PSI2. devoir libre n°2. Mardi 5 novembre 2024. Solution.

N. Aspects micro- et macro-scopiques de la propagation d'ondes dans la matière. Pas dans le programme, mais... Donc pour les ambitieux.

1a)*La longueur du ressort entre les particules (n-1) et n est : $a + u_n - u_{n-1}$ et son allongement est donc $a + u_n - u_{n-1} - a = u_n - u_{n-1}$. Si cet allongement est positif, la tension du ressort est vers la gauche. On a donc : $\overrightarrow{F_{n-1\to n}} = -K(u_n - u_{n-1})\overrightarrow{e_x}$.Le même raisonnement conduit à $\overrightarrow{F_{n+1\to n}} = K(u_{n+1} - u_n)\overrightarrow{e_x}$.*

1b)*L'application de la RFD donne la relation demandée avec $\omega_o = \sqrt{\frac{K}{m}}$ et le signe +.*

On peut imagine l'expérience de pensée suivante : quel est le mouvement de la particule n si on bloque les particules $(n-1)$ et $(n+1)$? Si on s'est trompé de signe, on a alors un mouvement divergent pour la particule n.

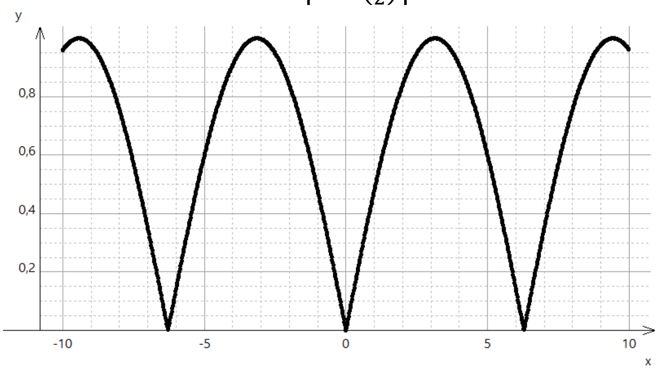
2a)*C'est tout simplement une OPPH . On serait même tenté d'écrire OPPH+ si k>0, OPPH- sinon. Il ne vaudrait mieux pas, voir la fin de la question. $\underline{A}$ est indépendant de n indique une propagation sans pertes.*

2b)*On reporte la forme proposée dans l'équation A2a et on obtient : $\omega = \left|2\omega_o.\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right|$.*

Ne pas oublier la valeur absolue car ω est une pulsation donc positive. ω varie entre 0 et $2\omega_o$.

Pour faire le dessin, il est plus simple de représenter $y = \frac{\omega}{2\omega_o}$ en fonction de $x = ka$. On obtient :

$$y = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$



2c)On voit alors apparaître la périodicité de 2π. On peut alors limiter l'intervalle de définition de x à l'intervalle $[-\pi \quad +\pi]$ soit k dans l'intervalle : $\left[-\frac{\pi}{a} \quad +\frac{\pi}{a}\right]$. Ici k>0 correspond bien à une OPPH+ et k<0 à une OPPH-.

3) On reporte l'écriture proposée dans l'équation : $\ddot{u}_n = \omega_o^2(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$.

u_n *devient* $u(x,t)$

u_{n-1} *devient* $u(x-a,t)$

u_{n+1} *devient* $u(x+a,t)$

$\ddot{u}_n$ *devient* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$

On remplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \omega_o^2(u(x+a,t) + u(x-a,t) - 2u(x,t))$$

Maintenant DL à l'ordre 2 par rapport à x :

$$u(x+a,t) \approx u(x,t) + a.\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$
$$u(x-a,t) \approx u(x,t) - a.\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

On remplace et BINGO, une équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \omega_o^2 a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

Soit une vitesse de propagation $c = a\omega_o$. AD OK.

AS3)Paroi de centrale nucléaire.

1)Il faut se placer en régime stationnaire (indépendant du temps). Dans ces conditions, on peut relier la puissance thermique P_{th} traversant une paroi à la différence de température ΔT entre les parois par : $\Delta T = R_{th}P_{th}$ analogue mathématique de la loi d'Ohm $\Delta V = RI$.
La puissance thermique joue le rôle du courant électrique.
Si on place deux murs l'un derrière l'autre (donc en série) :

température T_1 ||mur $R_{th1}=1/G_{th1}$ | T_i | mur $R_{th2}=1/G_{th2}$ || T_2

On peut utiliser la LDN en T_i pour écrire :

$$G_{th1}(T_1 - T_i) + G_{th2}(T_2 - T_i) = 0$$

On peut alors sortir : $T_i = \frac{G_{th1}T_1+G_{th2}T_1}{G_{th1}+G_{th2}}$, qui est en fait le théorème de Millmann hors programme.

A savoir construire $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$

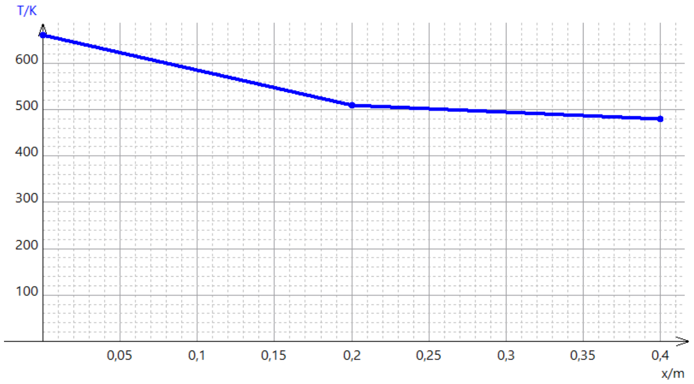
2)mur 1: acier ; mur 2 isolant.
S n'est pas donné, mais ce n'est pas grave, il suffit de diviser haut et bas par S la formule obtenue et ça ne change rien.
On calcule :

$$T_i = \frac{\frac{4}{0.2}660 + \frac{20}{0.2}480}{\frac{4}{0.2} + \frac{20}{0.2}} = \frac{4 \cdot 660 + 20 \cdot 480}{24} = 110 + 400 = 510K$$

Calcul effectué à la main.
On calcule maintenant la puissance surfacique j avec la loi de Fourier qui donne ici en prenant l'isolant:

$$j = -\lambda\frac{\Delta T}{\Delta x} = -4\frac{510 - 660}{0.2} = 3\ kW.m^{-2}$$

En régime stationnaire, le profil de température est linéaire dans chaque partie homogène. On a donc :



3)On peut maintenant calculer la puissance thermique traversant la paroi :

$$P_{th} = j.S = 0{,}6\ MW \ll 2700MW$$

Le réacteur perd très peu de puissance thermique par conduction à travers les parois.