PSI2. Exercice bilan de conduction thermique sur le mouton.
Proposition de solution.

Q1 λ en $W.K^{-1}.m^{-1}$.

Q2 $T(M,t) = T(z,t) \Rightarrow \overrightarrow{grad}\, T = \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\vec{e_z}$

$\Rightarrow \vec{j_Q} = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\vec{e_z}$

$\vec{j_Q}$ SELON $\vec{e_z}$

DANS LE SENT DES T DECROISSANTES

DÉPEND DE z et t.

Q3 Cf. COURS $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = D.\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ avec $D = \frac{\lambda}{\mu c}$

Q4 REGIME STATIONNAIRE $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{d^2 T}{dz^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{dT}{dz} = cte.$

$\Rightarrow$ LE VECTEUR $\vec{j_Q}$ EST UNE CONSTANTE.

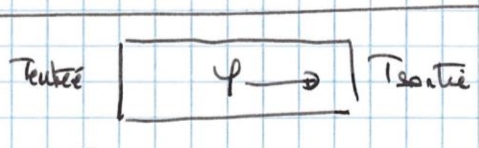
Q5 ON INTEGRE DEUX FOIS $T''(z) = 0 \Rightarrow T(z) = Az + B.$

AVEC LES DEUX CL FOURNIES : $T(z) = T_{entrée} + \left(\frac{T_{sortie} - T_{entrée}}{L}\right) z$

$\hookrightarrow \vec{j} = \frac{\lambda}{e}\left(T_{entrée} - T_{sortie}\right).\vec{e_z}$

$\hookrightarrow \varphi = \iint_{section} \vec{j}.\underbrace{\vec{n}}_{=\vec{e_z}}\, dS = \left(\frac{\lambda \overbrace{S}^{HL}}{e}\right)\left(T_{entrée} - T_{sortie}\right)$

Q6 $T_{entrée} - T_{sortie} = \left(\frac{e}{\lambda H L}\right)\varphi$



Id $V_{entrée} - V_{sortie} = R\ I$

RESISTANCES EN SERIE $\equiv$ MÊME $\varphi \Rightarrow$ ON AJOUTE LES RESISTANCES

EN PARALLELE $\equiv$ MÊME $(T_{entrée} - T_{sortie})$

$\Rightarrow$ ON AJOUTE LES CONDUCTANCES

Q7 ON APPLIQUE **Q6** $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda_{laine} = \dfrac{e\varphi}{S(T_c - T_B)}}$

Q8 ON A SIX RESISTANCES EN //.

* SUR LES CÔTÉS, 4 RESISTANCES $R_c = \dfrac{e}{\lambda L H}$
* DEVANT ET DERRIÈRE, 2 RESISTANCES $R_d = \dfrac{e}{\lambda H^2}$

ON AJOUTE LES SIX CONDUCTANCES

$$G_{diff} = 4\left(\frac{\lambda L H}{e}\right) + 2\left(\frac{\lambda H^2}{e}\right) = \frac{2\lambda H}{e}(2L+H)$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{diff} = \frac{e}{2\lambda H(2L+H)}}$$

NON TONDUE $e = e_M \Rightarrow R_{diff} = 1{,}8 \ K.W^{-1}$

TONDUE $e = e_m \Rightarrow R_{diff} = 0{,}09 \ K.W^{-1}$

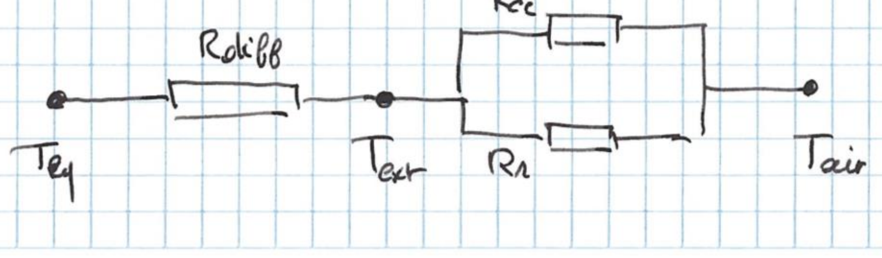
Q9 CETTE FORMULE DEFINIT UNE CONDUCTANCE SURFACIQUE

$$G_s = h \Rightarrow G = h\,\underbrace{(\text{Surface ext. de la brebis})}_{4LH + 2H^2}$$

$$\Rightarrow R_{cc} = \frac{1}{2hH[H+2L]} \simeq 0{,}18 \ K.W^{-1}$$

Q10 MÊME ECRITURE QUE **Q9** $R_r = \dfrac{1}{2KH[H+2L]}$

Q11 R_r et R_{cc} en //, l'ensemble en série avec R_{diff}



$\Rightarrow R = R_{diff} + \dfrac{R_{cc} \cdot R_r}{R_{cc} + R_r}$ $\quad R_1 = 1{,}9 \; K W^{-1}$ $\quad R_2 = 0{,}17 \; K.W^{-1}$

Q12 TRES INTERESSANT CONFUSION SUR L.
EN FAIT, C'EST ΔH^o_{vap} ...

