

I Étude de suites de fonctions

Exercice 1 [Solution]

Étudier la convergence simple, uniforme, uniforme sur tout segment des suites de fonctions :

- $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$, $n \geq 1$, sur \mathbb{R} .
- $f_n(x) = \frac{n^a \sin\left(\frac{x}{n}\right) - 1}{n^a \sin\left(\frac{x}{n}\right) + 1}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (CCP MP 2012) [Solution]

On pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$. Montrer que (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}^+ . Étudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$, puis sur \mathbb{R}^{+*} .

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2012) [Solution]

On pose $f_n(x) = \begin{cases} \frac{2n^2x^2 - nx - 1}{2n^2x + 1} \sin^2 \frac{\pi}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$ Étudier les convergences simple et uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$.

Exercice 4 (CCP PSI 2016) [Solution]

Soit $f_n(x) = \cos\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)x\right]$.

- Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .
- Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment de \mathbb{R} ? Sur \mathbb{R} ?

Exercice 5 (CCINP PSI 2021) [Solution]

On pose $f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx}$ si $x \geq 0$ et $f_n(x) = \frac{nx^3}{1 + nx^2}$ si $x < 0$.

- Montrer que (f_n) converge uniformément sur \mathbb{R} vers f à déterminer.
- Montrer que (f'_n) converge simplement sur \mathbb{R} mais ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$.

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1 + n^2x^2}$

- Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 1]$
- Soit $a \in]0, 1[$, a-t-on convergence uniforme sur $[a, 1]$?
- Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$
- On pose $u_n = \int_0^1 f_n(t) dt$. Déterminer la limite de (u_n) .
- Étudier la convergence de $\sum f_n$.

Exercice 7 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et g_n définie sur $[0, 1]$ par $g_n(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

- Montrer que pour tout réel $t \in [0, 1]$, $|g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$ puis que $\left|1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right| \leq \frac{te^t}{n}$.
- Étudier la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions $I_n(x) = \int_0^x e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

Exercice 8 (Mines-Ponts PSI 2014) [Solution]

Pour $t \in [0, 1]$, on pose $f_0(t) = 0$ et $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2}(t - f_n(t)^2)$. Étudier les convergences simples et uniformes de (f_n) sur $[0, 1]$.

Exercice 9 (Centrale PSI 2023) [Solution]

Pour $x \in [0, 1]$, on définit g sur $[0, 1]$ par $\forall y \in [0, 1], g(y) = y - \frac{x}{2}y^2$

- Montrer que g est 1-lipschitzienne et que $[0, 1]$ est stable par g

2. On définit la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $h_0 = 1$ et $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}h_n\left(\frac{x}{2}\right)^2$

a) Montrer que $\forall x \in [0, 1], h_n(x) \in [0, 1]$

b) Montrer que $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left| h_n\left(\frac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right) \right|$

c) En déduire que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$

indication : prouver $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left| h_1\left(\frac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right) \right|$; pour la CVU, utiliser $f - h_n = \sum_{k=n}^{+\infty} h_{k+1} - h_k$

3. Justifier qu'il existe une fonction f continue sur $[0, 1]$, telle que $f(0) = 1$ et $\forall x \in [0, 1], f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)^2$

Exercice 10 (Centrale PSI 2023) [Solution]

1. Justifier l'existence, pour $x \in \mathbb{R}$, et déterminer la valeur de $\varphi(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \cos(t) dt$ et $\psi(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \sin(t) dt$

2. Déterminer les solutions bornées sur \mathbb{R} de $y' - y + \cos(x) = 0$

indication : φ est une solution de l'équation

3. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_0 = a \cos + b \sin$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f_n(t) dt$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.

indication : prouver $f_n = \alpha_n \cos + \beta_n \sin$ puis déterminer α_n et β_n

Exercice 11 (Centrale PSI 2022) [Solution]

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. On pose $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, et $S_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (k-nx)^r$,

pour $x \in [0, 1]$.

1. Citer la formule de Taylor avec reste intégral

2. Montrer que $S_{n,0}(x) = 1$ et $S_{n,1}(x) = 0$

On admet $S_{n,2}(x) = nx(1-x)$

3. Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{Mx(1-x)}{2n}$ pour $x \in [0, 1]$.

En déduire que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, 1]$

II Modes de convergence des séries de fonctions

Exercice 12 [Solution]

Étudier la convergence simple puis la convergence normale des séries de terme général

1. $u_n(x) = x^a(1-x)^{nb}n^c$ sur $[0, 1]$ où $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$.

2. $u_n(x) = nx^\alpha e^{-nx^2}$ sur \mathbb{R}^{+*} où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

1. Convergence simple puis uniforme sur $[0, 1]$ de la suite $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$

2. Convergence simple puis uniforme de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Exercice 14 (CCINP PSI 2019) [Solution]

1. Trouver les x tels que la suite $(f_n), f_n(x) = xe^{-\sqrt{n|x|}}$ converge; calculer $\|f_n\|_\infty$, que peut-on en déduire?

2. Déterminer le domaine de convergence D de $\sum f_n$. La convergence est-elle absolue sur D ? Normale? Que dire de la convergence sur $\mathbb{R} \setminus]-a, a[$, avec $a > 0$?

Exercice 15 (IMT PSI 2019) [Solution]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n(x) = \sin(x) \cos^n(x)$ et $f_n(x) = xg_n(x)$ avec $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

1. Étudier les variations de g_n .

2. Étudier la suite (f_n) puis la série $\sum_{n \geq 0} f_n$.

Exercice 16 (Mines-Ponts MP 2010) [Solution]

1. Si $\alpha > 0$, on pose $u_n(x) = \sin^\alpha x \cos^n x$; montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer sa somme.

2. À quelle condition sur α y a-t-il convergence normale ? uniforme ?

Exercice 17 (CCP PSI 2016) [Solution]

Soit $f_n(x) = x^n \frac{e^{-x}}{n!}$ pour $x \geq 0$.

1. Montrer la convergence simple puis uniforme de la suite (f_n) sur \mathbb{R}^+ .
2. Étudier la série $\sum f_n$.

Exercice 18 (CCINP PSI 2019) [Solution]

1. Montrer que, pour $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $|\ln(1+t) - t| \leq 2t^2$
2. Étudier la convergence simple et uniforme de $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right)$ sur \mathbb{R} .

Exercice 19 [Solution]

on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^{\ln n}}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$.
3. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[a, +\infty[\subset]1, +\infty[$. Qu'en déduire pour la somme f de cette série ?
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left|f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right|$. Que dire de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $]1, +\infty[$?
indication : que dire de $\|f_n\|_\infty$ si $\sum f_n$ converge uniformément ?

III Continuité, limites, équivalents de sommes de séries

Exercice 20 (Mines-Télécom PSI 2018) [Solution]

1. Montrer que pour $x \in I =]-1, +\infty[$, $S(x) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ existe.
2. Montrer que S est continue sur I .
3. Montrer que $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$ et en déduire un équivalent de S et -1^+ .
4. La série converge-t-elle normalement sur I ?

Exercice 21 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^{x+1}}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f .
2. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^{+*}
3. Étudier la continuité de f en 0.
4. Déterminer la limite de $f(x) - x$ en $+\infty$.

Exercice 22 (CCINP PSI 2021) [Solution]

On pose, pour $n \geq 2$ et $x > 0$, $u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

1. Déterminer le domaine de convergence de $\sum u_n(x)$.
2. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur ce domaine.
3. On pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$; montrer que $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$ puis montrer que la somme de la série $\sum u_n$ est continue sur son domaine de convergence.

Exercice 23 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]

1. Étudier les convergences simple et uniforme de $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{-nx}}{1+n}$ sur \mathbb{R}^{+*} .
indication : utiliser $R_n(1/n)$.

- On note f la somme de la série précédente ; est-elle continue ? dérivable ?
- Donner ses limites en 0 et $+\infty$.

Exercice 24 (Centrale PSI 2014) [Solution]

- Existence et continuité sur \mathbb{R}^{+*} de $f(x) = \sum_{n \geq 1} x^{2-\alpha} e^{-nx}$ pour $\alpha \in [0, 2[$.
- Trouver une CNS pour que la série converge normalement sur \mathbb{R}^+ .
- Si $\alpha = 1$, y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 25 [Solution]

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_k : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $u_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [1, k] \\ \left(1 - \frac{k}{t}\right)^t & \text{si } t > k \end{cases}$

- Montrer que $\sum u_k$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.
- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$. (*indication : commencer poser $p = n - k$*)

Exercice 26 [Solution]

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(nx)}$

- Quel est l'ensemble de définition de f ?
- Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-x}$.
- Mêmes questions pour $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\text{sh}^2(nx)}$.

Exercice 27 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Pour $x \neq 0$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{\text{sh}(nx)}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ lorsque la série converge.

- Déterminer le domaine de définition D de f .
- Montrer que f est continue sur D
- Étudier les variations de f
- Montrer que, si $x > 0$, $f_n(x) \leq \frac{e^{-(n-1)x}}{\text{sh } x}$ et en déduire $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\text{sh } x}$

Exercice 28 (CCP PSI 2023) [Solution]

- Ensemble de définition de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n}$, en fonction de a ?
- On suppose $|a| < 1$ jusqu'à la fin de l'exercice, montrer que S est continue sur \mathbb{R}^{+*} .
- Déterminer une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$ et en déduire un équivalent de S en 0.
- Montrer que $xS(x)$ tend vers $\frac{1}{1-a}$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 29 (CCP PSI 2018) [Solution]

On note $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ et $f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$.

- Donner l'ensemble de définition D de f .
- Pour $a > 0$, montrer la convergence normale sur $[a, +\infty[$ puis étudier la convergence normale sur D .
- f est-elle continue sur D ? Déterminer sa limite en $+\infty$.
- Montrer que $\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt$ et en déduire que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

Exercice 30 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$

- Déterminer le domaine de définition de f

2. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^{+*}

3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^k}\right)$

Exercice 31 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

On donne $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x^2}$.

1. Domaine de définition et continuité de f .
2. Donner la limite de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 32 (ENSAM PSI 2018) [Solution]

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que f est définie sur \mathbb{R}^{+*} .
2. Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} et étudier ses variations.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ et en déduire des équivalents de f en 0^+ et $+\infty$.
indication : pour l'équivalent en $+\infty$, encadrer $f(x)$ avec la valeur de $f(x) + f(x+1)$ et la monotonie de f .

Exercice 33 (ENSAM PSI 2018) [Solution]

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ lorsque la série converge.

1. Montrer que f est définie, continue et \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$.
2. Pour $x \in [0, 1[$, on pose $\varphi_x(t) = \frac{x^t}{1-x^t}$. Montrer que $\int_a^b \varphi_x(t) dt = \frac{\ln(1-x^a) - \ln(1-x^b)}{\ln x}$.
En déduire la limite et un équivalent de f en 1^- .

Exercice 34 (Centrale PSI 2022) [Solution]

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]-1, 1[$, $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{1-x^n}$. On pose : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[$, $v_n(x) = (1-x)u_n(x)$. Montrer que $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$ converge uniformément sur $[0, 1[$ et en déduire un équivalent de f en 1^- .

Exercice 35 (Centrale PSI 2019) [Solution]

1. Énoncer le théorème d'intégration par parties sur un intervalle $[a, b]$, $a < b$

2. Trouver une primitive de $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$

3. a) Trouver le domaine de définition et la valeur de $I(x) = \int_1^{+\infty} x^{\sqrt{t}} dt$

b) Trouver le domaine de définition et un équivalent en 1 de $S(x) = \sum_{n \geq 1} x^{\sqrt{n}}$

Exercice 36 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]

On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $u_n(t) = \frac{t^n \ln(t)}{H_n}$ et $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$

1. Déterminer le domaine de définition de S et montrer que la série converge normalement sur tout $]0, a[\subset]0, 1[$.
En est-il de même sur $]0, 1[$?

2. Montrer que S est continue sur $]0, 1[$. Est-elle dérivable sur ce même intervalle ?

indication : montrer que $|R_n(t)| \leq \frac{-t \ln(t)}{(1-t)H_{n+1}}$ puis montrer qu'elle n'est pas dérivable en 1 (avec le taux d'accroissement) en utilisant $-\ln(1-t) = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n}$ si $|t| < 1$.

Exercice 37 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

On pose $f(x) = \sum_{n \geq 1} \ln(1 + e^{-nx})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
2. Montrer que f est continue et strictement décroissante sur D .
3. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ et la déterminer.
4. Déterminer un équivalent de f en 0^+ ; on donne $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

indication : trouver l'équivalent en 0 en fonction d'une intégrale, poser $y = e^{-xt}$, qui se calculera en utilisant la somme donnée et $\ln(1+t) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n}$ si $t \in [0, 1]$.

Exercice 38 (Centrale PSI 2019) [Solution]

Pour $x \in [1, +\infty[$, on pose $u_0(x) = x$ et $u_{n+1}(x) = u_n(x) + \frac{1}{u_n(x)}$

1. Montrer que $(u_n(x))$ est bien définie. La suite $(u_n(x))$ admet-elle une limite ?
2. On pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{u_n(x)}$; montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[1, +\infty[$.
3. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $[1, +\infty[$ mais que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[1, +\infty[$.

Exercice 39 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soient $I = [-a, a]$ et φ continue sur I pour laquelle il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in I, |\varphi(x)| \leq C|x|$. On cherche les fonctions

f , définies sur I , continues en 0 et telles que $\begin{cases} f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x) & \text{pour } x \in I \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est définie et continue sur I .
2. Montrer que S est solution du problème posé
3. Montrer que la différence de 2 solutions du problème est nulle ; que peut on en déduire sur l'ensemble des solutions ?
4. On suppose φ de classe \mathcal{C}^1 sur I , montrer que f est aussi \mathcal{C}^1 sur I .

Exercice 40 (Centrale PC 2015) [Solution]

Trouver les fonctions f , continues en 0 telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) - f(x) = \ln(1+x^2)$.

indication : justifier que $f(x) - f(0) = \sum_{n \geq 0} (f(2^{-n}x) - f(2^{-(n+1)}x))$ lorsque f est continue en 0.

