L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet se compose de deux problèmes totalement indépendants.
Les deux problèmes auront le même poids dans la notation finale, il est donc vivement conseillé de consacrer à peu près 2 heures à chacun.

Séries de Dirichlet

(d'après Centrale PSI 1997 maths 1)

Notations :
$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels.
On considère une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ complexe et $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$, une suite strictement croissante de réels strictement positifs telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda_n = +\infty$$

Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction u_n par :

$$\forall x\in\mathbb{R}, u_n(x) = a_n e^{-\lambda_n x}$$

On note I_C l'ensemble des réels x pour lesquels la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est convergente et I_A l'ensemble des réels x pour lesquels la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est absolument convergente :

$$I_C = \left\{x\in\mathbb{R}\,\Big|\,\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)\text{ converge}\right\} \quad\text{et}\quad I_A = \left\{x\in\mathbb{R}\,\Big|\,\sum_{n\geqslant 1} |u_n(x)|\text{ converge}\right\}$$

Si ces deux ensembles sont non vides et minorés, on pose, dans tout le problème :

$$\gamma = \inf(I_C)\text{ et }\delta = \inf(I_A)$$

Partie I : Exemples dans un cas particulier
Dans toute cette partie, on choisit $\lambda_n = \ln(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$, de sorte que

$$\forall x\in\mathbb{R}, \forall n\geqslant 1, u_n(x) = \frac{a_n}{n^x}.$$

1. Déterminer les ensembles I_C et I_A puis les valeurs de γ et δ dans les deux cas suivants :

a) $a_n = 1$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

b) $a_n = (-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

2. On suppose dans cette question que I_A et I_C sont non vides et minorés (donc que γ et δ existent).

a) Justifier que $\gamma\leqslant\delta$.

b) Soit x un réel tel que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge et $\varepsilon > 0$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x+1+\varepsilon)$ est absolument convergente. En déduire $\delta\leqslant\gamma+1$.

c) Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ pour laquelle $\gamma = \delta$.

d) Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ pour laquelle $\gamma + 1 = \delta$.

3. En choisissant, pour $n\geqslant 2$,

$$a_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

montrer qu'il est possible d'obtenir $\gamma < \delta < \gamma + 1$. On pourra commencer par chercher un développement asymptotique de $u_n(x)$ avec la précision $o\left(\dfrac{1}{n^{x+1}}\right)$.

Partie II : Exemples dans le cas général À partir de maintenant, et jusqu'à la fin du problème, on se place dans le cas général : $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite strictement croissante de réels strictement positifs telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda_n = +\infty$$

1. On suppose, uniquement dans cette question, que

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } \lambda_n = \ln[\ln(n+1)]$$

Établir $I_A = \emptyset$ et $I_C = \mathbb{R}$.

2. Donner un exemple de couple de suites $((a_n)_{n\geqslant 1}, (\lambda_n)_{n\geqslant 1})$ pour lequel $I_A = I_C = \emptyset$.

3. Donner un exemple de couple de suites $((a_n)_{n\geqslant 1}, (\lambda_n)_{n\geqslant 1})$ pour lequel $I_A = I_C = \mathbb{R}$.

Partie III : Étude de I_A et I_C dans le cas général

1. Prouver que I_A est un intervalle.

On suppose à partir de maintenant que I_C est non vide et minoré.

2. Si $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de réels positifs, montrer que pour tout réel x tel que $x > \gamma$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge.

3. Soit f une application continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe un réel α tel que la fonction F définie par

$$\forall t \in [0, +\infty[, F(t) = \int_0^t f(u)e^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u$$

admette une limite finie ℓ en $+\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > \alpha$.

a) Montrer que $t \mapsto F(t)e^{(\alpha - x)t}$ est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$.

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que la suite $\left(\displaystyle\int_0^{\lambda_n} f(u)e^{-xu}\,\mathrm{d}u\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \max\{1 - |t-1|, 0\}$$

a) Déterminer la valeur de $\varphi(t)$ selon que $t < 0$, $t \in [0, 2]$ ou $t > 2$.

b) En déduire que φ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

5. On suppose que $(r_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de réels tels que

$$\forall n \geqslant 1, 0 < r_n < \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{2}$$

et, pour tout réel t, on pose

$$g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n} \varphi\left(\frac{t - \lambda_n}{r_n}\right)$$

a) Pour $t \in \mathbb{R}$, justifier qu'il existe au plus un entier $n \geqslant 1$ pour lequel $\varphi\left(\dfrac{t - \lambda_n}{r_n}\right) \neq 0$.

b) En déduire que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

c) Vérifier que, pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$\int_{\lambda_p}^{\lambda_{p+1}} g(t)\,\mathrm{d}t = a_p$$

6. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$v_n(x) = \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} g(u)e^{-xu}\,\mathrm{d}u$$

et on suppose que la suite $(r_n)_{n\geqslant 1}$ a été choisie de sorte que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (v_n(x) - u_n(x))$ soit convergente.