LE CONCEPTEUR A OUBLIÉ QUE L ETAIT DÉJÀ UTILISÉ. ERREUR NON DÉTECTÉE OU NON CORRIGÉE

EN REGIME STATIONNAIRE ≡ LA PUISSANCE APPORTÉE PAR LE METABOLISME EQUILIBRE LES PERTES

$$\boxed{P_{mo} = \frac{T_{int} - T_{air}}{R_1} + \dot{m}\, \Delta H^o_{vap}}$$

AN $P_{mo} = 18\, W$

Q13 $R_1 \longrightarrow R_2$ ET NE PAS TOUCHER AU SECOND TERME

AN $P'_{mo} = 200\, W$.

Q14 VOLUME BREBIS : $H^2 L \Rightarrow$ MASSE $\mu H^2 L$

$\rightarrow$ CAPACITE THERMIQUE $C_{BREBIS} = \mu H^2 L c$

PUIS PREMIER PRINCIPE À PRESSION CONSTANTE : $\Delta H = Q$

PENDANT dt, LA TEMPERATURE VARIE DE dT
H VARIE DE $dH = C_{BREBIS}\, dT$

LA CHALEUR RECUE PAR LA BREBIS EST :

* $P_M\, dt$ PAR LE METABOLISME
* $-\dot{m}\, \Delta H^o_{vap}$ PAR LA SUDATION
* $-\left(\dfrac{T(t) - T_{air}}{R_1}\right)$ PAR LA CONDUCTION.

$$\rightarrow \quad C_{BREBIS}\, dT = \left(P_M - \dot{m}\, \Delta H^o_{vap} - \frac{T(t) - T_{air}}{R_1}\right) dt$$

ON DIVISE PAR dt, QUE L'ON FAIT TENDRE VERS 0.

$$(\mu H^2 L c)\left(\frac{dT}{dt}\right) + \frac{1}{R_2}\left(T(t) - T_{air}\right) = \frac{R_1\left(p_m - \dot{m}\,\Delta H^0_{vap}\right)}{R_1}$$

$$\left(\frac{dT}{dt}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{R_1\,\mu H^2 L c}\right)}_{\frac{1}{\tau_1}}\left(T(t) - T_{air}\right) = \underbrace{\left(\frac{1}{R_1 \mu H^2 L}\right)}_{\frac{1}{\tau_1}}\left[R_1\left(p_m - \dot{m}\,\Delta H^0_{vap}\right)\right]$$

ON Y EST PRESQUE ...

LA SOLUTION PARTICLIERE EST $T_{part} = T_{air} + R_1\left(p_m - \dot{m}\,\Delta H^0_{vap}\right)$
(REGIME PERMANENT)

ON LA CONNAIT QD $p_m = p_{m0} \longrightarrow \theta_{eq}$.

$$\theta_{eq} = T_{air} + R_1\left(p_{m0} - \dot{m}\,\Delta H^0_{vap}\right)$$

ON DEFINIT T_1 PAR $T_1 - T_{air} = R_1\left(p_m - \dot{m}\,\Delta H^0_{vap}\right)$

$\hookrightarrow$ EN FAIT T_{part}.

$$\hookrightarrow T_1 - T_{air} = \underbrace{R_1\left(p_{m0} - \dot{m}\,\Delta H^0_{vap}\right)}_{\theta_{eq} - T_{air}} + R_1\left(p_m - p_{m0}\right)$$

$$\boxed{T_1 = \theta_{eq} + R_1(p_m - p_{m0})} \qquad \boxed{\tau_1 = R_1 \mu H^2 L c}$$

(b) SIMPLE RESOLUTION

SOLUTION PARTICULIERE $T_p(t) = T_1$

SOLUTION GENERALE $T_g(t) = A e^{-t/\tau_1}$

$$\Rightarrow T(t) = T_1 + A e^{-t/\tau_1} \xrightarrow{\text{CI}} \underline{T(t) = \left(\theta_{eq} - T_1\right)e^{-t/\tau_1} + T_1}$$

(c) AN $\tau_1 \simeq 7{,}2\ 10^5\ s$ (8,3 jours)

$T_1 = 41°C$ POUR ATR À 17°C