IV Dérivabilité des séries de fonctions

Exercice 41 (CCINP PSI 2018) [Solution]

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$
2. Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ .
3. Calculer $f(1)$ et trouver un équivalent de $f(p)$, $p \in \mathbb{N}^*$, lorsque p tend vers $+\infty$.

Exercice 42 (IMT PSI 2019) [Solution]

1. Donner le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.
2. Étudier la continuité puis le caractère \mathcal{C}^1 de f .

Exercice 43 (CCINP PSI 2022) [Solution]

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3 + x^2}$

1. Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 44 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soient $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sh} x}$ et $f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 nx}$

1. f est-elle prolongeable par continuité en 0. Montrer que f est bornée sur \mathbb{R}

2. Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ CVS sur \mathbb{R}^* ; on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

3. Montrer que S est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} .

4. Exprimer f_n à l'aide de f et en déduire un équivalent simple de S en 0

5. Montrer que f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 45 (Mines-Télécom PSI 2021) [Solution]

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n [\sqrt{n+x} - \sqrt{n}]$ pour $x \geq 0$.

1. Montrer que f est bien définie

2. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ et \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} ; étudier ses variations.

3. Montrer que $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

indication : raisonner par l'absurde et commencer par vérifier que $f(x) \geq S_{2n+1}(x)$ avant de séparer les termes pairs/impairs.

Exercice 46 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{\ln(1+nx^2)}{n^2}$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

1. Montrer que S est définie sur \mathbb{R}

2. Montrer que S est continue sur \mathbb{R}

3. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R} .

4. Calculer $S(0)$ et $\lim_{+\infty} S$

5. Montrer que S est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

6. Par une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent en 0 de S'

Exercice 47 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soient $u_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2 \ln(1+n)}$ et $S(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$.

1. Trouver le domaine de définition D de S .

2. Montrer que S est continue sur D .

3. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $\sum u'_n(x)$ converge uniformément sur D .

4. Montrer que S est \mathcal{C}^1 sur D .

Exercice 48 (Mines-Télécom PSI 2021) [Solution]

1. Déterminer le domaine de convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ avec $u_n(x) = \frac{1}{n^2x+n}$.

2. Montrer que sa somme S est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} .

3. Montrer que, pour $x > 0$, on a $\left| S(x) - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2x} \right| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3x^2}$ et en déduire un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 49 [Solution]

On note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. f est-elle continue sur son ensemble de définition ?

3. Déterminer $\lim_{+\infty} f$.

4. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} .

5. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 50 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$

2. Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*}
3. f est-elle dérivable en 0? Continue en 0?

Exercice 51 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ et $S(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge pour $x \geq 0$.
2. S est-elle continue sur \mathbb{R}^+ ?
3. Montrer que S est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} .
4. Calculer $S(x)$ pour $x \geq 0$.

Exercice 52 (CCP PSI 2012) [Solution]

1. Montrer que le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$ est \mathbb{R}^+ .
2. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^{+*} .
3. Calculer $f''(x)$ puis $f'(x)$ pour $x > 0$.
4. Montrer que f est non dérivable en 0.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f(x) = f(0) + \int_0^x \ln(1 - e^{-t}) dt$

Exercice 53 (Mines-Ponts PSI 2013) [Solution]

1. Donner le domaine de de définition D de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + x^n)$
2. Montrer que f est continue et dérivable sur D .
En déduire un équivalent de f en 0.
3. Montrer que, pour $x \in [0, 1[$, $\phi : t \mapsto \ln(1 + x^t)$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ et en déduire un équivalent de f en 1.

Exercice 54 (Centrale PSI 2014) [Solution]

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + n^2 x}$.
2. Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} .
3. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x$ et déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 55 (Mines-Ponts PSI 2016) [Solution]

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n(1 + nx^2)}$

1. Déterminer le domaine de définition de f ; étudier sa continuité et sa dérivabilité.
2. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 56 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Pour $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$

1. Montrer que ζ et η sont définies sur $]1, +\infty[$.
2. Montrer que $\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$ pour $x > 1$.
3. Montrer que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$.
4. Montrer que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{1}{x-1} + \gamma + o(x-1)$ où $\gamma = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\eta'(1)}{\ln 2}$.
indication : montrer que η est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+} puis utiliser Taylor-Young et vérifier que $\eta(1) = \ln(2)$.*
5. Montrer que $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$.

indication : il s'agit de trouver une expression de $\eta'(1)$: poser $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$, montrer que $\left(u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \right)$ CV et

relier $\eta'(1)$ avec u_n et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ en séparant les termes pairs et impairs.

Exercice 57 (ICNA PSI 2017) [Solution]

1. Déterminer l'ensemble de définition de $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de ζ .
3. Montrer que $\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$.

Exercice 58 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

1. Déterminer le domaine de définition D de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$ et montrer que f est continue sur D .
2. Montrer que f est C^1 sur \mathbb{R}^{+*} et donner $f'(x)$ sous forme d'une somme.
3. Calculer $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis déterminer un équivalent de $f(x) - l$ en $+\infty$.

Exercice 59 (AADN PSI 2009) [Solution]

1. Domaine de définition et limite en 0 de $f(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + x^2}$.
indication : étudier $f(x) - f(0)$.
2. Montrer que f est C^∞ .
indication : décomposer en éléments simples sur \mathbb{C} .

Exercice 60 (Centrale PSI 2009) [Solution]

1. Déterminer l'ensemble de définition D de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{2n-1}}{1-x^{2n}}$.
2. f est-elle de classe C^1 sur D ? Etudier ses variations.

Exercice 61 (ENSEA-ENSIIE PC 2014) [Solution]

On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t - t^2) dt$

1. Montrer que $\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], 0 \leq u_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$
2. Montrer que $\sum u_n$ converge sur $[0, 1]$ vers une fonction u dérivable telle que $u'(x) = u(x - x^2)$.

Exercice 62 (ENSAM PSI 2014) [Solution]

Soit f continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $a > 0$.

1. Montrer que (f_n) définie par $f_0 = f$ et $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ est bien définie.
2. Montrer que f_n est de classe C^n sur \mathbb{R} , calculer ses dérivées successives et leur valeur en a . En déduire une expression de f_n à l'aide d'une intégrale de f .
3. Montrer l'existence de $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ et donner une expression de g en fonction de f . (*indication : x est fixé*)
4. Montrer que g est solution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et en donner les solutions.

Exercice 63 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]

Soit $f_0 \in C^1([a, b])$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, b]$, $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$.

1. On suppose que $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, b]$ et que les hypothèses du théorème de dérivation des séries de fonctions sont satisfaites. Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ en fonction de f_0 .
2. Montrer que les hypothèses précédentes sont vérifiées si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$
3. Calculer S lorsque $f_0(x) = \sin(2x)$ et $[a, b] = [0, 1]$

V Intégration par convergence uniforme

Exercice 64 [Solution]

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \int_0^1 \frac{ne^{-t} + t^2}{n+t} dt$.

Exercice 65 (Mines-Ponts PSI 2013) [Solution]

On cherche $r = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $e^r = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On pose $P_n = \frac{1}{n!} X^n (bX - a)^n$.

1. Montrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(r)$ sont des entiers pour $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
2. Montrer que $q \int_0^r P_n(t) e^t dt$ est un entier et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(t) e^t dt = 0$. Conclure.

Exercice 66 (ENSIIE PSI 2009) [Solution]

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n définie par $f_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)^2 + t^2} dt$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. En déduire que la suite (f_n) admet une limite simple f puis que f est continue sur \mathbb{R} .
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = \sqrt{y^2 + t^2}$ avec $y(0) = 0$.

Exercice 67 (Mines-Télécom PSI 2019) [Solution]

Soient (α_n) telle que $\sum \alpha_n$ est absolument convergente, $\omega_n \neq 0$ et $u_n(x) = \alpha_n \cos(2\pi\omega_n x)$

1. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et continue sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\int_0^1 f(t) dt$.
3. Justifier que $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}\right)$ converge quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 68 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, on pose $f(x, y) = \int_0^1 t^{xt^y} dt$.

1. Justifier l'existence de $f(x, y)$.
2. On pose $f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n!} (xt^y \ln t)^n & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

3. En déduire $\int_0^1 t^t dt = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

Exercice 69 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) =$

$$\varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} [\varphi(x+n) + \varphi(x-n)].$$

1. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est 1-périodique.

3. Soit g une fonction 1-périodique continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que φg est intégrable sur \mathbb{R} et que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x) dx =$

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

VI Intégrations par convergence dominée

Exercice 70 [Solution]

Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{t}{n}}{1+t^2} dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-\frac{1}{n}} dx \quad ; \quad \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx \quad ; \quad \int_0^1 x^n \frac{\ln x}{(1-x^2)^{1/4}} dx$$

Exercice 71 (CCP MP 2014) [Solution]

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+x^n e^{-x}}$.

Exercice 72 (CCP PSI 2010) [Solution]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Étudier l'intégrabilité sur \mathbb{R}^{+*} de $f : t \mapsto \frac{\arctan t}{t^\alpha}$.
2. Existence de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^{3/2} + t^n} dt$ et limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 73 (CCINP PSI 2018) [Solution]

1. Montrer que $|\sin x| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
2. Montrer l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)} dt$
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ et en trouver un équivalent.

Exercice 74 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4 x^3} dx$, pour $n \geq 1$.

1. Justifier l'existence de I_n .
2. Montrer que $I_n = \frac{1}{n^{5/3}} J_n$ avec $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3} \sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3} dt$.
3. Montrer que $\lim_{+\infty} J_n = K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt$
4. Montrer, par changement de variable que $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt$.
5. En déduire $2K = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3} dt = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$
6. Conclure $I_n \sim \frac{2\pi}{3\sqrt{3}n^{5/3}}$

Exercice 75 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x+n)}{\sqrt{x}(n+x)} dx$

1. Justifier l'existence de I_n , pour $n \geq 1$
2. Déterminer la limite de $(I_n)_{n \geq 1}$
3. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(n+x)}$
4. Déterminer un équivalent de I_n .

Exercice 76 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(nt)}{(1+n^4 t^2)^2} dt$.

1. Justifier l'existence de I_n
2. Limite et équivalent de I_n ?

Exercice 77 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

1. Montrer que $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx$ est définie.
2. Trouver la limite et un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 78 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Soit $I_n = \int_0^1 \ln(x) \ln(1-x^n) dx$, pour $n \geq 1$.

1. Justifier l'existence de I_n .
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
3. Déterminer un équivalent de I_n

Exercice 79 (CCP PSI 2018) [Solution]

1. Résoudre l'équation $\operatorname{sh}(x) = 1$.
2. On pose $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$ et $I_n = \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^n dt$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
3. Montrer que $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$ pour $n \geq 2$.
4. Déterminer un équivalent de I_n .

Exercice 80 (CCINP PSI 2019) [Solution]

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^n t}$

1. Montrer que $I_n(x)$ existe pour $n \in \mathbb{N}$
2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de (I_n)
3. Trouver une relation entre I_n et I_{n+2}
4. En déduire la valeur de $I = \int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^3 t} dt$

Exercice 81 (CCP PSI 2013) [Solution]

Pour $n > 0$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx + x^2}$

1. Montrer que les f_n sont prolongeables par continuité en 0 et intégrables sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la suite de terme général $u_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 82 (CCP PSI 2017) [Solution]

On pose $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)$ si $t \in]0, n]$ et $f_n(t) = 0$ si $t > n$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}^{+*} et déterminer sa limite.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(t) dt$.
3. Sachant que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, montrer que $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt = -\gamma$. On pourra faire le changement de variable $t = nu$ puis une IPP.

Exercice 83 (CCP PSI 2018) [Solution]

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sin(x) & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Étudier la convergence simple de (f_n) .
2. Étudier la convergence de $(v_n)_{n \geq 1}$, où $v_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.
3. a) Étudier les variations de $x \mapsto \ln(1+x) - x$.
b) En déduire que (f_n) converge uniformément.
indication : montrer que $|f_n(x) - f(x)| \leq 1 - e^{n^{1/4} - n \ln(1 - n^{-3/4})}$ si $x \in [0, n^{1/4}]$ et $|f_n(x) - f(x)| \leq 2e^{-x}$ si $x \geq n^{1/4}$

Exercice 84 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soient $f_n(x) = \frac{(1 + \frac{x}{n})^n - 1}{x}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Montrer que I_n est bien définie.

2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \times k!}$

indication : chercher la limite de I_n sous forme d'une intégrale pour commencer

Exercice 85 (Centrale PSI 2011) [Solution]

1. Pour quels entiers n , $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\sin t + t^n} dt$ est-elle définie ?

2. Donner la limite I de (I_n) sous forme d'une intégrale.

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(I_n - I)$ (on pourra faire un changement de variable).

Exercice 86 (Centrale PSI 2007) [Solution]

cours : changement de variable.

Application : équivalent en $+\infty$ de $u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$ où $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ et $f(1) \neq 0$.

Exercice 87 (CCP PSI 2013) [Solution]

Déterminer la limite de $n \int_0^1 t^n f(t) dt$ où f est continue sur $[0, 1]$.

Exercice 88 (Mines-Ponts MP 2011) [Solution]

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{x+1}{x^n e^x + x^2 + x + 1} dx$.

Exercice 89 (ENTPE-EIVP PC 2014) [Solution]

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} dx$

Exercice 90 (Mines-Ponts PSI 2013) [Solution]

Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \int_1^{+\infty} \exp(-x^n) dx$, puis la convergence de la série de terme général u_n .

Exercice 91 (Centrale PSI 2022) [Solution]

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n x}{x^2} dx$

1. Justifier l'existence de u_n pour $n \geq 1$

2. Montrer que $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n$ avec $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n \left(\sqrt{\frac{2t}{n}} \right)}{t\sqrt{t}} dt$.

3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $t \in [0, \alpha]$ alors $\ln(\cos t) \geq -2t^2$

4. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$; on donne $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 92 (ENSEA PSI 2016) [Solution]

1. Énoncer le théorème de convergence dominée.

2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles bornées telles qu'il existe $c < d$ pour lesquels $\forall x \in [c, d], (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ tend vers 0.

Montrer qu'il existe φ_n tel que $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(nx + \varphi_n)$.

3. Calculer $I_n = \int_c^d (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))^2 dx$ et montrer qu'à partir d'un certain rang on a $I_n \geq \frac{(a_n^2 + b_n^2)(d - c)}{4}$.

