varphi_n$  est un argument du complexe  $a_n - ib_n$  (qui est non nul)

3. On a  $I_n = (a_n^2 + b_n^2) \left( \frac{d-c}{2} + \left[ \frac{\sin(2nx + 2\varphi_n)}{4n} \right]_c^d \right)$  donc  $\lim I_n = \frac{(d-c)(a_n^2 + b_n^2)}{2}$  ce qui donnera la minoration à partir d'un certain rang ( $1/2 > 1/4!$ )

4. Si  $(a_n)$  ou  $(b_n)$  ne tend pas vers 0, la minoration précédente prouve que  $(I_n)$  ne tend pas vers 0, ce qui est absurde car  $|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq K$  (car  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont bornées) donc le TCD donne  $\lim I_n = 0$ .

**Exercice 93** [sujet] Proche des intégrales de Wallis

1. CSSA avec  $0 \leq a_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n}$

2.  $a_{n+2} \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 t^n (1-t^2)^{3/2} dt = \frac{2}{3}(n+1)(a_n - a_{n+2})$

3. On prouve  $\sum_{n \geq 0} a_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t} dt$  en utilisant le TCD appliqué à  $S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sqrt{1-t^2} t^k$  car le TITT est plus

difficile à appliquer (la CVA de  $\sum a_n$  n'est pas évidente) : on a  $|S_n(t)| = \sqrt{1-t^2} \left| \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t} \right| \leq \frac{2\sqrt{1-t^2}}{1+t}$  ce qui permettra de conclure

**Exercice 94** [sujet] Si  $x > 0$ , on a  $\frac{x}{\text{ch}(x)} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x e^{-(2n+1)x}$  puis TITT avec  $\int_0^{+\infty} |x e^{-(2n+1)x}| dx = \frac{1}{(2n+1)^2}$

**Exercice 95** [sujet] 1.  $n^{-n} \leq \frac{1}{n^2}$  si  $n \geq 2$  et  $\lim_0 e^{x \ln(x)} = 1$

2. IPP successives  $\int_0^1 f_{n,p}(t) dt = (-1)^n \frac{n!}{(p+1)^n}$

3. TITT avec  $e^{x \ln(x)} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n (\ln x)^n}{n!}$

**Exercice 96** [sujet]  $t^{t^x} = \sum_{n \geq 0} \frac{(t^x \ln t)^n}{n!}$  et on applique le TITT avec  $\int_0^1 \frac{|t^x \ln t|^n}{n!} dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{(t^x \ln t)^n}{n!} dt \stackrel{\text{IPP}}{=}$

$(-1)^{n+1} \frac{1}{(n-1)!(xn+1)} \int_0^1 t^{xn} (\ln t)^{n-1} dt = \dots = \frac{1}{(xn+1)^{n+1}}$

**Exercice 97** [sujet] Par TCD avec  $S_n(t) = \sum_{k=0}^n t^{b-1} (-1)^k t^{ka}$  et  $|S_n(t)| = t^{b-1} \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)a}}{1 + t^a} \leq \frac{2t^{b-1}}{1 + t^a}$

**Exercice 98** [sujet]  $\int_0^1 x^{2n}(1-x) dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$  et par TITT la somme de la série vaut aussi  $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)$ .

**Exercice 99** [sujet]  $\frac{t^{\alpha-1}}{1+t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$  puis  $\frac{t^{\alpha-1}}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{\alpha+n-1}$  si  $t \in ]0, x]$  et on applique le TITT ( $x < 1$  fixé) avec  $\int_0^x |(-1)^n t^{\alpha+n-1}| dt = \frac{x^{\alpha+n}}{\alpha+n}$ . La dernière somme s'obtient avec  $\alpha = \frac{1}{3}$  et  $x = \frac{1}{2}$  (poser  $u = t^{1/3}$  pour calculer l'intégrale)

**Exercice 100** [sujet] 1.  $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$  et  $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$   
 2.  $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{t} e^{-nt}$  puis TITT (chgt de variable pour le calcul des intégrales)

**Exercice 101** [sujet]  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = 0$  et  $\frac{x^2}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  donc  $J$  existe. Pour  $x > 0$ ,  $\frac{x^2}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 1} x^2 e^{-nx}$  puis on applique le TITT avec  $f_n(x) = x^2 e^{-nx} \geq 0$  et  $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{2}{n^3}$  par deux IPP.

