TD8 : Espaces vectoriels normés (1)

Exercice 1 **(Mines-Télécom PSI 2023)**

1. Soit N définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x,y) = \max\left(|y|, \left|x + \dfrac{y}{2}\right|, |x+y|\right)$. Vérifier que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et représenter la boule unité fermée pour cette norme, ie l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, N(x,y) \leqslant 1\}$.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ une famille de formes linéaires sur E. À quelle condition l'application $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ qui à x associe $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p} |\varphi_i(x)|$ est-elle une norme ? *(*)*

Exercice 2

Pour $a \in [0,1]$, et $f \in E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_a = |f(a)| + \|f'\|_\infty$.

1. Montrer que $\| \ \|_a$ est une norme sur E.
2. Montrer que si $a, b \in [0,1]$, $\| \ \|_a$ et $\| \ \|_b$ sont équivalentes. *(*)*

Exercice 3 **(Mines-Ponts PSI 2007)**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = \dfrac{1}{3}(A^2 + A + I_n)$.

1. Étudier suite (A^k).
2. Caractériser géométriquement la matrice $P = \lim A^k$. *(*)*

Exercice 4 **(Centrale PC 2008)**

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

1. Étudier la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = \lambda > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \lambda u_n^{-1})$
2. Montrer que la suite $X_0 = I_p$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(X_n + AX_n^{-1}\right)$ est définie et que $X_n = PD_nP^{-1}$ avec D_n diagonale. *(*)*
3. Montrer que (D_n) converge vers une matrice Δ
4. En déduire que (X_n) converge et que sa limite X vérifie $X^2 = A$.
5. Montrer que si on suppose A symétrique alors X est elle aussi symétrique. *(*)*

Exercice 5 **(Centrale PSI 2023)**

Soient E un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant \|x\|$. On pose $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k$.

1. Simplifier $(u - id) \circ v_n$
2. Montrer que $\ker(u - id) \cap \operatorname{Im}(u - id) = \{0\}$
3. Si E est de dimension finie, montrer que $\ker(u - id) \oplus \operatorname{Im}(u - id) = E$.
4. Est-ce encore valable en dimension infinie ? *(*)*
5. Si E est de dimension finie, montrer que (v_n) converge. *(*)*

Indications

Exercice 1

2. *Seul l'axiome de séparation peut poser problème*

Exercice 2

2. *Exprimer $f(b)$ en fonction de $f(a)$ et de la fonction f' pour commencer.*

Exercice 3

2. *Vérifier que c'est la projection sur* $\ker(A - I_n)$ *parallèlement à* $\operatorname{Im}(A - I_n)$ *en calculant* $(A - I_n)P$

Exercice 4

2. *Par récurrence*
6. *Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $X = Q(A)$*

Exercice 5

4. *C'est faux : on peut utiliser $u : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$ et $\|P\| = \max |p_k|$*
5. *Commencer par étudier $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $x \in E$ fixé, en utilisant la décomposition de E donnée par* **3.**