4. Conclure que (a_n) et (b_n) tendent vers 0.

VII Intégration terme à terme

Exercice 93 (ENSAM PSI 2011) [Solution]

1. Convergence de la série de terme général $(-1)^n a_n$ où $a_n = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} t^n dt$ et calcul de sa somme.

2. Etablir une relation entre a_n et a_{n+2} .

3. Convergence de la série de terme général a_n et calcul de la somme.

Exercice 94 (Mines-Ponts PSI 2010) [Solution]

Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} x} dx$ et expression sous forme d'une série.

Exercice 95 (CCP PSI 2015) [Solution]

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}$ et $I = \int_0^1 x^x dx$ existent.

2. Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $f_{n,p}(t) = t^p (\ln t)^n$. Calculer $\int_0^1 f_{n,p}(t) dt$

3. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

Exercice 96 (Mines-Ponts PSI 2021) [Solution]

Soit $x > 0$; on pose $f(x) = \int_0^1 t^{t^x} dt$. Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(xn+1)^{n+1}}$

Exercice 97 (Mines-Ponts PSI 2007) [Solution]

Pour $a > 0$ et $b > 0$, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+b} = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a} dt$.

Exercice 98 (ENTPE-EIVP PC 2015) [Solution]

Calculer $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x) dx$ de deux façons différentes et en déduire la valeur de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Exercice 99 (CCP PSI 2006) [Solution]

Montrer que $\frac{1}{x^\alpha} \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$ existe pour $x \in]0, 1[$ et $\alpha > 0$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}$

Exercice 100 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$. On donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. Montrer que I existe

2. Montrer que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

Exercice 101 (CCINP PSI 2018) [Solution]

Montrer que $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$ existe et vaut $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{n^3}$

Exercice 102 (CCINP PSI 2022) [Solution]

1. Montrer l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx$

2. Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$

Exercice 103 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t} dt$.

1. Montrer que I converge.

2. Montrer que $\forall t \in]0, +\infty[$, $\frac{\sin t}{\operatorname{sh} t} = 2e^{-t} \sin t \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt}$.

3. Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2 + 1}$.

indication : utiliser $|\sin(t)| \leq t$ pour appliquer le TITT

4. Montrer que : $\frac{\pi}{4} \leq I \leq 1 + \frac{\pi}{4}$.

indication : comparaison série/intégrale

Exercice 104 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

1. Montrer l'existence de $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln(t)}{t^2} dt$.

2. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)^2}$ et en déduire la valeur de I à l'aide de constantes usuelles.

$$\text{indication : } -\ln(1-u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n} \text{ si } |u| < 1$$

Exercice 105 (Centrale PSI 2019) [Solution]

1. Soient $(u_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.

Montrer que $\sum a_n$ converge et en déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

2. Pour $x \in]-1, 0[$, on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^x}{t} dt$.

a) Justifier que f est bien définie.

b) À l'aide de 1, montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x(x-1)\dots(x-n+1)}{n \times n!}$

$$\text{indication : } (1-t)^x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} t^n \text{ si } |t| < 1$$

Exercice 106 (ENSAM PSI 2015) [Solution]

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1} dx$.

2. Montrer que $I(\alpha) = \sum_{n \geq 1} \frac{a}{b+n^2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

3. En déduire un équivalent de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

Exercice 107 (CCINP PSI 2018) [Solution]

Soit (a_n) une suite complexe telle que $\sum |a_n|$ converge.

1. Montrer que $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ est continue sur \mathbb{R}^+ .

2. Montrer que f est intégrable sur \mathbb{R}^+ et calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Exercice 108 (CCINP PSI 2019) [Solution]

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt$ existe.

2. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{1+n^2}$

Exercice 109 (Mines-Ponts PSI 20121) [Solution]

1. Étudier la convergence et la convergence absolue de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}$

2. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} \cos(xt) dt$

Exercice 110 (ENSEA PSI 2018) [Solution]

Nature et somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ avec $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$.

Exercice 111 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt$

2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

Exercice 112 (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]

1. Déterminer le domaine de convergence de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$.

2. Montrer que f est intégrable sur \mathbb{R} et calculer cette intégrale.

indication : pour le calcul de l'intégrale, on a calculé la somme de la série dans le chapitre sur les séries.

Exercice 113 (AADN PSI 2012) [Solution]

1. Montrer que la série de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(t) = t^n \sin(\pi t)$ converge simplement et déterminer la somme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ notée F . Y a-t-il convergence uniforme ?

2. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 114 (CCP PSI 2018) [Solution]

Soit $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge.

indication : montrer que $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ soit par IPP, soit en vérifiant que $\sin(\pi x) \leq \pi(1-x)$

2. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 115 (TPE-EIVP PSI 2018) [Solution]

Existence et valeur de $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$ sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 116 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^+)$. On pose $u_n = \int_0^1 f(t)t^n dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $I = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} dt$.

Montrer que I et $\sum u_n$ sont de même nature. Lien entre les deux en cas de convergence ?

Solutions

Exercice 1 [sujet] 1. (f_n) CS vers 0 sur \mathbb{R} , uniformément sur $[-a, a]$ car $\|f_n\|_{\infty, [-a, a]} = f_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ mais pas sur \mathbb{R}^+ car $f_n(n) = \frac{\pi}{4}$.

2. Si $a > 1$, (f_n) CS sur I vers $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ donc pas de CU sur I (f_n est continue et pas f); par contre

$$\|f_n - 1\|_{\infty, [\alpha, 0]} = \frac{2}{1 + n^a \sin \frac{\alpha}{n}} \text{ donc CU sur } [\alpha, \pi/2] \text{ si } \alpha > 0.$$

Si $a = 1$ alors (f_n) CS vers $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ puis $\left| f_n(x) - \frac{x-1}{x+1} \right| \leq x - n \sin \frac{x}{n} \leq \frac{\pi}{2} - n \sin \frac{\pi}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc CU sur I .

Si $a < 1$ alors (f_n) CS vers -1 et $|f_n(x) + 1| \leq 2n^a \sin(x/n) \leq 2n^a \sin \frac{\pi}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc CU sur I .

Exercice 2 [sujet] (f_n) CS vers 0; si $x \geq a$ alors $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1 + n^2 a^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc CU sur $[a, +\infty[$ et $(f_n(1/n))$ ne tend pas vers 0 donc pas CU sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 3 [sujet] Si $x > 0$ alors $f_n(x) = \frac{2n^2 x^2 + nx + 1}{2n^2 x + 1} \sin^2 \frac{\pi}{x}$ à partir d'un certain rang donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = x \sin^2 \frac{\pi}{x}$ et $f_n(0) = 0$. Si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $|f_n(x) - f(x)| = x \sin^2 \frac{\pi}{x} \leq x \leq \frac{1}{n}$ et si $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{|(n+1)x + 1|}{2n^2 x + 1} \sin^2 \frac{\pi}{x} \leq \frac{(n+1)x + 1}{2n^2 x + 1} \stackrel{\text{étude fct}}{\leq} \frac{1}{n}$ donc $\|f_n - f\|_{\infty} \leq \frac{1}{n}$ donc CVU sur $[0, 1]$

Exercice 4 [sujet] 1. (f_n) CS vers \cos sur \mathbb{R}

2. si $x \in [-a, a]$ alors $|f_n(x) - \cos(x)| = 2 \left| \sin \frac{x}{n} \sin \left(2 + \frac{1}{n}\right) x \right| \leq \frac{2a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc CU sur $[-a, a]$; par contre $|f(n\pi) - \cos(n\pi)| = 2$ donc pas de CU sur \mathbb{R} .

Exercice 5 [sujet] 1. $f(x) = x$ puis, pour $x \geq 0$, $|f_n(x) - x| = \frac{x}{1 + nx} \leq \frac{1}{n}$ alors que si $x < 0$, $|f_n(x) - x| = \frac{-x}{1 + nx^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ (étude de fct) donc CVU sur \mathbb{R} .

2. si $x > 0$, $f'_n(x) = \frac{nx(2x + nx)}{(1 + nx)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, $f'_n(0) = 0$ et pour $x < 0$, $f'_n(x) = \frac{nx^2(3 + nx^2)}{(1 + nx^2)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$; pas de CVU sur $[-1, 1]$ car les f'_n sont continues en 0 et pas la limite simple de f'_n

Exercice 6 [sujet] 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2. $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1 + n^2 a^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc CVUTS de $]0, 1]$

3. f n'est plus continue en 0

4. $\lim u_n = 0$ par TCD avec $|f_n(x)| \leq 1$

5. $u_n \geq e^{-1} \int_0^1 \frac{dx}{1 + n^2 x^2} = \frac{e^{-1}}{n} \arctan(n) \sim \frac{e^{-1}}{n} \frac{\pi}{2}$ donc (SATP) $\sum u_n$ DVG

Exercice 7 [sujet] 1. $|g'_n(t)| = \frac{t}{n} e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{e^t}{t}$ puis par IAF, $|g(t) - g(0)| \leq \frac{te^t}{n}$

2. On a $\left| I_n(x) - \int_0^x 1 dt \right| \leq \int_0^x \left| e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - 1 \right| dt \leq \frac{1}{n} \int_0^x te^t dt \leq \frac{1}{n} \int_0^1 te^t dt$ donc (f_n) CU sur $[0, 1]$ vers $f : x \mapsto \int_0^x dt = x$.

Exercice 8 [sujet] Si $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ alors $f(x) = \sqrt{x}$ (car $f_n(x) \geq 0$) puis $|f_{n+1}(x) - \sqrt{x}| = |f_n(x) - \sqrt{x}| \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + f_n(x))\right) \leq \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) |f_n(x) - \sqrt{x}|$ ce qui donne par récurrence $|f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n = g_n(\sqrt{x})$; on étudie $g_n(t) = t \left(1 - \frac{t}{2}\right)^n$ pour trouver $\|g_n\|_{\infty} = g_n\left(\frac{2}{n+1}\right) \leq \frac{2}{n+1}$ donc $\|f_n - \sqrt{\cdot}\|_{\infty} \leq \|g_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc (f_n) CU sur $[0, 1]$ vers la fonction racine carrée.

Exercice 9 [sujet] 1. on vérifie $g'(y) = 1 - xy \in [0, 1]$ donc (IAF) g est 1-lip et $[0, 1]$ est stable (variations)

2. a) $h_0 \in [0, 1]$ et $h_{n+1}(x) = g\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)$, d'où le résultat par récurrence

b) $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| = \left|g\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right) - g\left(h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right| \stackrel{1\text{-lip}}{\leq} \left|h_n\left(\frac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$

c) On en déduit $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left|h_1\left(\frac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| = \frac{x}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ donc $\sum (h_{n+1}(x) - h_n(x))$ est ACV et (h_n) CVS vers f sur $[0, 1]$. Puis $|f(x) - h_n(x)| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} h_{k+1}(x) - h_k(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n}$ donc $\|f - h_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc (h_n) CVU vers f sur $[0, 1]$

3. par récurrence, on vérifie que h_n est continue sur $[0, 1]$ donc f aussi par CVU; $h_n(0) = 1$ donc $f(0) = 1$ et par passage à la limite dans la relation qui définit $h_n(x)$, on trouve l'équation fonctionnelle de f

Exercice 10 [sujet] 1. $|e^{-t}e^{it}| = e^{-t}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ puis on trouve $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) - \sin(x))$ et $\psi(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))$

2. $\varphi(x) = -e^x \int_0^x e^{-t} \cos(t) dt + e^x \varphi(0)$ donc φ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $\varphi'(x) = \varphi(x) - \cos(x)$. Les solutions sont $y(x) = \alpha e^x + \varphi(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a ensuite $|\varphi(x)| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ donc φ est bornée et y est bornée sur \mathbb{R} si et seulement si $\alpha = 0$

3. Si $f_n = \alpha_n \cos + \beta_n \sin$ alors $f_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \cos + \frac{\beta_n - \alpha_n}{2} \sin$; on a donc $\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; on vérifie ensuite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = 0$ (calculer la puissance) donc $(\alpha_n, \beta_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$ et $\|f_n\|_\infty \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$ et (f_n) CVU vers 0 sur \mathbb{R}

Exercice 11 [sujet] 1. cours

2. $S_{n,0}$ facile; si $k \geq 1$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ donc $S_{n,1}(x) = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} - nx S_{n,0}(x) \stackrel{j=k-1}{=} nx(x + 1-x)^{n-1} - nx = 0$

3. on a $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) - \left(\frac{k}{n} - x\right) f'(x)\right| \leq \frac{M}{2} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2$ avec $M = \max_{[0,1]} |f''|$ (th des bornes atteintes); en sommant et avec l'inég triangulaire, on obtient $\left|B_n(f) - S_{n,0}(x)f(x) - \frac{1}{n} S_{n,1}(x)f'(x)\right| \leq \frac{M}{2n^2} S_{n,2}(x)$ qui donne le résultat. $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ donc $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{M}{8n}$ donc $(B_n(f))$ CVU sur $[0, 1]$ vers f .

Exercice 12 [sujet] 1. On a $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pour $x \in [0, 1]$ fixé donc $\sum u_n$ CS sur $[0, 1]$. De plus $\|u_n\|_\infty =$

$u_n\left(\frac{a}{a+nb}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{a}{b}\right)^a e^{-a} \frac{1}{n^{a-c}}$ donc CN sur $[0, 1]$ si et seulement si $a - c > 1$.

2. $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CS sur \mathbb{R}^{+*} . Puis $u'_n(x) = n(\alpha - 2nx^2)x^{\alpha-1}e^{-nx^2}$ on discute sur le signe de α :

— Si $\alpha < 0$ alors u_n n'est pas bornée sur \mathbb{R}^{+*} donc la CN n'a même pas de sens.

— Si $\alpha = 0$ alors $\|u_n\|_\infty = \lim_{x \rightarrow 0} u_n(x) = n$ donc pas de CN.

