

PSI2. Conduction de la chaleur. Propositions de solutions.**Exer AS1. Résistance thermique.****A)**A1) j en $W.m^{-2}$ et P en W .A2) $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{grad}(T)$. Le signe - indique que le flux thermique va dans le sens des températures décroissantes : du chaud vers le froid. La projection sur Ox donne : $j(x) = -\lambda \frac{dT}{dx}$ A3) Soit le morceau de barre, de section droite S , compris entre x et $x+dx$.En x , ce système reçoit la puissance $j(x)\vec{e}_x \cdot S\vec{e}_x = j(x)S = P(x)$ En $x+dx$, ce système reçoit la puissance $j(x+dx)\vec{e}_x \cdot S(-\vec{e}_x) = -j(x+dx)S = -P(x+dx)$ Comme on est en régime stationnaire, la température n'évolue plus dans le système et la puissance nette reçue est donc nulle, ce qui conduit ici à $P(x+dx) = P(x)$, donc $P(x)$ ne varie pas et est donc constant.Fourier indique alors que $T(x)$ est une fonction linéaire : $T(x) = Ax + B$ Les CI en $x=0$ et $x=L$ permettent d'exprimer A et B et de sortir : $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$ **Cette loi est indépendante de la nature du profil.**A4) Il suffit de reprendre loi de Fourier en multipliant par S :

$$P = Sj = -\lambda S \frac{dT}{dx} = \left(\frac{\lambda S}{L}\right)(T_1 - T_2) = \left(\frac{1}{R}\right)(T_1 - T_2) = G(T_1 - T_2)$$

Cette loi est tout simplement équivalente à une loi d'Ohm, P est l'équivalent du courant électrique, T est l'équivalent du potentiel électrique.**B)1,2)** A la jonction entre les deux barres, il y a forcément continuité du flux thermique, sinon la température de la jonction va évoluer et on ne peut pas être en régime stationnaire.

On peut donc appliquer deux fois la loi précédente et faire l'addition des différences de température. Les deux résistances thermiques s'ajoutent.

B3) On applique tout simplement la loi d'Ohm en termes de potentiel à la jonction de température T_j entre les deux barres:

$$G_1(T_1 - T_j) + G_2(T_2 - T_j) = 0 \quad d'où \quad T_j = \frac{G_1 T_1 + G_2 T_2}{G_1 + G_2}$$

C) On a maintenant une association parallèle. la conductance équivalente est la somme des conductances.**D)** h est en $W.K^{-1}.m^{-2}$.Si $T_{paroi} > T$, la paroi est plus chaude que le fluide ambiant, donc le flux thermique va de la paroi vers le fluide, ce qui est cohérent avec $h > 0$.On peut maintenant calculer la puissance qui traverse la paroi de section S dans le sens de \vec{n} :

$$P = \vec{j} \cdot S\vec{n} = h(T_{paroi} - T)\vec{n}S\vec{n} = hS(T_{paroi} - T) = G(T_{paroi} - T)$$

équivalent à une résistance thermique : $R = \frac{1}{hS}$.**E)** Avec une vitre simple, si on néglige les interfaces air-verre, on a une seule résistance thermique. Si on tient compte des interfaces air-verre, on a 3 résistances en série, qu'on va ajouter pour obtenir la résistance totale. Pour le double vitrage : couche de verre, couche air intérieur, et 4 interfaces air-verre. Au final, 6 résistances en série à ajouter pour obtenir la résistance totale.

AS2) Fuites thermiques dans une maison.

1) G est en W.K⁻¹.

A différence de température donnée, plus G est grand , plus le flux thermique est important.

Plus le milieu est conducteur , plus le flux est important, on attend donc la conductivité au numérateur.

Plus un mur est épais, plus les pertes sont faibles, on attend L au dénominateur.

Plus la section du mur est importante, plus les pertes sont importantes, on attend S au numérateur.

Une petite AD donne alors : $G = \frac{\lambda S}{L}$

C'est en fait une loi d'Ohm. G et R sont respectivement la conductance et la résistance thermique du mur. Comme pour les résistances électriques, on peut les associer.

2) On calcule la conductance thermique du verre : $G_{verre} = \frac{20}{5} \times 1000 = 4000 SI$

ce qui permet de calculer la puissance qui traverse le verre : $P_{verre} = 80kW$.

Avec les valeurs fournies pour les chaudières, quelque chose ne va pas avec les surfaces vitrées.

3) Il faut trouver une explication pour les surfaces vitrées. Elle vient maintenant.

On nous donne la conductance surfacique donc par unité de surface, donc la conductance d'une interface est: $G_{interface} = S \cdot G_s = 200 SI$.

On a maintenant deux interface et le verre en série. La nouvelle résistance de la surface vitrée est donc :

$$R'_{vitre} = \frac{1}{200} + \frac{1}{4000} + \frac{1}{200} \approx 0,01 SI$$

LA RESISTANCE THERMIQUE DU VERRE PEUT ETRE CONSIDEREE COMME NULLE.

On calcule maintenant la vraie puissance thermique qui traverse la verre :

$$P'_{vitre} = 2 kW \ll 80kW$$

Valeur compatible avec les chaudières domestiques. Pour baisser ces pertes thermiques, on peut envisager le double-vitrage où le gaz prisonnier entre les deux vitres fait office d'isolant.