Déduire des questions précédentes que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge pour tout réel x tel que $x > \gamma$.

En déduire que I_C est un intervalle.

Fin du Problème 1

Exponentielle de matrices

(d'après Centrale PSI 2013 maths 2)

Notations et objectifs

Le but du sujet est d'étudier l'exponentielle de matrices, réelles ou complexes.
Dans tout le sujet, p désigne un entier naturel non nul.
Si $\mathbb{K}$ désigne un corps, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on adopte les notations suivantes :

- $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}_p[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus p.
- $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
- $\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
- On note Tr l'application trace et det l'application déterminant.
- Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ on définit, lorsque cette limite existe,

$$E(A) = \lim_{n\to+\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n$$

Question préliminaire.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, pour n suffisamment grand, le module et un argument de $1 + \dfrac{z}{n}$ en fonction de a, b et n (on pourra utiliser la fonction arctan).

2. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

Partie I : Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_3)(A - 2I_3)$.

2. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le reste de la division euclidienne du polynôme $\left(1 + \dfrac{X}{n}\right)^n$ par $(X+1)(X-2)$.

3. En déduire que $E(A)$ existe et qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $E(A) = Q(A)$.

Partie II : Exponentielle de matrices diagonalisables.

Cas des matrices diagonales.

Soit $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.

1. Montrer que $E(D)$ existe et que $E(D) \in GL_p(\mathbb{K})$.

2. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(D) = E(D)$.

3. Soient D et D' deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que

$$E(D + D') = E(D) \times E(D')$$

Existence et propriétés de $E(A)$ lorsque A est diagonalisable.

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ diagonalisable, c'est-à-dire pour laquelle il existe $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que

$$A = PDP^{-1}, \text{ avec } D \text{ diagonale.}$$

4. Soit $\| \; \|$ une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$; on pose, pour $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $N_P(M) = \left\|PMP^{-1}\right\|$.

a) Montrer que N_P est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

b) Soit $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $\Delta \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Déduire de la question précédente que la suite $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers Δ si et seulement si la suite $\left(PD_kP^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $P\Delta P^{-1}$.

5. Montrer que $E(A)$ existe.

6. Montrer que $\det(E(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.

7. Soit $x \in \mathbb{K}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que

$$E(xI_p + A) = e^x E(A)$$

Partie III : Exponentielle de matrices nilpotentes.
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (on dit que A est nilpotente d'indice k).

1. Montrer que, pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, $\ker(A^{j-1})$ est inclus strictement dans $\ker(A^j)$.
2. En déduire que $k \leqslant p$.
3. Montrer que $E(A)$ existe.
4. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(A) = E(A)$.
5. Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose que A et B commutent et que $E(B)$ existe. On admet que, pour tout entier i compris entre 1 et p,
$$\lim_{n\to+\infty}\left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^{n-i}$$
Montrer que $E(A+B)$ existe et que $E(A+B) = E(A)E(B)$.
6. Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que $E(xI_p + A) = e^x E(A)$.
7. Montrer que $E(A) - I_p$ est nilpotente.

Partie IV : Cas général.
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On admet qu'il existe un polynôme P annulateur de A, unitaire et de degré p, que l'on factorise dans $\mathbb{C}[X]$ sous la forme $P = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{n_i}$, les λ_i étant 2 à 2 distincts et $n_i \in \mathbb{N}^*$.
On note
$$P_n(X) = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n \in \mathbb{C}[X]$$
et $(Q_n, R_n) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ tel que
$$P_n = Q_n \times P + R_n$$

1. Montrer que $E(A)$ existe si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} R_n(A)$ existe.

Pour tout entier q compris entre 1 et p, on note J_q la matrice de $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients son nuls sauf ceux situés juste au-dessus de la diagonale qui valent 1.
Soit $B = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1}, \ldots, \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k})$ la matrice diagonale par blocs définie par
$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} + J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k} \end{pmatrix}$$
On admet que P est aussi un polynôme annulateur de B.

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, pour tout entier q compris entre 1 et p, la famille $\{(xI_q + J_q)^i,\ 0 \leqslant i \leqslant q-1\}$ est libre.
3. En déduire que la famille $\{B^i,\ 0 \leqslant i \leqslant p-1\}$ est libre.
4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P_n(B)$ existe et en déduire que la suite de polynômes $(R_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
5. En déduire que $E(A)$ existe.

Fin du Problème 2