— Si $\alpha > 0$ alors $\|u_n\|_\infty = u_n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}\right) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\alpha/2} \times \frac{1}{n^{\alpha/2-1}}$ donc CN si et seulement si $\alpha/2 - 1 > 1$

Exercice 13 [sujet] 1. (f_n) CVS vers 0 sur $[0, 1]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$; $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{e}$ donc (f_n) CVU sur $[0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$

2. $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f_n$ CVS sur $[0, 1]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$; d'après la première question, $\sum f_n$ CVN sur $[0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 0$. Si $\alpha \geq 0$ alors $R_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \geq n \times (n+1)^\alpha \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \sim \frac{n^\alpha}{e^2}$ qui ne tend pas vers 0 donc pas de CVU sur $[0, 1]$

Exercice 14 [sujet] 1. (f_n) CVS sur \mathbb{R} vers 0; $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{4}{n}\right) = \frac{4e^{-4}}{n}$ donc CVU sur \mathbb{R} .

2. $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$ donc ACV sur \mathbb{R} ; pas de CVN sur \mathbb{R} avec la première question mais CVN sur $E = \mathbb{R} \setminus]-a, a[$ car $\|f_n\|_{\infty, E} = f_n(a)$ pour n grand et la CVS en a donne la CVN sur E .

Exercice 15 [sujet] 1. $g'_n(x) = \cos^n x [(n+1)\cos(x) - n]$ donc $\|g_n\|_{\infty} = g_n\left(\arccos \frac{n}{n+1}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

2. $\|f_n\|_{\infty} \leq \frac{\pi}{2} \|g_n\|_{\infty} \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc (f_n) CVU sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers 0.

$\sum f_n$ CVS sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $S(x) = \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}$ si $x \neq 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 2$ alors que $S(0) = 0$ donc pas de CVU sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Il y a par contre CVN sur tout segment de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ car $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq b \cos^n(a)$ (car \cos décroît sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) et $|\cos(a)| < 1$.

Exercice 16 [sujet] 1. si $|\cos(x)| < 1$ alors $\sum u_n(x)$ CV et $u_n(0) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ CV aussi. Puis $f(x) =$

$$\sum_{n \geq 0} u_n(x) = \frac{\sin^\alpha x}{1 - \cos(x)} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

2. $\|u_n\|_{\infty} = u_n\left(\arctan \sqrt{\frac{\alpha}{n}}\right) = \left(\frac{\sqrt{\alpha/n}}{1 + \alpha/n}\right)^\alpha \left(\frac{1}{1 + \alpha/n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha^{\alpha/2} e^{-\alpha} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ donc CN sur $[0, \pi/2]$ si et seulement si $\alpha > 2$.

Si $\alpha \leq 2$ alors $\frac{\sin^\alpha x}{1 - \cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x^{\alpha-2}$ donc f n'est pas continue en 0; comme les u_n sont continue en 0, la convergence n'est pas uniforme non plus.

Exercice 17 [sujet] 1. (f_n) CS vers 0 sur \mathbb{R}^+ et $\|f_n\|_{\infty} = f_n(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc (f_n) CVU vers 0 sur \mathbb{R}^+ .

2. $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers 1 et la convergence ne peut pas être uniforme sur \mathbb{R}^+ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

On a par contre CN sur tout segment puisque $\|f_n\|_{\infty, [0, a]} \leq \frac{a^n}{n!}$

Exercice 18 [sujet] 1. Étudier 2 fonctions

2. On vérifie $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ donc $1 + \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} > 0$ puis $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right) = \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série CVS sur \mathbb{R} .

On a $\left|f_n(t) - \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right| \leq 2 \frac{x^2}{n^2(1+x^2)^2}$ car $\left|\frac{x}{n(1+x^2)}\right| \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2}$. On en déduit $\left\|f_n(t) - \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right\|_{\infty} \leq \frac{2}{4n^2} = \frac{1}{2n^2}$; de plus $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x}{n(1+x^2)} = \frac{x}{1+x^2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ CVU sur \mathbb{R} (la somme est une constante). Comme

$\sum_{k=1}^n f_k(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x}{k(1+x^2)} + \sum_{k=1}^n \left(f_k(t) - \frac{(-1)^k x}{k(1+x^2)}\right)$, somme d'une série CVU et d'une série CVN sur \mathbb{R} , on en déduit $\sum f_k$ CVU sur \mathbb{R} .

Exercice 19 [sujet] 1. $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n \ln x}$ donc $\sum f_n$ CS sur $]1, +\infty[$

2. La convergence absolue n'étant vérifiée que sur $]e^2, +\infty[$, il ne peut pas y avoir CN sur $]1, +\infty[$.

3. Par CSSA, on a $|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1) \ln x} \leq \frac{1}{(n+1) \ln a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc CU sur $[a, +\infty[$ si $a > 1$; comme les f_n sont continues sur $]1, +\infty[$, on en déduit que la somme est aussi continue sur $]1, +\infty[$.

4. $\left|f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right| = \exp\left[-\ln(n) \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\|f_n\|_{\infty} \geq 1$. Si on avait CU sur $]1, +\infty[$, on aurait $\|f_n\|_{\infty} = \|R_{n-1} - R_n\|_{\infty} \leq \|R_{n-1}\|_{\infty} + \|R_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 20 [sujet] 1. $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2. $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} = f_n(b)$ donc CN sur tout segment

3. $S(x+1) - S(x) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} \right) = \frac{1}{1+x}$ par télescopage; on a $S(x) = -\frac{1}{1+x} + S(x+1) \stackrel{-1}{=} -\frac{1}{1+x} + S(0) + o(1)$ par continuité de S en 0.
4. $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ donc non

Exercice 21 [sujet] 1. $D = \mathbb{R}^+$.

2. CVNTS avec $|f_n(x)| \leq \frac{b}{n^{1+a}}$ et $1+a > 0$.
3. $f(x) \geq f_1(x) + \int_1^{+\infty} \frac{x}{t^{1+x}} dt = x+1$ donc f ne tend pas vers $f(0) = 0$ en 0
4. $\lim_{+\infty} f - id = 0$ par double limite avec CVN sur $[1, +\infty[$ car f_n décroît sur $\left[\frac{1}{\ln(n)}, +\infty \right]$.

Exercice 22 [sujet] 1. Si $x > 1$ alors $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$ donc $\sum u_n(x)$ CV, $u_n(1) = 0$ et si $x < 1$, $\sum u_n(x)$ DVG. Ainsi, $D_f = [1, +\infty[$.

2. On a $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n \ln(n)}$ et $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ DV (Bertrand)
3. Si $x > 1$, $|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^k \ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{\ln(x)/x^{n+1}}{1-1/x} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{\ln(x)}{x-1} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$ car on vérifie que $\ln(x) \leq x-1$. L'inégalité finale reste aussi valable si $x = 1$ donc $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la série CU sur $[1, +\infty[$ et comme les u_n sont continues sur ce domaine, on en déduit que la somme de cette série est elle aussi continue sur $[1, +\infty[$.

Exercice 23 [sujet] 1. On a $u_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CS sur \mathbb{R}^{+*} ; $R_n(1/n) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{e^{-k/n}}{k+1} \geq e^{-2} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1} \geq e^{-2} \frac{n}{2n+1}$ ne tend pas vers 0 donc $\|R_n\|_\infty$ non plus.

2. On a $\|u_n\|_{\infty, [a, b]} \leq u_n(a)$ donc CN sur tout segment de \mathbb{R}^{+*} puis f est continue. De même $\|u'_n(x)\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{ne^{-na}}{1+n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u'_n$ CN sur tout segment de \mathbb{R}^{+*} d'où la classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} .

3. En $+\infty$: $\|u_n\|_{\infty, [1, +\infty[} = u_n(1)$ donc CN sur $[1, +\infty[$, le théorème de double limite s'applique et $\lim_{+\infty} f = 1$.

En 0: f est décroissante donc admet une limite $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$; si $l \neq +\infty$ alors $l \geq f(x) \geq \sum_{n=0}^N u_n(x)$ pour

tout $N \in \mathbb{N}$; en faisant tendre x vers 0 dans l'inégalité (somme finie), on aurait $l \geq \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1}$ ce qui est absurde

puisque cette somme partielle de SATP DV vers $+\infty$. On a donc $l = +\infty$.

Exercice 24 [sujet] 1. On a $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq b^{2-\alpha} e^{-na} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CN sur tout segment de \mathbb{R}^{+*} et la f est continue sur \mathbb{R}^{+*} .

2. $\|f_n\|_\infty = u_n\left(\frac{2-\alpha}{n}\right) = (2-\alpha)^{2-\alpha} e^{\alpha-2} \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ donc CN sur \mathbb{R}^{+*} si et seulement si $\alpha < 1$.

3. Si $\alpha = 1$ alors $f(x) = \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ et comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$, le théorème de double limite assure qu'il n'y a pas CU sur \mathbb{R}^{+*} .

Exercice 25 [sujet] 1. Comme $\ln\left(1 - \frac{k}{t}\right) \leq -\frac{k}{t}$ (si $k < t$) donc $\|u_k\|_\infty \leq e^{-k}$ donc CN sur $[1, +\infty[$.

2. $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{p=1}^{n-1} \left(1 - \frac{p}{n}\right)^n = \sum_{p=1}^{n-1} u_p(n) = f(n)$; on calcule alors la limite de f en $+\infty$ par le théorème de double

limite: $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_k(t) = e^{-k}$ donc $\lim_{+\infty} f = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k} = \frac{1}{e-1}$.

Exercice 26 [sujet] 1. Si $x > 0$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-nx}$ donc CS sur \mathbb{R}^* par imparité

2. $e^x f(x) = \sum_{n \geq 1} g_n(x)$ avec $|g_n(x)| \leq \frac{2}{e^{n-1} - 1}$ si $x \geq 1$ donc $\sum g_n$ CN sur $[1, +\infty[$ et le théorème de double limite permet de conclure
3. $f_n(x)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4e^{-2nx}$ donc CS sur \mathbb{R}^* aussi. On trouve de même $\sum_{n \geq 1} f_n(x)^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 4e^{-2x}$

Exercice 27 [sujet] 1. f_n est impaire et, si $x > 0$, $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-nx}$ et $0 < e^{-x} < 1$ donc $D = \mathbb{R}^*$

2. CVNTS de \mathbb{R}^{+*} avec $|f_n(x)| \leq f_n(a)$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$
3. f_n décroît sur \mathbb{R}^{+*} donc f aussi

4. $\frac{\text{sh } x}{\text{sh } nx} = e^{-(n-1)x} \frac{1 - e^{-2x}}{1 - e^{-2nx}} \leq e^{-(n-1)x}$. On a alors $0 \leq f(x) - \frac{1}{\text{sh } x} = \frac{1}{\text{sh } 2x} + \sum_{n=3}^{+\infty} f_n(x) \leq \frac{1}{\text{sh } 2x} + \sum_{n=3}^{+\infty} e^{-(n-1)x} = \frac{1}{\text{sh } 2x} + \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}} \underset{+\infty}{=} o(e^{-x})$ et $\frac{1}{\text{sh } x} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-x}$

Exercice 28 [sujet] 1. Si $|a| < 1$ alors $\frac{a^n}{x+n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a^n)$ donc CS sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, idem pour $a = -1$ par CSSA ; pour $a = 1$ ou $|a| > 1$ la série DV

2. $|u_n(x)| \leq a^n$ si $n \geq 1$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ CN sur \mathbb{R}^{+*}

3. $aS(x+1) = S(x) - \frac{1}{x}$ donc $S(x) = aS(x+1) + \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ car $S(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} S(1)$ par continuité (donc $o\left(\frac{1}{x}\right)$)

4. $xS(x) - \frac{1}{1-a} = \sum_{n \geq 0} a^n \left(\frac{x}{x+n} - 1 \right) = - \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{1+x/n}$ puis $\left| \frac{a^n}{1+x/n} \right| \leq a^n$ donc la série CN sur $[1, +\infty[$ et le théorème de double limite donne la réponse.

Exercice 29 [sujet] 1. si $x > 0$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc CS sur \mathbb{R}^{+*} et DVG si $x \leq 0$.

2. si $x \geq a$ alors $|f_n(x)| \leq f_n(a)$ donc CN sur $[a, +\infty[$ mais $\|f_n\|_\infty = 1$ donc pas sur \mathbb{R}^{+*} .
3. f est continue par CN sur tout segment et $\lim_{+\infty} f = 0$ par CN sur $[1, +\infty[$ et théorème de double limite.
4. Comparaison série intégrale et changement de variable $u = x\sqrt{t}$ dans $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt$.

Exercice 30 [sujet] 1. si $x > 0$, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et DVG si $x \leq 0$

2. $|f_n(x)| \leq f_n(a)$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

3. $x^k f(x) = \sum_{n \geq 1} g_n(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = 0$ et $|g_n(x)| \leq g_n(a) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pour $n \geq \left(\frac{k}{a}\right)^2$ dont le th de dble limite donne la réponse

Exercice 31 [sujet] 1. $D_f = \mathbb{R}^*$ et f est paire. f est continue par CVNTS de \mathbb{R}^{+*} avec $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} = f_n(a)$

2. Par double limite, $\lim_{+\infty} f = 1$ par CVN sur $[1, +\infty[$ avec $\|f_n\|_{\infty, [1, +\infty[} = f_n(1)$

3. Par comparaison série intégrale, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt \stackrel{u=xt}{=} \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$
ce qui donne $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

4.
5.

Exercice 32 [sujet] 1. CSSA

2. $|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ si $n \geq 1$ donc $\sum_{n \geq 1} f'_n$ CN sur \mathbb{R}^{+*} (et f_0 est aussi \mathcal{C}^1); $f'(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ vérifie le CSSA donc $f'(x)$ est du signe de $f'_0(x) \leq 0$

3. Par télescopage $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$; par continuité de f en 1, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - f(1) + o(x) \sim \frac{1}{x}$ et avec la décroissance de f , on a $\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{2(x-1)}$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$

Exercice 33 [sujet] 1. Si $x \in]-1, 1[$ alors $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$ décroît vers $+\infty \sim x^n$ donc $\sum f_n(x)$ est ACV ; si $x \in [-a, a] \subset]-1, 1[$, $|f'_n(x)| \leq \frac{na^{n-1}}{(1-a^n)^2} \sim na^{n-1}$ donc $\sum f'_n$ CN sur tout segment de $] -1, 1[$

2. Calcul de l'intégrale facile. Par décroissance de φ_x , on a $\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq f(x) \leq f_1(x) + \int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{\ln x} \sim \frac{\ln(1-x)}{x-1}$

Exercice 34 [sujet] 1. Si $x \in]-1, 1[$ alors $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x^n$ donc $\sum f_n(x)$ est ACV ; si $x \in [-a, a] \subset]-1, 1[$, $|f'_n(x)| \leq \frac{na^{n-1}}{(1-a^n)^2} \sim na^{n-1}$ donc $\sum f'_n$ CN sur tout segment de $] -1, 1[$

2. $v_n(x) = \frac{(-1)^n}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^n}}$ donc $\sum v_n(x)$ vérifie le CSSA ; on a donc $|R_n(x)| \leq |v_{n+1}(x)| \leq |v_{n+1}(1)| = \frac{1}{n+1}$ car $|v_n|$ est une fonction croissante sur $[0, 1]$.