**Exercice 102** [sujet] 1.  $\frac{x}{\text{sh } x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$  et  $\frac{x}{\text{sh } x} \underset{+\infty}{\sim} 2xe^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$   
 2.  $\frac{x}{\text{sh } x} = \frac{2xe^{-x}}{1 - e^{-2x}} \underset{x \geq 0}{=} 2 \sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-(2n+1)x}$  dx puis TITT (H4)  $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{2}{(2n+1)^2}$

**Exercice 103** [sujet] 1.  $\frac{\sin t}{\text{sh } t} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$  et  $\frac{\sin t}{\text{sh } t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(e^{-t})$   
 2. Si  $t > 0$ ,  $|e^{-2t}| < 1$  donc  $\frac{\sin t}{\text{sh } t} = 2 \frac{\sin t}{e^t - e^{-t}} = 2 \sin(t) e^{-t} \frac{1}{1 - e^{-2t}} = \sum_{n \geq 0} 2 \sin(t) e^{-(2n+1)t}$   
 3. TITT avec  $\int_0^{+\infty} |\sin(t) e^{-(2n+1)t}| dt \leq \int_0^{+\infty} t e^{-(2n+1)t} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{(2n+1)^2}$  et, pour la conclusion,  $\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-(2n+1)t} dt = \text{Im} \left( \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1-i)t} dt \right) = \text{Im} \frac{1}{2n+1-i}$   
 4. si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{(2n+1)^2 + 1} \leq \int_n^{n+1} \frac{2 dt}{(2t+1)^2 + 1} \leq \frac{1}{(2n+3)^2 + 1}$  et  $t \mapsto \frac{1}{(2t+1)^2 + 1}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  donc en sommant, pour  $n \in \mathbb{N}$ , on trouve  $I \leq \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{(2t+1)^2 + 1} \leq I - 1$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{(2t+1)^2 + 1} = \left[ \arctan(2t+1) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$

**Exercice 104** [sujet] 1.  $\frac{\ln(1-t^2) \ln(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\ln(t)$  et  $\frac{\ln(1-t^2) \ln(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow 1}{\rightarrow} 0$  donc  $I$  existe.  
 2. On applique le TITT avec  $\frac{\ln(1-t^2) \ln(t)}{t^2} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n-2} \ln(t)}{n}$  pour  $t \in ]0, 1[$  et  $\int_0^1 t^{2n-2} \ln(t) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{(2n-1)^2}$ .  
 Pour le calcul, comme  $\frac{1}{n(2n-1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{(2n-1)^2}$ , on trouve  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(2k-1)^2} = 2H_n - 2H_{2n} + 2 \left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\pi^2}{4} - 2 \ln(2)$  en utilisant  $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$  et  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**Exercice 105** [sujet] 1. On vérifie  $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $\sum a_n$  CV,  $(b_n)$  CV vers  $l$  donc  $n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \lambda = e^l > 0$ .  
 2. a)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (1-t)^x}{t} = x$  et  $\frac{1 - (1-t)^x}{t} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{-1}{(1-t)^{-x}}$

b) Pour  $t \in ]0, 1[$ ,  $(1-t)^x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} t^n$  donc  $\frac{1-(1-t)^x}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} t^{n-1}$   
 puis on applique le TITT avec  $u_n = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{(-x)(1-x)\dots(n-x-1)}{n \times n!}$  donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{x+2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $u_n \sim \frac{\lambda}{n^{x+2}}$  et  $x+2 > 1$ .

**Exercice 106** [sujet] 1.  $\frac{\sin \alpha x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1} = \alpha$

2.  $\frac{\sin \alpha x}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \alpha x e^{-nx}$  si  $x > 0$  puis TITT avec  $\int_0^{+\infty} |\sin \alpha x e^{-nx}| dx \leq \int_0^{+\infty} |\alpha| x e^{-nx} dx = \frac{|\alpha|}{n^2}$  et enfin on

calcule  $\int_0^{+\infty} \sin \alpha x e^{-nx} dx = \text{Im} \left( \int_0^{+\infty} e^{-(n-i\alpha)x} dx \right) = \frac{\alpha}{n^2 + \alpha^2}$

3. Par comparaison à une intégrale  $I$  équivaut à  $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha dt}{\alpha^2 + t^2}$  quand  $\alpha$  tend vers  $+\infty$  puis  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) = \frac{\pi}{2}$

**Exercice 107** [sujet] 1.  $|f_n(x)| \leq |a_n| \frac{b^n}{n!} e^{-a} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(|a_n|)$  donc CN sur tout segment de  $\mathbb{R}^+$

2. Par TITT avec  $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \stackrel{\text{IPP}}{=} |a_n|$ , on trouve  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

**Exercice 108** [sujet] 1.  $\mathcal{CM}^0$  sur  $\mathbb{R}^+$  et  $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  en  $+\infty$

