TD9 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1 (CCINP PSI 2019)

On pose $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geqslant 0$ et $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f à déterminer.

2. Montrer que (f_n') converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$.

Exercice 2 (Mines-Ponts PSI 2023)

Pour $n \geqslant 1$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 1]$

2. Soit $a \in]0, 1[$, a-t-on convergence uniforme sur $[a, 1]$?

3. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$

4. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de (u_n).

5. Étudier la convergence de $\sum f_n$.

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2019)

1. Convergence simple puis uniforme sur $[0, 1]$ de la suite $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$

2. Convergence simple puis uniforme de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$. *(*)*

Exercice 4 (CCINP PSI 2021)

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{x}{n^{x+1}}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

3. Étudier la continuité de f en 0.

4. Déterminer la limite de $f(x) - x$ en $+\infty$.

Exercice 5 (CCP PSI 2023)

1. Ensemble de définition de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n}$, en fonction de a ?

2. On suppose $|a| < 1$ jusqu'à la fin de l'exercice, montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Déterminer une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$ et en déduire un équivalent de S en 0.

4. Montrer que $xS(x)$ tend vers $\dfrac{1}{1-a}$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 6 (CCINP PSI 2021)

On pose, pour $n \geqslant 2$ et $x > 0$, $u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

1. Déterminer le domaine de convergence de $\sum u_n(x)$.

2. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur ce domaine.

3. On pose $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$; montrer que $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ puis montrer que la somme de la série $\sum u_n$ est continue sur son domaine de convergence.

Indications

Exercice 3

2. *Commencer la CVN ; lorsqu'il n'y a pas CVN, montrer qu'il n'y a pas CVU en commençant par calculer le reste dans le cas limite.*