On en déduit, par double limite, $(1-x)f(x) = \sum_{n \geq 1} v_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{-\ln 2}{1-x}$

Exercice 35 [sujet] 1. Cours

2. $\int_0^x e^{-\sqrt{t}} dt \stackrel{u=\sqrt{t}}{=} 2 \int_0^{\sqrt{x}} ue^{-u} du$; on trouve ensuite $t \mapsto -2e^{-\sqrt{t}}(\sqrt{t} + 1)$

3. a) Si $x \in]0, 1[$, $e^{\sqrt{t} \ln(x)} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ alors que si $x \geq 1$, $x^{\sqrt{t}} \geq 1$ donc $D_I =]0, 1[$ puis $I(x) \stackrel{u=t(\ln x)^2}{=} \frac{1}{(\ln x)^2} \int_{(\ln x)^2}^{+\infty} e^{-\sqrt{u}} du$
donc $I(x) = 2 \frac{x(1-\ln x)}{(\ln x)^2}$

b) S est définie sur $]0, 1[$ (mêmes arguments que pour I) et par comparaison série/intégrale, on trouve $I(x) \leq S(x) \leq 1 + I(x)$ donc $S(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{2}{(\ln x)^2} \sim \frac{2}{(1-x)^2}$

Exercice 36 [sujet] 1. $u_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(t^n)$ donc CS sur $[0, 1[$; $u_n(1) = 0$ et DVG si $t > 1$ car $H_n \leq n$. La fonction u_n est décroissante (et négative) sur $]0, e^{-1/n}]$ donc si n est assez grand (dépendant de a), $\|u_n\|_{\infty,]0, a]} = -u_n(a)$ donc CN sur $]0, a]$; par contre $\|u_n\|_{\infty} = u_n(e^{-1/n}) = \frac{e^{-1}}{nH_n}$ donc avec $H_n \sim \ln(n)$, pas de CN sur $]0, 1[$ (Bertrand).

2. Si $t \in]0, 1[$, $|R_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k |\ln(t)|}{H_{n+1}} = \frac{-\ln(t)t^{n+1}}{H_{n+1}(1-t)} \leq \frac{-\ln(t)t}{H_{n+1}(1-t)}$; la fonction $t \mapsto \frac{-\ln(t)t}{1-t}$ est prolongeable par continuité au segment $[0, 1]$ donc bornée ; $|R_n(t)| \leq \frac{C}{H_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (valable si $t = 1$) aussi donc CU sur $]0, 1]$ et S est continue sur $]0, 1]$.

$\frac{S(t) - S(1)}{t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \ln(t)}{H_n(t-1)}$ et il existe $K > 0$ tel que si $t \in [1/2, 1[$, $\frac{\ln(t)}{t-1} \geq K$ puis $\frac{S(t) - S(1)}{t-1} \geq K \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{H_n} \geq -K \ln(1-t)$ car $H_n \leq n$; on a donc $\frac{S(t) - S(1)}{t-1} \xrightarrow{t \rightarrow 1} +\infty$ donc S n'est pas dérivable en 1.

Exercice 37 [sujet] 1. Si $x > 0$ $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-nx}$ donc la série CV car $|e^{-x}| < 1$ puis DVG pour $x \leq 0$ et $D = \mathbb{R}^{+*}$.

2. $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} = f_n(a)$ donne la continuité ; toutes les f_n sont strictement décroissantes donc f aussi.

3. $\lim_{+\infty} f = 0$ par double limite avec $\|f_n\|_{\infty, [1, +\infty[} = f_n(1)$.

4. Pour $x > 0$, on trouve $\int_1^{+\infty} \ln(1 + e^{-xt}) dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-xt}) dt$; on trouve $\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-xt}) dt \stackrel{y=e^{-xt}}{=} \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, par CVU sur $[0, 1]$ car $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$, et comme $\left| \int_0^1 \ln(1 + e^{-xt}) dt \right| \leq \ln 2$, on trouve le même équivalent pour le terme de gauche et $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi^2}{12x}$

Exercice 38 [sujet] 1. On prouve par récurrence que $u_n(x) \geq 1$ donc $(u_n(x))$ est définie. $u_{n+1}(x) - u_n(x) \geq 0$ donc $(u_n(x))$ croît ; si elle CV vers ℓ alors on a $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$ qui n'a pas de solution donc $\lim u_n(x) = +\infty$.

2. $\sum f_n(x)$ CV par CSSA avec la question 1

3. Par CSSA, $\|R_n\|_\infty \leq \|f_{n+1}\|_\infty = f_{n+1}(1)$ car u_n est croissante sur $[1, +\infty[$: $u'_{n+1}(x) = u'_n(x) \frac{u_n(x)^2 - 1}{u_n(x)^2} \geq 0$ par récurrence. La CVS de (f_n) en 1 donne la CVU de $\sum f_n$ sur $[1, +\infty[$ puis la continuité de f (les f_n sont continues par récurrence).
Par contre $\|f_n\|_\infty = |f_n(1)| = u_{n+1}(1) - u_n(1)$ donc $\sum f_n(1)$ DV (série télescopique)

Exercice 39 [sujet] 1. $\left| \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \leq C \frac{a}{2^n}$ donc CVN sur I

2. facile

3. si f et g sont solutions et $u = f - g$, on a $u(x) = u\left(\frac{x}{2}\right) \stackrel{\text{rec}}{=} u\left(\frac{x}{2^n}\right)$ et, comme u est continue en 0, en faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve $u(x) = u(0) = 0$ donc u est nulle. Il y a donc une unique solution (qui est S)

4. si $u_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ alors $|u'_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \|\varphi'\|_\infty$ car φ' est continue donc bornée sur le segment I . $\sum u'_n$ CVN sur I donc S est \mathcal{C}^1 .

Exercice 40 [sujet] Si f est solution alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(2^{-n}x) = f(0)$ par continuité en 0 de f donc $f(x) = f(0) + \sum_{n \geq 0} (f(2^{-n}x) - f(2^{-(n+1)}x))$ par télescopage puis $f(x) = f(0) + \sum_{n \geq 0} \ln\left(1 + \frac{x^2}{4^{n+1}}\right)$. Réciproquement, toute fonction

de cette forme est solution car continue sur \mathbb{R} par CN sur tout segment : $\|f_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{a^2}{4^{n+1}}$.

Exercice 41 [sujet] 1. $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$ (si $x \neq 0$) donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^{-*}$

2. $\|f'_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \frac{1}{n^2}$ donc $\sum f'_n$ CVN sur \mathbb{R}^+ .

3. $f(1) = 1$ par télescopage et $f(p) = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(p)$.

Exercice 42 [sujet] 1. $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ donc f est définie et continue sur \mathbb{R} .

2. $f'_n(x) = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$ donc $\sum f'_n$ CVN sur tout segment de \mathbb{R}^{+*} car $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} = f'_n(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 a^2}$ donc f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* (f est impaire) mais f n'est pas \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} : si on suppose f' continue en 0, on a, pour $x > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, $f'(x) \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(1+k^2x^2)}$ puis en faisant tendre x vers 0 (somme finie et on a supposé $\lim_0 f' = f'(0)$), on aurait $f'(0) \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, ce qui est absurde car $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = +\infty$.

Exercice 43 [sujet] 1. $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$

2. $\sum f'_n$ CVNTS $[-a, a]$ de \mathbb{R} car, si $|x| \leq a$, $|f'_n(x)| \leq \frac{n|\sin nx|}{n^3 + x^2} + \frac{2|x \cos nx|}{(n^3 + x^2)^2} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{2a}{n^6}$

Exercice 44 [sujet] 1. $\lim_0 f = 1$ et par convexité de sh sur \mathbb{R}^+ , on a $\text{sh}(x) \geq x \geq 0$ donc $0 \leq f(x) \leq 1$ sur \mathbb{R}^+ donc sur \mathbb{R} par parité.

2. $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

3. On applique le théorème de dérivation avec $|f'_n(x)| = \frac{2n \text{ch}(nx)}{\text{sh}^3 nx}$ qui décroît (redériver) donc $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} = \frac{2n \text{ch}(na)}{\text{sh}^3 na} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

4. $f_n(x) = \frac{f(nx)^2}{n^2 x^2}$ donc $S(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(nx)^2}{n^2}$ et par double limite, $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(nx)^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ car $\left| \frac{f(nx)^2}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ donc CVN sur $]0, 1[$

5. $\frac{1}{f(x)} = \frac{\text{sh} x}{x}$ est \mathcal{C}^∞ car DSE sur \mathbb{R} (utiliser le DSE de sh) et ne s'annule pas car $f(0) = 1$ donc f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}

Exercice 45 [sujet] 1. Par CSSA avec $\sqrt{n+x} - \sqrt{n} = \frac{x}{\sqrt{n+x} + \sqrt{n}}$

2. CVUTS sur \mathbb{R}^+ avec CSSA et $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \sqrt{n+1+b} - \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R}^+ .

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n+x}} \text{ donc CVUTS par CSSA avec } \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f'_k(x) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{n+a}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \text{ (pas sur } \mathbb{R}^+ \text{ car } f_0 \text{ n'est pas}$$

dérivable en 0). Puis $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{\sqrt{n+x}} \geq 0$ tjs par CSSA

3. Si f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$ alors f CV vers ℓ (croissante) et $f(x) \leq \ell$. Comme $R_n(x)$ est du signe de $f_{n+1}(x)$, $R_{2n+1}(x) \geq 0$ donc $\ell \geq f(x) = S_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x) \geq S_{2n+1}(x) = \sum_{p=0}^n f_{2p}(x) - f_{2p+1}(x)$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{2p}(x) - f_{2p+1}(x) = \sqrt{2p+1} - \sqrt{2p}$, en faisant tend x vers $+\infty$ (somme finie), on aurait $\ell \geq \sum_{p=0}^n \sqrt{2p+1} - \sqrt{2p}$, pour tout n ; ce qui est absurde puisque c'est la somme partielle d'une SATP DV

Exercice 46 [sujet] 1. $u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

2. $\|u_n\|_{\infty, [-a, a]} = u_n(a)$ donc CVNTS

3. u_n n'est pas bornée sur \mathbb{R}

4. $S(0) = 0$ et $S(x) \geq u_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

5. $u'_n(x) = \frac{2x}{n(1+nx^2)}$ donc $\|u'_n\|_{\infty} = u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n^{3/2}}$

6. $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{t(1+tx^2)} dt \leq S'(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{2x}{t(1+tx^2)} dt + u'_1(x)$ donc $S'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -4x \ln(x)$

Exercice 47 [sujet] 1. Si $x \neq 0$ alors $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$ et $u_n(0) = 0$ donc $D = \mathbb{R}$ (et S est paire).

2. $\|u_n\|_{\infty, [-a, a]} = u_n(a)$ donc CN sur tout segment de \mathbb{R} .

3. Pour $x > 0$, $0 \leq u'_n(x) = \frac{2x}{\ln(1+n)(1+n^2x^2)} \leq \int_{n-1}^n \frac{2x}{\ln(1+t)(1+t^2x^2)} dt$ donc $\sum u'_n(x)$ CS et $0 \leq R_n(x) \leq \int_n^{+\infty} \frac{2x}{\ln(1+t)(1+t^2x^2)} dt \leq \frac{1}{\ln(1+n)} \int_n^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2t^2} dt = \frac{2}{\ln(1+n)} \left[\arctan(xt) \right]_{t=n}^{t=+\infty} \leq \frac{\pi}{\ln(1+n)}$ donc CVU sur \mathbb{R}^+ puis sur \mathbb{R} par imparité.

4. Facile

Exercice 48 [sujet] 1. $f_n(0) = \frac{1}{n}$ et $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{xn^2}$ (signe fixe) donc $D_S = \mathbb{R} \setminus \{-1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$

2. $f'_n(x) = \frac{-1}{n(nx+1)^2}$ donc $\|f'_n\|_{\infty}^{[a, b]} = \frac{1}{n(na+1)^2} \sim \frac{1}{n^3 a^2}$ donc $\sum f'_n$ CVNTS de \mathbb{R}^{+*}

3. $\left| S(s) - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 x} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 x (nx+1)} \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ donc $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 49 [sujet] 1. Si $x < 0$ alors DVG et sur \mathbb{R}^+ , $\|f_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{1+n^2}$ donc CS et CN sur \mathbb{R}^{+*}

2. oui : cf 1.

3. Par double limite et CN sur \mathbb{R}^+ , $\lim_{+\infty} f = 1$

4. Si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} = \frac{ne^{-na}}{1+n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum f'_n$ CN sur tout segment de \mathbb{R}^{+*}

5. $-f'(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n^2+1} e^{-nx}$ est décroissante donc admet une limite $l \in \mathbb{R} \cap +\infty$ en 0; si $l \neq +\infty$ alors pour tout N ,

on a $l \geq \sum_{n=0}^N \frac{n}{n^2+1} e^{-nx}$ puis quand $x \rightarrow 0$ (somme finie), $l \geq \sum_{n=0}^N \frac{n}{n^2+1}$ ce qui est absurde puisque la somme

partielle de cette SATP DV vers $+\infty$; on a donc $\lim_0 f' = -\infty$ et comme f est continue sur \mathbb{R}^+ , par le TAF, on

obtient que $\lim_0 \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_0 f' = -\infty$

Exercice 50 [sujet] 1. $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ si $x > 0$, $f_n(0) = 0$ et DVG si $x > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^+$.