2. Le TITT ne s'applique pas car la série à trouver n'est pas ACV.  $f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(t) e^{-(k+1)t}$  puis

$$\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-(k+1)t} dt = \frac{(k+1)}{1+(k+1)^2} \text{ et on termine avec le TCD : } |S_n(t)| = \left| \frac{\cos(t)(1 - (-1)^{n+1} e^{-(n+1)t})}{1 + e^t} \right| \leq \frac{2|\cos(t)|}{1 + e^t}$$

**Exercice 109** [sujet] 1. CV par CSSA mais pas ACV car  $\frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

2. On applique le TCD à  $S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} \cos(xt) = e^{-t} \frac{1 - (-1)^{n+1} e^{-(2n+2)t}}{1 + e^{-2t}} \cos(xt)$  donc  $|S_n(t)| \leq \frac{2e^{-t}}{1 + e^{-2t}}$  intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . On termine avec  $\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt = \frac{2k+1}{(2k+1)^2 + x^2}$ .

**Exercice 110** [sujet]  $\sum_{k=0}^n u_k = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos^k(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos t}$  par TCD en utilisant la majoration

$$|S_n(t)| = \left| \frac{1 - (-1)^{n+1} \cos(n+1)t}{1 + \cos t} \right| \leq \frac{2}{1 + \cos t}. \text{ On trouve } S = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2 \cos^2 t/2} = \left[ \tan \frac{t}{2} \right]_0^{\pi/2} = 1$$

**Exercice 111** [sujet] 1.  $\frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$  donc l'intégrale de gauche CV et vaut celle de droite par  $u = \frac{1}{t}$ .

2. Si  $t \in ]0, 1[$  alors  $\frac{(\ln t)^2}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\ln t)^2 t^{2n}$  puis TITT avec  $\int_0^1 |(-1)^n (\ln t)^2 t^{2n}| dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{2}{(2n+1)^3}$

**Exercice 112** [sujet] 1.  $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$  donc CN sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

2. Par CSSA  $|f(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$  donc (avec la continuité précédente),  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On applique le TCD

à  $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + t^2}$  : par CSSA, on a  $|R_n(t)| \leq \frac{1}{(n+1)^2 + x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} R_n(t) dt = 0$  ce

qui donne par linéarité de l'intégrale sur la somme partielle de la série (donc une somme finie)  $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt =$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{n^2 + x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

**Exercice 113** [sujet] 1.  $F(t) = \frac{\sin(\pi t)}{1-t}$ ; pas de CU car  $R_n(t) = \frac{t^{n+1} \sin(\pi t)}{1-t}$  donc  $R_n(1-1/n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi e^{-1}$  donc  $(\|R_n\|_\infty)$  ne tend pas vers 0

2. TITT avec  $\int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt \stackrel{2 \text{ IPP}}{\leq} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left( 2 + \int_0^1 t^{n+2} \sin(\pi t) dt \right) \leq \frac{3}{(n+1)(n+2)}$ ; on en déduit  $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t} \stackrel{x=\pi(1-t)}{d} t = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx$ .

**Exercice 114** [sujet] 1.  $0 \leq u_n \leq \pi \int_0^\pi x^n (1-x) dx = \pi \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$

2. Par TITT avec  $\int_0^\pi |x^n \sin(\pi x)| dx \leq \pi \frac{1}{(n+1)(n+2)}$  puis changement de variable  $u = \pi x$ .

**Exercice 115** [sujet]  $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt \stackrel{\text{TITT}}{=} \sum_{n \geq 0} \int_0^1 -t^n \ln(t) dt = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$

**Exercice 116** [sujet] — Si  $I$  CV alors  $\sum_{k=0}^n u_k \stackrel{\text{somme finie}}{=} \int_0^1 f(t) \frac{1-t^{n+1}}{1-t} dt$  et comme  $f \geq 0$ ,  $f(t) \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \leq \frac{f(t)}{1-t}$

donc  $\sum_{k=0}^n u_k \leq I$  donc la série CV (SATP dont les somme partielles sont majorées)

— Si  $\sum u_n$  CV alors  $\int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} f(t) t^n dt$  que l'on peut intégrer terme à terme sur le segment  $[0, x]$  si

$|x| < 1$  par CVN car  $|f(t) t^n| \leq \|f\|_\infty x^n$ . On a donc  $\int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x f(t) t^n dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  (car  $f \geq 0$ ) donc  $I$

CV (intégrale d'une fonction positive dont une primitive est majorée)

En cas de CV, on a  $I = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  par TITT (et H4 est la CV de  $\sum u_n$  car  $f \geq 0$ ).