Dans ce problème, on considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^\alpha},$$

où α est un réel strictement positif et $x \in \mathbb{R}^+$.
Lorsque la série converge, on notera S la somme de la série des $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha > 1$.

2. En déduire que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}^+$ si $\alpha > 1$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$.

a) Montrer que, si $x \in]0, 2\pi[$, on a $A_n(x) = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

b) Montrer que $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right)A_k(x) + \dfrac{A_n(x)}{(n+1)^\alpha}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

c) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)A_n(x).$$

d) En déduire que S est continue sur $]0, 2\pi[$ pour tout $\alpha > 0$.

4. Dans cette question, on suppose $\alpha \in]0, 1]$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

a) Montrer que $R_n\left(\dfrac{\pi}{4n}\right) - R_{2n}\left(\dfrac{\pi}{4n}\right) \geqslant \dfrac{n^{1-\alpha}}{2^\alpha}\sin\dfrac{(n+1)\pi}{4n}$.

b) En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, 2\pi[$.

5. On suppose cette fois que $\alpha = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_{n-1/2}^{n+1/2} \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer, à l'aide d'un changement de variable notamment, que

$$I_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\cos(xt)}{1+t/n}\,\mathrm{d}t + \frac{\cos(nx)}{n}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\sin(xt)}{1+t/n}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

b) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $\left|\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}\cos(xt)\left(\frac{1}{1+t/n} - 1\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

c) En déduire qu'il existe une suite de fonctions $(v_n)_{n\geqslant 1}$ telle que

$$\frac{\sin(nx)}{n}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\cos(xt)}{1+t/n}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(x/2)}{x/2}\frac{\sin(nx)}{n} + v_n(x) \quad \text{et} \quad |v_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

d) En utilisant la même démarche sur le second terme dans l'expression de $I_n(x)$ donnée par (1), montrer que l'on peut écrire

$$I_n(x) = \frac{\sin(x/2)}{x/2}\frac{\sin(nx)}{n} + w_n(x) \quad \text{et} \quad |w_n(x)| \leqslant \frac{2}{n^2}$$

e) On pose alors $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x)$. Monter que $\lim_{x\to 0^+} T(x) = 0$; on pourra admettre que $\lim_{x\to 0^+} w_n(x) = 0$.

f) Justifier l'existence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$; on admettra que la valeur de cette intégrale est $J = \dfrac{\pi}{2}$.

g) Déduire des questions précédentes que S n'est pas continue en 0 (pour $\alpha = 1$).