2. Si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{e^{-na}(1+nb)}{\ln n}$ donc $\sum f'_n$ CVN sur tout segment de \mathbb{R}^{+*}
3. $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \sum_{n \geq 2} \frac{e^{-nx}}{\ln n}$ est une fonction décroissante donc tend vers $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 0; comme la série

est à termes positifs, on a $g(x) \geq \sum_{n=2}^N \frac{e^{-nx}}{\ln n}$ pour tout $N \geq 2$; si on suppose l finie, quand $x \rightarrow 0$, on obtient

$l \geq \sum_{n=2}^N \frac{1}{\ln n}$ pour tout N ce qui est absurde (somme partielle d'une SATP DV). On en déduit $l = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

On prouve la CVU de $\sum f_n$ sur \mathbb{R}^+ (car il n'y a pas CVN) : $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k \geq n+1} x e^{-kx} = \frac{1}{\ln(n+1)} \times \frac{x e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} \leq \frac{C}{\ln(n+1)}$ car $x \mapsto \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ est bornée sur \mathbb{R}^{+*} .

Exercice 51 [sujet] 1. CSSA (indispensable pour $x = 0$)

2. CVU sur \mathbb{R}^+ car, par CSSA, $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$

3. CVNTS de $\sum u'_n$ car $|u'_n(x)| \leq e^{-na}$ pour $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

4. On a aussi $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ donc $S(x) = -\ln(1 - e^{-x}) + C$ pour $x > 0$. On trouve ensuite $C = 0$ car $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$ par double limite (et CVU sur \mathbb{R}^+) et on étend à $x = 0$ par continuité de S en 0 (donc $S(0) = -\ln(2)$)

Exercice 52 [sujet] 1. Sur \mathbb{R}^+ , $\|f_n\|_{\infty} = \frac{1}{n^2}$ donc CN sur \mathbb{R}^+ et DVG si $x < 0$.

2. Continue sur \mathbb{R}^+ par CN sur \mathbb{R}^+ . Puis $u'_n(x) = \frac{-e^{-nx}}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-nx})$ donc $\sum f'_n$ CS sur \mathbb{R}^{+*} et si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|u''_n\|_{\infty, [a, b]} = e^{-na}$ donc $\sum u''_n$ CN sur tout segment de \mathbb{R}^{+*}

3. $f''(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ puis $f'(x) = C + \ln(1 - e^{-x})$ avec $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} f' = 0$ car $\|f'_n\|_{\infty, [1, +\infty[} = \frac{e^{-n}}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-n})$ donc $\sum f'_n$ CN sur $[1, +\infty[$ et le théorème de double limite donne la limite de f' en $+\infty$.

4. On a $\lim f' = -\infty$ et f est continue sur \mathbb{R}^+ donc le TAF donne f non dérivable en 0.

5. $t \mapsto \ln(1 - e^{-t})$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}^{+*} (car $\underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$) donc $x \mapsto \int_0^x \ln(1 - e^{-t}) dt$ est la primitive de f' qui tend vers 0 en 0, c'est donc $f - f(0)$.

Exercice 53 [sujet] 1. Si $|x| < 1$ alors $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x^n$ donc la série est ACV, si $x \geq 1$, DVG et si $x \leq -1$ les termes n'existent pas

2. $\|u_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq a^n$ donc CN sur tout segment de $] -1, 1[$ puis continuité sur $] -1, 1[$; $\|u'_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq n a^{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u'_n$ CN sur tout segment de $] -1, 1[$. On a alors $f'(0) = 1$ et par Taylor-Young, $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

3. ϕ est continue par morceaux sur \mathbb{R}^+ et $\phi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{t \ln(x)}$ avec $\ln(x) < 0$ donc ϕ est intégrable sur \mathbb{R}^+ . Par comparaison à une intégrale, f est équivalente en 1 à $\int_0^{+\infty} \phi(t) dt \stackrel{u=e^{t \ln(x)}}{=} \frac{-1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} dt$

Exercice 54 [sujet] 1. Si $x \neq 0$ alors $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1/x}{n^2}$ (signe fixe) donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

2. Si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{n^2 a^2}$ donc $\sum f'_n$ CN sur tout segment de \mathbb{R}^{+*}

3. Par comparaison avec une intégrale, f est équivalente à $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2 x}$ en 0 puis calculer cette intégrale.

En $+\infty$, $xf(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + n/x}$ qui CN sur \mathbb{R}^{+*} par $\left| \frac{1}{n^2 + n/x} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ et le théorème de double limite donnera

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 55 [sujet] 1. Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{xn^2}$ et $f_n(0) = 0$ donc CS sur \mathbb{R} (et impaire). De plus, si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{b}{n(1+na^2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b}{an^2}$ donc CN sur tout segment de \mathbb{R}^{+*} et continuité sur \mathbb{R}^{+*} ; de même $\|f'_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1+nb^2}{n(1+na^2)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b^2}{a^2n^2}$ donc $\sum f'_n$ CN sur tout segment de \mathbb{R}^{+*} et f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} .

Pour la continuité en 0 : si $x > 0$, par comparaison à une intégrale, f est équivalente en 0 à $\int_1^{+\infty} \frac{x dt}{t(1+tx^2)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2x \ln(x)$ donc f est bien continue en 0 mais pas dérivable car le même calcul donne $\frac{f(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$

2. $xf(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1/x^2)}$ et $\left| \frac{1}{n(n+1/x^2)} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ donc CN sur $[1, +\infty[$ et me théorème de double limite donne $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 56 [sujet] 1. Fait en cours

2. Fait en cours (séparer les termes pairs et impairs dans $\eta(x)$)

3. Fait en cours

4. η est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} fait en cours puis $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{1}{1 - e^{(x-1)\ln 2}} (\eta(1) + (x-1)\eta'(1) + o(x-1))$ donne le résultat en utilisant $\eta(1) = \ln 2$ (fait en cours, soit avec le développement asymptotique de H_n , soit à partir du DSE de $\ln(1+x)$ qui CU sur $[0, 1]$ grâce au CSSA)

5. Poser $v_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$, montrer que $\sum (v_{n+1} - v_n)$ CV (par DL) donc (v_n) CV vers un réel l . En séparant les termes pairs et impairs, on trouve $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = (\ln 2)H_n + u_n - u_{2n}$ et comme $u_n = \frac{(\ln n)^2}{2} + l + o(1)$, on obtient le résultat annoncé.

Exercice 57 [sujet] 1. $x > 1$

2. cours

3. $2^x(\zeta - 1) = \sum_{n \geq 2} \frac{2^x}{n^x}$ CN sur $[3, +\infty[$ car $\left| \frac{2^x}{n^x} \right| \leq \frac{1}{(n/2)^3}$ et le théorème de double limite donne $\zeta - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^x} = e^{-x \ln 2}$ donc $\zeta - 1$ est intégrable sur $[2, +\infty[$. On termine par TITT avec $\int_2^{+\infty} \left| \frac{1}{n^x} \right| dt = \frac{1}{n^2 \ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 58 [sujet] 1. Si $x \notin \{0\} \cup \{-1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$ alors $\sum f_n(x)$ CV par CSSA (vérifié à partir d'un certain rang donc $D = \mathbb{R}^* \setminus \{-1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$). Si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, on a, par CSSA, $\|R_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{1+na} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, si $[a, b] \subset]-\frac{1}{N}, -\frac{1}{N+1}[$ alors le CSSA est vérifié pour $n \geq N+1$ donc on a $\|R_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{1+nb}$ et si $[a, b] \subset]-\infty, -1[$, le CSSA donne $\|R_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{1}{1+nb}$ donc CVU sur tout segment de D .

2. Sur \mathbb{R}^{+*} , $\sum f'_n(x)$ vérifie le CSSA donc si $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\left\| \sum_{k=1+n}^{+\infty} f'_k(x) \right\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{n}{(1+na)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\sum f'_n$ CVU sur tout segment de \mathbb{R}^{+*} .

3. Par CVU de $\sum f_n$ sur $[1, +\infty[$ (par CSSA et majoration du reste), on a $\lim_{+\infty} f = 1$ puis $f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx} \underset{+\infty}{\sim}$

$$\frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ car } \left| f(x) - 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{nx} \right| \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 59 [sujet] 1. La série CV toujours par CSSA (vérifié à partir d'un certain rang mais qui dépend de x !). On a

$$f(x) - \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^2}{n(n^2+x^2)} \text{ vérifie le CSSA dès } n=1 \text{ donc } |R_n(x)| \leq \frac{x^2}{(n+1)((n+1)^2+x^2)} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc CU sur } \mathbb{R} \text{ puis } \lim_0 f = f(0)$$

2. $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \left(\frac{i}{x+in} - \frac{i}{x-in} \right)$ donc $f_n^{(k)} = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \left(\frac{(-1)^k ik!}{(x+in)^{k+1}} - \frac{(-1)^k ik!}{(x-in)^{k+1}} \right)$ ce qui donne la CN sur \mathbb{R} de $\sum f_n^{(k)}$ par $|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{(x^2+n^2)^{k+1}} \leq \frac{k!}{n^{2(k+1)}}$ avec $k \geq 1$ (la CS pour $k=0$ suffit et a déjà été prouvée).

Exercice 60 [sujet] 1. Si $|x| < 1$, alors $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nx^{2n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et si $|x| > 1$ alors $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-n}{x}$ donc DVG

2. $|f'_n(x)| \leq n \frac{(2n-1)a^{2n-2} + a^{4n-2}}{(1-a^{2n})^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ si $x \in [-a, a] \subset]-1, 1[$ donc $\sum f'_n$ CN sur tout segment de $] -1, 1[$; $f'(x) = \sum_{n \geq 1} n \frac{(2n-1)x^{2n-2} + x^{4n-2}}{(1-x^{2n})^2} \geq 0$.

Exercice 61 [sujet] 1. Par récurrence sur n en remarquant que si $u_n(t) \leq \frac{t^n}{n!}$ alors $u_n(t-t^2) \leq \frac{t^n(1-t)^n}{n!} \leq \frac{t^n}{n!}$
 2. $\|u_n\|_\infty \leq \frac{1}{n!}$ donc $\sum u_n$ CN sur $[0, 1]$ vers u telle que (intégration sur un segment avec CN) $u(x) = \int_0^x u(t-t^2) dt$; comme $t \mapsto u(t-t^2)$ est continue, u est \mathcal{C}^1 et $u'(t) = u(t-t^2)$.

Exercice 62 [sujet] 1. f_n est continue par récurrence
 2. Par récurrence sur n : f_n est \mathcal{C}^n , $f_n^{(k)}(a) = 0$ si $k \leq n-1$ et $f_n^{(n)} = f$. Avec Taylor, on en déduit $f_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$
 3. $\|f_n\|_{\infty, [a, x]} \leq \|f\|_{\infty, [a, x]} \frac{(x-a)^n}{n!}$ donc CN sur le segment $[a, x]$ (ou $[x, a]$) et $g(x) = \int_a^x f(t) \sum_{n \geq 1} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \int_a^x f(t) e^{x-t} dt$
 4. $g(x) = e^x \int_a^x f(t) e^{-t} dt$ est donc \mathcal{C}^1 et solution de $y'(x) - y(x) = f(x)$

Exercice 63 [sujet] 1. f_n est \mathcal{C}^1 par réc et $f'_{n+1} = f_n$ puis $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n = f'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1} = f'_0 + S$. On en déduit $S(x) = \alpha e^x + e^x \int_a^x e^{-t} f'_0(t) dt$ et $S(a) = f_0(a)$ donne $\alpha = e^{-a} f_0(a)$
 2. $\|f'_n\|_\infty = \|f_{n-1}\|_\infty$
 3. $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$ donc $\sum f_n$ CVU sur $[0, 1]$ et $S(x) = e^x \int_0^x e^{-t} \sin(2t) dt = e^x \operatorname{Im} \left(\int_0^x e^{-(1+2i)t} dt \right) = \dots$

Exercice 64 [sujet] On pose $f_n(t) = \frac{ne^{-t} + t^2}{n+t}$; (f_n) CS sur $[0, 1]$ vers $f : t \mapsto e^{-t}$ et $|f_n(t) - e^{-t}| \leq \frac{1+e^{-1}}{n}$ donc (f_n) CU sur $[0, 1]$ vers f ; par intégration $\lim u_n = \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - e^{-1}$.

Exercice 65 [sujet] 1. On a $P_n^{(k)}(0) = 0$ si $k < n$ ou $k > 2n$ et, si $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$, par la formule de Leibniz, $P_n^{(k)}(0) = \binom{k}{n} n(n-1) \dots (2n-k+1) b p^{k-n} (-a)^{2n-k}$ est entier. Puis $P_n(r-X) = P_n(X)$ donne les dérivées en r par symétrie.
 2. $u_n = q \int_0^r P_n(t) e^t dt$ est un entier par IPP successives avec la question précédente et le fait que $qe^r \in \mathbb{Z}$. On a $\|P_n \exp\|_\infty \leq \frac{1}{n!} r^n (br)^n e^r$ donc $(P_n \exp)$ CU sur $[0, r]$ vers 0 et par intégration (u_n) tend vers 0. Or (u_n) est une suite d'entiers, elle est donc nulle à partir d'un certain rang et comme $P_n \exp$ est continue et positive sur $[0, r]$, on en déduit $P_n \exp = 0$ sur $[0, r]$ ce qui est absurde. On vient donc de prouver par l'absurde que si $r \in \mathbb{Q}$ alors e^r est irrationnel donc en particulier (avec $r = 1$), e est irrationnel.

Exercice 66 [sujet] 1. Par récurrence : si f_n est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ alors $t \mapsto \sqrt{f_n(t)^2 + t^2}$ est continue sur \mathbb{R} donc f_{n+1} est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

2. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \int_0^x (f_n(t) - f_{n-1}(t)) \frac{f_n(t) + f_{n-1}(t)}{\sqrt{t^2 + f_n(t)^2} + \sqrt{t^2 + f_{n-1}(t)^2}} dt$ donne le résultat par récurrence sur n
 car $\left| \frac{f_n(t) + f_{n-1}(t)}{\sqrt{t^2 + f_n(t)^2} + \sqrt{t^2 + f_{n-1}(t)^2}} \right| \leq 1$.
 On en déduit $\|f_{n+1} - f_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ donc $\sum (f_{n+1} - f_n)$ CN sur tout segment de \mathbb{R} ce qui donne la CS de (f_n) et la continuité de $f = \sum_{n \geq 1} (f_{n+1} - f_n)$ par télescopage.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on vérifie la CU de (g_n) sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$) avec $g_n(t) = \sqrt{t^2 + f_n(t)^2}$ car $|g_n(t) - \sqrt{t^2 + f(t)^2}| = |f_n(t) - f(t)| \frac{f_n(t) + f(t)}{\sqrt{t^2 + f_n(t)^2} + \sqrt{t^2 + f(t)^2}} \leq \|f_n - f\|_{\infty, [0, x]}$ donc par intégration, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f(t)^2} dt$ puis $f(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f(t)^2} dt$ ce qui prouve que f est \mathcal{C}^1 par continuité de f et, en dérivant, $f'(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2}$.

