B1. Réacteur nucléaire unidimensionnel.

2)En régime stationnaire la dérivée temporelle est nulle est n(x) est solution de :
$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \left(\frac{\pi}{L_o}\right)^2 n(x) = 0$. On peut donc écrire $n(x) = A.cos\left(\frac{\pi x}{L_o}\right) + B.sin\left(\frac{\pi x}{L_o}\right)$

Les trois CI imposées donnent : A=n_o , B=0 et $\frac{\pi a}{L_o} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k entier (et pas entier relatif).
Donc $n(x) = n_o cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$. D'autre part n(x) doit être positif ou nul, ce qui impose $\frac{\pi a}{L_o} \leq \frac{\pi}{2}$.
La seule solution qui reste est L_o=2a.

3a)On fait assez facilement apparaître le terme λ(x,t)=…
La première égalité implique que λ=λ(t). La seconde que λ=λ(x). Les deux variables x et t sont indépendantes, donc la seule solution qui reste est λ=Cte.

3b)Du point de vue temporel, on a une forme exp(λt). Si λ>0, le réacteur s'emballe. Si λ<0, le réacteur s'arrête.

3c)La mise en forme donne : $b = \frac{1}{D}\left(\frac{K-1}{\tau} - \lambda\right)$.

3c1 et 2)Si b<0, la solution est une somme d'exp :

$$f(x) = A.exp\left(-\sqrt{|b|}x\right) + B.exp\left(\sqrt{|b|}x\right)$$

Les CL donnent alors la solution unique A=B=0 (Système de Cramer d'ordre 2).

Si b=0 , f(x) est une fonction linéaire qui doit s'annuler deux fois à cause des CL donc c'est la droite nulle.

Si b>0, on a une solution sinusoïdale $f(x) = A.cos\left(\sqrt{b}x\right) + B.sin\left(\sqrt{b}x\right)$

3c3)Même méthode qu'à la question 2. La seule solution non nulle est en $cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$.
Il suffit maintenant de développer l'expression de b pour obtenir la formule demandée.

Si L_o=2a, on retrouve le cas stationnaire vu à la question 2.

Si L_o<2a, λ>0 et le réacteur explose. Si L_o>2a, λ<0 et le réacteur s'éteint.

B3)Diffusion mutuelle de deux gaz.

a)Le problème est en fait symétrique vis-à-vis des deux molécules CO et N_2, donc N(t) est aussi le nombre de moles de CO dans le compartiment A. Du fait du volume du tube très faible devant V_o on pourra négliger la quantité de matière dans le tube par rapport à celle des deux compartiments. Donc :
compartiment A : N_o-N(t) mol de N_2 ; compartiment B : N(t) mol de N_2

b)En supposant le régime pseudo-stationnaire établi, $n^*(x,t)$ suit une loi linéaire avec :

$$n^*(O,t) = \frac{N_o - N(t)}{V_o} \quad et \quad n^*(L,t) = \frac{N(t)}{V_o}$$

On en déduit :

$$n^*(x,t) = \frac{N_o - N(t)}{V_o} + \frac{x}{L}\left(\frac{2N(t) - N_o}{V_o}\right)$$

c)D'après la loi de Fick en projection sur l'axe Ox , on obtient :

$$j(x,t) = -D\frac{\partial n^*(x,t)}{\partial x} = \frac{D}{L}\left(\frac{2N(t) - N_o}{V_o}\right)$$

d)La quantité de N_2 entrant dans B par unité de temps est d'une part dN/dt mais aussi j(L,t)s. On en déduit alors l'équation différentielle :

$$\left(\frac{LV_o}{2sD}\right)\frac{dN}{dt} + N(t) = \tau\frac{dN}{dt} + N(t) = \frac{N_o}{2}$$

de constante de temps $\tau \approx 10^4$s.

e)On résoud l'équation précédente avec N(0)=0 ce qui donne : $N(t) = \frac{N_o}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.
On obtient alors $t_1 = \tau \mathrm{Ln}(100) \approx$

f)A partir de L et de D, on peut construire le temps caractéristique d'évolution dans le tube qui est $\tau_{tube} = \frac{L^2}{D}$ qui est interprété comme l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour obtenir le régime stationnaire. Il faut donc absolument $\tau_{tube} \ll \tau$.
On vérifie maintenant :

$$\tau = \frac{LV_o}{2sD} = \left(\frac{V_o}{2sL}\right)\tau_{tube} \approx 250 \cdot \tau_{tube}$$

Ensemble cohérent.

B4.Evaporation de l'ether.

D'ABORD : faire un dessin du tube de section droite S, axe Oz orienté vers le bas, origine au sommet du tube, la base du tube est à l'ordonnée L et l'interface air-éther est à l'ordonnée (L-h(t)).

ENSUITE : utilisation de la loi des gaz parfaits pour relier pression P et densité particulaire n :

$$n = \frac{N_A P}{RT_o}$$

D'après l'énoncé, on a donc : $n(0) = 0$ $n(L-h) = \frac{N_A P_s}{RT_o}$

De plus, l'énoncé affirme qu'on est en régime pseudo-permanent pour la diffusion dans le tube, donc n(z) est une fonction linéaire de z, on sort : $n(z) = \frac{N_A P_s}{RT_o(L-h)} z$

On peut alors calculer le flux de matière par la loi de Fick :

$$\vec{j} = -D\overrightarrow{grad}(n) = -D\frac{\partial n}{\partial z}\vec{e}_z = -\frac{DN_A P_s}{RT_o(L-h)}\vec{e}_z$$

On a bien un flux de matière vers le haut, qui ne dépend que du temps.

Pendant l'intervalle de temps dt, $\frac{DN_A P_s}{RT_o(L-h)} Sdt$ molécules d'éther s'évaporent ;

Soit encore $\frac{DP_s}{RT_o(L-h)} Sdt$ mol d'éther s'évaporent .

Soit encore $\frac{MDP_s}{RT_o(L-h)} Sdt$ kg d'éther s'évaporent .

Soit encore $\frac{MDP_s}{\mu RT_o(L-h)} Sdt$ m^3 d'éther s'évaporent .

La variation de hauteur (attention -dh) est donc $\frac{MDP_s}{\mu RT_o(L-h)} dt$

On a l'équation différentielle demandée. Elle est à variables séparables et intégrable.

$$(h-L)dh = \frac{MDP_s}{\mu RT_o}dt = Kdt$$

$$\frac{h^2}{2} - Lh = Kt + cte$$

A t=0, h=h$_0$ ce qui donne : $cte = \left(\frac{h_o}{2} - L\right) h_o$

A t=t$_F$, h=0, on sort : $t_F = \frac{1}{K}\left(L - \frac{h_o}{2}\right) h_o = 4{,}4\ 10^5 s$ soit environ 5 jours.