Exercice 67 [sujet] 1. $\|u_n\| \leq |\alpha_n|$ donc CVN sur $[0, 1]$

2. Par CVN, $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n \geq 1} \int_0^1 u_n(t) dt = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \frac{\sin(2\pi\omega_n)}{2\pi\omega_n}$

3. f est \mathcal{C}^0 sur $[0, 1]$ donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}\right) = \int_0^1 f(t) dt$ (somme de Riemann).

Exercice 68 [sujet] 1. $t^{xt^y} = e^{xt^y \ln(t)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ car $y > 0$.

2. $\|f_n\|_{\infty} = \frac{1}{n!} \left(\frac{|x|}{ey}\right)^n$

3. Les f_n sont continues sur $[0, 1]$ donc on peut intervertir \sum / \int sur le segment $[0, 1]$ par CN : $\sum_{n \geq 0} f_n(t) = t^{xt^y}$ par

DSE de exp et $\int_0^1 f_n(t) dt \stackrel{n\text{IPP}}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$

Exercice 69 [sujet] 1. Si $x \in [-a, a]$ alors pour $n \geq a$, on a $(x+n)^2 \geq (a+n)^2$ et $(x-n)^2 \geq (n-a)^2$ donc $\|f_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{C}{(n+a)^2} + \frac{C}{(n-a)^2}$ donc CVNTS de \mathbb{R} .

2. Les deux séries CV donc, avec des changements d'indices, $f(x+1) = \varphi(x+1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \varphi(x+k) + \sum_{h=0}^{+\infty} \varphi(x-h) = f(x)$

3. g est continue sur \mathbb{R} et 1-périodique donc bornée et $|\varphi(x)g(x)| \leq \frac{C\|g\|_{\infty}}{1+x^2}$, intégrable sur \mathbb{R} .

$\|f_n g\|_{\infty, [0, 1]} \leq \|g\|_{\infty} \|f_n\|_{\infty, [0, 1]}$ donc la série CVN sur $[0, 1]$ et on a $\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 \varphi(x)g(x) dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \varphi(x+n)g(x) dx + \int_0^1 \varphi(x-n)g(x) dx$. Par changements de variables et avec la 1-périodicité de g , on a $\int_0^1 \varphi(x+n)g(x) dx = \int_n^{n+1} \varphi(u)g(u) du$ et $\int_0^1 \varphi(x-n)g(x) dx = \int_{-n}^{-n+1} \varphi(u)g(u) du$ ce qui donne, avec Chasles, $\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x) dx$.

Exercice 70 [sujet] TCD à chaque fois

1. $\left| \frac{\cos \frac{t}{n}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$ donc limite $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

2. $\left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-\frac{1}{n}} \right| \leq \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-2} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$ si $n \geq 2$ donc limite $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$.

3. On prolonge par 0 sur $]n, +\infty[$ puis $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ donc limite $\int_0^{+\infty} e^{-x} dt = 1$.

4. $\left| x^n \frac{\ln x}{(1-x^2)^{1/4}} \right| \leq \frac{|\ln x|}{(1-x^2)^{1/4}}$ donc limite $\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x^2)^{1/4}} dx$

Exercice 71 [sujet] $\left| \frac{1}{1+x^2+x^n e^{-x}} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$ donc limite $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 72 [sujet] 1. $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ et $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t^{\alpha}}$ donc f_{α} est intégrable sur \mathbb{R}^{+*} si et seulement si $\alpha \in]1, 2[$.

2. $|f_n(t)| \leq f_{3/2}$ donc limite $\int_0^1 \frac{\arctan t}{t^{3/2}} dt$

Exercice 73 [sujet] 1. Étude de fct

2. $\frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{n}$ et $\frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ donc I_n existe.

3. $|I_n| \leq \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ (qui existe) par Q1 donc $\lim I_n = 0$. Puis par TCD, $nI_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ car $\left| \frac{n \sin(t/n)}{t(1+t^2)} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$ par Q1

Exercice 74 [sujet] 1. $\frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^3}\right)$

2. Poser $t = xn^{4/3}$

3. Par TCD avec $|f_n(t)| \leq \frac{t}{1+t^3}$ ($|\sin(u)| \leq |u|$)

4. Ajouter les 2 valeurs de K puis $2K = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1-t+t^2} = \frac{4}{3} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right]_0^{+\infty}$

5. facile

Exercice 75 [sujet] 1. $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x^{3/2}}$

2. $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(n+x)} \underset{x=u^2}{=} \pi \int_0^{+\infty} \frac{du}{n+u^2} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$

3. fait au dessus

4. $\arctan(n) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(n+x)} \leq I_n \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(n+x)}$ donne $I_n \sim \frac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$

Exercice 76 [sujet] 1. $\frac{\arctan(nt)}{(1+n^4t^2)^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n^8t^4}$

2. $\lim I_n = 0$ par TCD avec $\left| \frac{\arctan(nt)}{(1+n^4t^2)^2} \right| \leq \frac{\pi/2}{(1+t^2)^2}$ puis $I_n \underset{u=n^2t}{=} \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(u/n)}{(1+u^2)^2} du$ donc $\lim n^3 I_n = \int_0^{+\infty} \frac{u}{(1+u^2)^2} du = 1$ par TCD avec $\left| \frac{\arctan(u/n)}{(1+u^2)^2} \right| \leq \frac{\pi/2}{(1+u^2)^2}$

Exercice 77 [sujet] 1. fct continue sur $[0, 1]$

2. $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ donc $\lim I_n = 0$ (ou par TCD en dominant par 1); on pose $u = x^n$: $nI_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}+u^{2/n}} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}$ par TCD avec $\left| \frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}+u^{2/n}} \right| \leq 1$.

Exercice 78 [sujet] 1. $\ln(x) \ln(1-x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\ln x)$ et $\ln(x) \ln(1-x^n) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} (x-1) \ln(1-x^n) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$.

2. $|\ln(x) \ln(1-x^n)| = |\ln x| \times (-\ln(1-x^n)) \leq |\ln x| \times (-\ln(1-x))$ donc $\lim I_n = 0$.

3. $I_n \underset{u=x^n}{=} \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{\ln u \ln(1-u)}{u} u^{1/n} du$ puis $\left| \frac{\ln u \ln(1-u)}{u} u^{1/n} \right| \leq \frac{\ln u \ln(1-u)}{u}$ qui est intégrable sur $]0, 1[$ (car $\underset{u \rightarrow 0}{\sim} \ln u$ et $\underset{u \rightarrow 1}{\rightarrow} 0$) donc $I_n \sim \frac{C}{n^2}$ avec $C = \int_0^1 \frac{\ln u \ln(1-u)}{u} du > 0$.

Exercice 79 [sujet] 1. $\text{sh } x = 1 \overset{X=e^x}{\Leftrightarrow} X^2 - 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1 + \sqrt{2}$ car $X = e^x > 0$

2. $\lim I_n = 0$ par TCD car $|\text{sh}^n t| \leq 1$ sur $[0, \alpha]$

3. IPP

4. (I_n) est décroissante donc $(2n-1)I_n \leq nI_n + (n-1)I_{n-2} \leq (2n-1)I_{n-2}$ puis $I_n \sim \frac{1}{n\sqrt{2}}$

Exercice 80 [sujet] 1. $\frac{1}{\text{ch}^n}$ est \mathcal{CM}^0 sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$)

2. Par TCD (sur $[0, x]$), $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = 0$ car $\left| \frac{1}{\text{ch}^n t} \right| \leq 1$; la CV est uniforme car $\|I_n\|_\infty = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}^n t} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par TCD avec $\left| \frac{1}{\text{ch}^n t} \right| \leq \frac{1}{\text{ch } t}$ pour $n \geq 1$

3. $I_{n+2}(x) = \int_0^x \frac{\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t}{\text{ch}^{n+2} t} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} I_n(x) - \left[\text{sh } t \frac{-1}{(n+1) \text{ch}^{n+1} t} \right]_0^x - \frac{1}{n+1} I_n(x)$

4. $I = I_1(\ln 2) - I_3(\ln 2)$ puis I_1 se calcule en posant $u = e^x$

Exercice 81 [sujet] 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 1$ et $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2. $|f_n(x)| \leq \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 1 & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$ car $|\sin(nx)| \leq nx$ donc $\lim u_n = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$.

Exercice 82 [sujet] 1. (f_n) CS vers $e^{-t} \ln(t)$ (forme exponentielle et DL)

2. $|f_n(t)| \leq |\ln(t)| e^{-(n-1)\frac{t}{n}} \leq |\ln(t)| e^{-t/2}$ si $n \geq 2$

3. $\int_0^n f_n(t) dt = n \ln(n) \int_0^1 (1-u)^{n-1} du + n \int_0^1 (1-u)^{n-1} \ln(u) du$ puis $n \ln(n) \int_0^1 (1-u)^{n-1} du = \ln(n)$ et $n \int_0^1 (1-u)^{n-1} \ln(u) du \stackrel{\text{IPP}}{=} - \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du = - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-u)^k du = -H_n$.

Exercice 83 [sujet] 1. (f_n) CS sur \mathbb{R}^+ vers $x \mapsto e^{-x} \sin(x)$

2. $\lim v_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(x) dx = \frac{1}{2}$ par TCD avec $|f_n(x)| \leq e^{-x} |\sin x| \leq e^{-x}$

3. a) $x \mapsto \ln(1+x) - x$ croît sur $] -1, 0]$ et décroît sur \mathbb{R}^+

b) Si $x \in [0, n]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq e^{-x} - e^{n \ln(1-x/n)} \leq 1 - e^{x+n \ln(1-x/n)}$ donc $|f_n(x) - f(x)| \leq 1 - e^{n^{1/4} + n \ln(1-n^{-3/4})}$ sur $[0, n^{1/4}]$. Si $x \geq n^{1/4}$ alors $|f_n(x) - f(x)| \leq 2e^{-x} \leq 2e^{-n^{1/4}}$. En regroupant les deux, on a $\|f_n - f\|_\infty \leq 2e^{-n^{1/4}} + (1 - e^{n^{1/4} + n \ln(1-n^{-3/4})}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Exercice 84 [sujet] 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 1$

2. $\lim I_n = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$ par TCD avec $|f_n(x)| \leq \frac{e^x - 1}{x}$ et $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. Puis, pour $x \in]0, 1]$, $\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$

et on intègre terme à terme avec le TITT ou CVN sur $[0, 1]$ car $\left| \frac{x^{k-1}}{k!} \right| \leq \frac{1}{k!}$

Exercice 85 [sujet] 1. f_0 n'est pas \mathcal{CM}^0 sur \mathbb{R}^{+*} car $\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} f_0(t) = +\infty$; $f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{n-1}}$ n'est intégrable sur $[1, +\infty[$ que pour $n \geq 3$ (et l'intégrale DV si f_n n'est pas intégrable car $f_n \geq 0$ au voisinage de $+\infty$). Enfin $\lim_{n \rightarrow 0} f_n = 1$ si $n \geq 3$.

2. $I = \int_0^1 \frac{t}{\sin(t)} dt$ par $|f_n(t)| \leq \begin{cases} \frac{t}{t^3 - 1} & \text{si } t \geq 1 \\ \frac{t}{\sin(t)} & \text{si } t \in]0, 1[\end{cases}$

3. $n(I_n - I) \stackrel{u=t^n}{=} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2/n-1}}{u + \sin(u^{1/n})} du - \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{\sin(u^{1/n})(u + \sin(u^{1/n}))} du$ puis par $\left| \frac{u^{2/n-1}}{u + \sin(u^{1/n})} \right| \leq \frac{u^{2/3-1}}{u-1}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2/n-1}}{u + \sin(u^{1/n})} du = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(u + \sin(1))}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{\sin(u^{1/n})(u + \sin(u^{1/n}))} du = \int_0^1 \frac{du}{\sin(1)(u + \sin(1))}$ par $\left| \frac{u^{1/n}}{\sin(u^{1/n})(u + \sin(u^{1/n}))} \right| \leq \frac{1}{\sin(u^{1/3})(u + \sin(u^{1/3}))}$ puisque \sin est croissante sur $[0, 1]$.

Exercice 86 [sujet] On pose $u = t^n$: $nu_n = \int_0^1 u^{1/n} f(u^{1/n}) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 1 f(1) du = f(1)$ par TCD et continuité de f en 1 avec $|u^{1/n} f(u^{1/n})| \leq \|f\|_\infty$ car f est continue sur le segment $[0, 1]$ donc bornée.

Exercice 87 [sujet] $n \int_0^1 t^n f(t) dt \stackrel{u=t^n}{=} \int_0^1 u^{1/n} f(u^{1/n}) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(1) du = f(1)$ car $|u^{1/n} f(u^{1/n})| \leq \|f\|_\infty$.

Exercice 88 [sujet] On complète par 0 sur $]n, +\infty[$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{x+1}{x^n e^x + x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2 + x + 1} dx$ car

$|f_n(x)| \leq \begin{cases} \frac{x+1}{x^2 + x + 1} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x+1}{e^x + x^2 + x + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 89 [sujet] On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} dx = \int_0^1 dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ car $\left| \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} \right| \leq \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 90 [sujet] $\lim u_n = 0$ car $|\exp(-x^n)| \leq e^{-x}$ puis $u_n \stackrel{u=x^n}{=} \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} e^{-u} u^{1/n-1} du$ donc $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = C > 0$ car $|e^{-u} u^{1/n-1}| \leq e^{-u}$ donc $u_n \sim \frac{C}{n}$ (positif) et $\sum u_n$ DV.

Exercice 91 [sujet] 1. $\frac{1 - \cos^n x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{n}{2}$ et $\frac{1 - \cos^n x}{x^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2. on pose $x = \sqrt{\frac{2t}{n}}$

3. $\lim_0 \frac{\ln(\cos t)}{t^2} = -\frac{1}{2}$

4. on trouve la limite de (v_n) par TCD : si $f_n(t) = \frac{1 - \cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)}{t\sqrt{t}}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t\sqrt{t}}$. Reste la domination :

si $t \geq 1$ alors $|f_n(t)| \leq \frac{2}{t\sqrt{t}}$; si $t < 1$ alors $\sqrt{\frac{2t}{n}} \in \left[0, \sqrt{\frac{2}{n}}\right] \subset [0, \alpha]$ si $n \geq n_0$ (n_0 ne dépend pas de t) et

$\cos^n\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right) = \exp\left[n \ln \cos\left(\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\right] \geq \exp\left[-2n \frac{2t}{n}\right] = e^{-4t}$. On a donc $|f_n(t)| = f_n(t) \leq \frac{1 - e^{-4t}}{t\sqrt{t}}$ sur $]0, 1]$ si $n \geq n_0$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x\sqrt{x}} dx \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \stackrel{x=t^2}{=} \frac{2}{3} \sqrt{\pi}$. Au final, $u_n \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{3\sqrt{2}}$

Exercice 92 [sujet] 1. cours

2. il suffit que $\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ et $\sin(\varphi_n) = -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ donc φ_n est un argument du complexe $a_n - ib_n$ (qui est non nul)

3. On a $I_n = (a_n^2 + b_n^2) \left(\frac{d-c}{2} + \left[\frac{\sin(2nx + 2\varphi_n)}{4n} \right]_c^d \right)$ donc $\lim I_n = \frac{(d-c)(a_n^2 + b_n^2)}{2}$ ce qui donnera la minoration à partir d'un certain rang ($1/2 > 1/4!$)

4. Si (a_n) ou (b_n) ne tend pas vers 0, la minoration précédente prouve que (I_n) ne tend pas vers 0, ce qui est absurde car $|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq K$ (car (a_n) et (b_n) sont bornées) donc le TCD donne $\lim I_n = 0$.

Exercice 93 [sujet] Proche des intégrales de Wallis

1. CSSA avec $0 \leq a_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n}$

2. $a_{n+2} \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 t^n (1-t^2)^{3/2} dt = \frac{2}{3}(n+1)(a_n - a_{n+2})$

3. On prouve $\sum_{n \geq 0} a_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t} dt$ en utilisant le TCD appliqué à $S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sqrt{1-t^2} t^k$ car le TITT est plus

difficile à appliquer (la CVA de $\sum a_n$ n'est pas évidente) : on a $|S_n(t)| = \sqrt{1-t^2} \left| \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t} \right| \leq \frac{2\sqrt{1-t^2}}{1+t}$ ce qui permettra de conclure

Exercice 94 [sujet] Si $x > 0$, on a $\frac{x}{\text{ch}(x)} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x e^{-(2n+1)x}$ puis TITT avec $\int_0^{+\infty} |x e^{-(2n+1)x}| dx = \frac{1}{(2n+1)^2}$

Exercice 95 [sujet] 1. $n^{-n} \leq \frac{1}{n^2}$ si $n \geq 2$ et $\lim_0 e^{x \ln(x)} = 1$

2. IPP successives $\int_0^1 f_{n,p}(t) dt = (-1)^n \frac{n!}{(p+1)^n}$

3. TITT avec $e^{x \ln(x)} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n (\ln x)^n}{n!}$

Exercice 96 [sujet] $t^{t^x} = \sum_{n \geq 0} \frac{(t^x \ln t)^n}{n!}$ et on applique le TITT avec $\int_0^1 \frac{|t^x \ln t|^n}{n!} dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{(t^x \ln t)^n}{n!} dt \stackrel{\text{IPP}}{=}$

$(-1)^{n+1} \frac{1}{(n-1)!(xn+1)} \int_0^1 t^{xn} (\ln t)^{n-1} dt = \dots = \frac{1}{(xn+1)^{n+1}}$

Exercice 97 [sujet] Par TCD avec $S_n(t) = \sum_{k=0}^n t^{b-1} (-1)^k t^{ka}$ et $|S_n(t)| = t^{b-1} \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)a}}{1 + t^a} \leq \frac{2t^{b-1}}{1 + t^a}$

Exercice 98 [sujet] $\int_0^1 x^{2n}(1-x) dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ et par TITT la somme de la série vaut aussi $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)$.

Exercice 99 [sujet] $\frac{t^{\alpha-1}}{1+t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$ puis $\frac{t^{\alpha-1}}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{\alpha+n-1}$ si $t \in]0, x]$ et on applique le TITT ($x < 1$ fixé) avec $\int_0^x |(-1)^n t^{\alpha+n-1}| dt = \frac{x^{\alpha+n}}{\alpha+n}$. La dernière somme s'obtient avec $\alpha = \frac{1}{3}$ et $x = \frac{1}{2}$ (poser $u = t^{1/3}$ pour calculer l'intégrale)

Exercice 100 [sujet] 1. $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$
 2. $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{t} e^{-nt}$ puis TITT (chgt de variable pour le calcul des intégrales)

Exercice 101 [sujet] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = 0$ et $\frac{x^2}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc J existe. Pour $x > 0$, $\frac{x^2}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 1} x^2 e^{-nx}$ puis on applique le TITT avec $f_n(x) = x^2 e^{-nx} \geq 0$ et $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{2}{n^3}$ par deux IPP.

Exercice 102 [sujet] 1. $\frac{x}{\text{sh } x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$ et $\frac{x}{\text{sh } x} \underset{+\infty}{\sim} 2xe^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$
 2. $\frac{x}{\text{sh } x} = \frac{2xe^{-x}}{1 - e^{-2x}} \underset{x \geq 0}{=} 2 \sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-(2n+1)x}$ puis TITT (H4) $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{2}{(2n+1)^2}$

Exercice 103 [sujet] 1. $\frac{\sin t}{\text{sh } t} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$ et $\frac{\sin t}{\text{sh } t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(e^{-t})$
 2. Si $t > 0$, $|e^{-2t}| < 1$ donc $\frac{\sin t}{\text{sh } t} = 2 \frac{\sin t}{e^t - e^{-t}} = 2 \sin(t) e^{-t} \frac{1}{1 - e^{-2t}} = \sum_{n \geq 0} 2 \sin(t) e^{-(2n+1)t}$
 3. TITT avec $\int_0^{+\infty} |\sin(t) e^{-(2n+1)t}| dt \leq \int_0^{+\infty} t e^{-(2n+1)t} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et, pour la conclusion, $\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-(2n+1)t} dt = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(2n+1-i)t} dt \right) = \text{Im} \frac{1}{2n+1-i}$
 4. si $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(2n+1)^2 + 1} \leq \int_n^{n+1} \frac{2 dt}{(2t+1)^2 + 1} \leq \frac{1}{(2n+3)^2 + 1}$ et $t \mapsto \frac{1}{(2t+1)^2 + 1}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ donc en sommant, pour $n \in \mathbb{N}$, on trouve $I \leq \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{(2t+1)^2 + 1} \leq I - 1$ et $\int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{(2t+1)^2 + 1} = \left[\arctan(2t+1) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 104 [sujet] 1. $\frac{\ln(1-t^2) \ln(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\ln(t)$ et $\frac{\ln(1-t^2) \ln(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow 1}{\rightarrow} 0$ donc I existe.
 2. On applique le TITT avec $\frac{\ln(1-t^2) \ln(t)}{t^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n-2} \ln(t)}{n}$ pour $t \in]0, 1[$ et $\int_0^1 t^{2n-2} \ln(t) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{(2n-1)^2}$.
 Pour le calcul, comme $\frac{1}{n(2n-1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{(2n-1)^2}$, on trouve $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(2k-1)^2} = 2H_n - 2H_{2n} + 2 \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\pi^2}{4} - 2 \ln(2)$ en utilisant $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 105 [sujet] 1. On vérifie $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum a_n$ CV, (b_n) CV vers l donc $n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \lambda = e^l > 0$.
 2. a) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (1-t)^x}{t} = x$ et $\frac{1 - (1-t)^x}{t} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{-1}{(1-t)^{-x}}$

b) Pour $t \in]0, 1[$, $(1-t)^x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} t^n$ donc $\frac{1-(1-t)^x}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} t^{n-1}$
 puis on applique le TITT avec $u_n = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{(-x)(1-x)\dots(n-x-1)}{n \times n!}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{x+2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n \sim \frac{\lambda}{n^{x+2}}$ et $x+2 > 1$.

Exercice 106 [sujet] 1. $\frac{\sin \alpha x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1} = \alpha$

2. $\frac{\sin \alpha x}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \alpha x e^{-nx}$ si $x > 0$ puis TITT avec $\int_0^{+\infty} |\sin \alpha x e^{-nx}| dx \leq \int_0^{+\infty} |\alpha| x e^{-nx} dx = \frac{|\alpha|}{n^2}$ et enfin on calcule $\int_0^{+\infty} \sin \alpha x e^{-nx} dx = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(n-i\alpha)x} dx \right) = \frac{\alpha}{n^2 + \alpha^2}$

3. Par comparaison à une intégrale I équivaut à $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha dt}{\alpha^2 + t^2}$ quand α tend vers $+\infty$ puis $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 107 [sujet] 1. $|f_n(x)| \leq |a_n| \frac{b^n}{n!} e^{-a} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(|a_n|)$ donc CN sur tout segment de \mathbb{R}^+

2. Par TITT avec $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \stackrel{\text{IPP}}{=} |a_n|$, on trouve $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Exercice 108 [sujet] 1. \mathcal{CM}^0 sur \mathbb{R}^+ et $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$

2. Le TITT ne s'applique pas car la série à trouver n'est pas ACV. $f(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(t) e^{-(k+1)t}$ puis

$$\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-(k+1)t} dt = \frac{(k+1)}{1+(k+1)^2} \text{ et on termine avec le TCD : } |S_n(t)| = \left| \frac{\cos(t)(1 - (-1)^{n+1} e^{-(n+1)t})}{1 + e^t} \right| \leq \frac{2|\cos(t)|}{1 + e^t}$$

Exercice 109 [sujet] 1. CV par CSSA mais pas ACV car $\frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

2. On applique le TCD à $S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} \cos(xt) = e^{-t} \frac{1 - (-1)^{n+1} e^{-(2n+2)t}}{1 + e^{-2t}} \cos(xt)$ donc $|S_n(t)| \leq \frac{2e^{-t}}{1 + e^{-2t}}$ intégrable sur \mathbb{R}^+ . On termine avec $\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt = \frac{2k+1}{(2k+1)^2 + x^2}$.

Exercice 110 [sujet] $\sum_{k=0}^n u_k = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos^k(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos t}$ par TCD en utilisant la majoration

$$|S_n(t)| = \left| \frac{1 - (-1)^{n+1} \cos(n+1)t}{1 + \cos t} \right| \leq \frac{2}{1 + \cos t}. \text{ On trouve } S = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2 \cos^2 t/2} = \left[\tan \frac{t}{2} \right]_0^{\pi/2} = 1$$

Exercice 111 [sujet] 1. $\frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc l'intégrale de gauche CV et vaut celle de droite par $u = \frac{1}{t}$.

2. Si $t \in]0, 1[$ alors $\frac{(\ln t)^2}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\ln t)^2 t^{2n}$ puis TITT avec $\int_0^1 |(-1)^n (\ln t)^2 t^{2n}| dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{2}{(2n+1)^3}$

Exercice 112 [sujet] 1. $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ donc CN sur \mathbb{R} donc f est continue sur \mathbb{R}

2. Par CSSA $|f(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ donc (avec la continuité précédente), f est intégrable sur \mathbb{R} . On applique le TCD

$$\text{à } R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + t^2} : \text{ par CSSA, on a } |R_n(t)| \leq \frac{1}{(n+1)^2 + x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} R_n(t) dt = 0 \text{ ce}$$

qui donne par linéarité de l'intégrale sur la somme partielle de la série (donc une somme finie) $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt =$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{n^2 + x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

Exercice 113 [sujet] 1. $F(t) = \frac{\sin(\pi t)}{1-t}$; pas de CU car $R_n(t) = \frac{t^{n+1} \sin(\pi t)}{1-t}$ donc $R_n(1-1/n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pi e^{-1}$ donc $(\|R_n\|_\infty)$ ne tend pas vers 0

2. TITT avec $\int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt \stackrel{2 \text{ IPP}}{\leq} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(2 + \int_0^1 t^{n+2} \sin(\pi t) dt \right) \leq \frac{3}{(n+1)(n+2)}$; on en déduit $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t} \stackrel{x=\pi(1-t)}{d} t = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Exercice 114 [sujet] 1. $0 \leq u_n \leq \pi \int_0^\pi x^n (1-x) dx = \pi \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$

2. Par TITT avec $\int_0^\pi |x^n \sin(\pi x)| dx \leq \pi \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ puis changement de variable $u = \pi x$.

Exercice 115 [sujet] $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt \stackrel{\text{TITT}}{=} \sum_{n \geq 0} \int_0^1 -t^n \ln(t) dt = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 116 [sujet] — Si I CV alors $\sum_{k=0}^n u_k \stackrel{\text{somme finie}}{=} \int_0^1 f(t) \frac{1-t^{n+1}}{1-t} dt$ et comme $f \geq 0$, $f(t) \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \leq \frac{f(t)}{1-t}$

donc $\sum_{k=0}^n u_k \leq I$ donc la série CV (SATP dont les somme partielles sont majorées)

— Si $\sum u_n$ CV alors $\int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} f(t) t^n dt$ que l'on peut intégrer terme à terme sur le segment $[0, x]$ si

$|x| < 1$ par CVN car $|f(t)t^n| \leq \|f\|_\infty x^n$. On a donc $\int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x f(t) t^n dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (car $f \geq 0$) donc I

CV (intégrale d'une fonction positive dont une primitive est majorée)

En cas de CV, on a $I = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ par TITT (et H4 est la CV de $\sum u_n$ car $f \geq 0$).