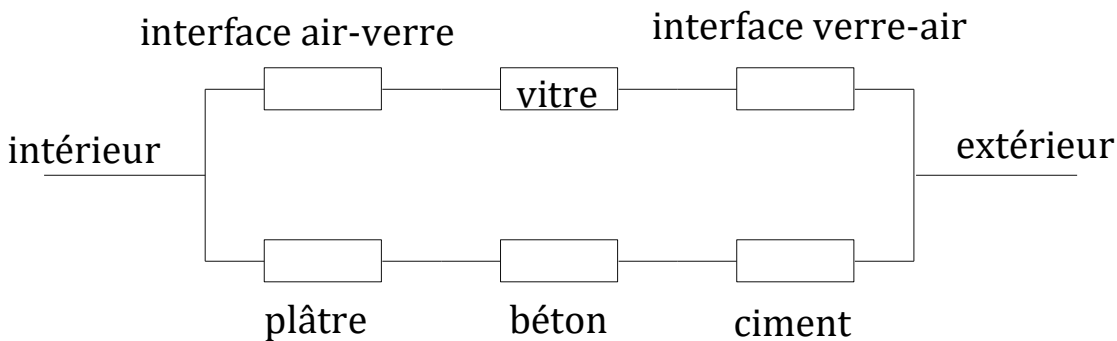
4) Le mur est constitué de trois couches, ce qui définit 3 résistances qu'ajoutera.

Pour le mur, on calcule les trois résistances thermiques qu'on ajoute : $R_{mur} = 1,6 \times 10^{-3} SI$

Ce qui donne : $P_{mur} = 12,5 kW$.

C'est mieux pour le mur. On pourra ajouter une ou plusieurs couches d'isolants thermiques en série sur le mur. On ne peut pas le faire sur les surfaces vitrées.

5)



AS3) Paroi de centrale nucléaire.

1) Il faut se placer en régime stationnaire (indépendant du temps). Dans ces conditions, on peut relier la puissance thermique P_{th} traversant une paroi à la différence de température ΔT entre les parois par :

$$\Delta T = R_{th} P_{th} \text{ analogue mathématique de la loi d'Ohm } \Delta V = RI.$$

La puissance thermique joue le rôle du courant électrique.

Si on place deux murs l'un derrière l'autre (donc en série) :

$$\text{température } T_1 \parallel \text{mur } R_{th1}=1/G_{th1} \mid T_i \mid \text{mur } R_{th2}=1/G_{th2} \parallel T_2$$

On peut utiliser la LDN en T_i pour écrire :

$$G_{th1}(T_1 - T_i) + G_{th2}(T_2 - T_i) = 0$$

On peut alors sortir : $T_i = \frac{G_{th1}T_1 + G_{th2}T_2}{G_{th1} + G_{th2}}$, qui est en fait le théorème de Millmann hors programme.

A savoir construire $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$

2) mur 1: acier ; mur 2 isolant.

S n'est pas donné, mais ce n'est pas grave, il suffit de diviser haut et bas par S la formule obtenue et ça ne change rien.

On calcule :

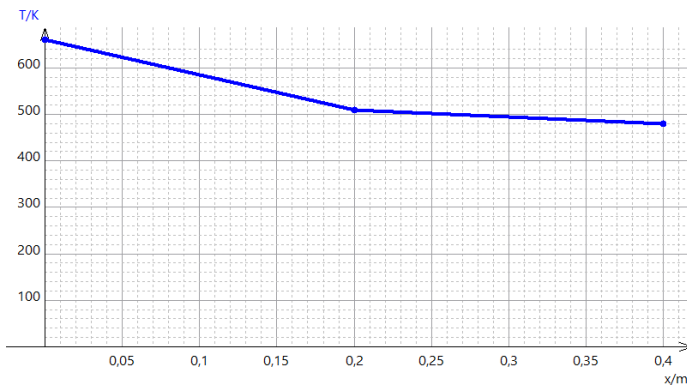
$$T_i = \frac{\frac{4}{0.2} 660 + \frac{20}{0.2} 480}{\frac{4}{0.2} + \frac{20}{0.2}} = \frac{4 \cdot 660 + 20 \cdot 480}{24} = 110 + 400 = 510K$$

Calcul effectué à la main.

On calcule maintenant la puissance surfacique j avec la loi de Fourier qui donne ici en prenant l'isolant:

$$j = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} = -4 \frac{510 - 660}{0.2} = 3 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$$

En régime stationnaire, le profil de température est linéaire dans chaque partie homogène. On a donc :



3) On peut maintenant calculer la puissance thermique traversant la paroi :

$$P_{th} = j \cdot S = 0,6 \text{ MW} \ll 2700 \text{ MW}$$

Le réacteur perd très peu de puissance thermique par conduction à travers les parois.

AS4. IGLOO.

On peut considérer qu'on a une paroi unique de section $S=6\text{m}^2$ et d'épaisseur e .

En régime permanent, la puissance thermique traversant le mur vient de l'humain et vaut $P=50\text{W}$.

On peut utiliser la notion de résistance ou conductance thermique.

$$P = G \Delta T = \frac{\lambda S}{e} \Delta T \text{ ce qui donne } e = \frac{\lambda S \Delta T}{P} \approx 12 \text{ cm}$$

AS5.Ailette de refroidissement. Pertes latérales.

1) Du fait de $T=T(x)$, la loi de Fourier donne : $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x = j(x) \vec{e}_x$

a) Soit le morceau de tige, de section droite S , compris entre x et $x+dx$.

En x , ce système reçoit la puissance $j(x) \vec{e}_x \cdot S \vec{e}_x = j(x)S$

En $x+dx$, ce système reçoit la puissance $j(x+dx) \vec{e}_x \cdot S(-\vec{e}_x) = -j(x+dx)S$

Comme on est en régime stationnaire, la température n'évolue plus dans le système et la puissance nette reçue est donc nulle, ce qui conduit ici à $j(x+dx) = j(x)$, donc $j(x)$ ne varie pas et est donc constant.

Fourier indique alors que $T(x)$ est une fonction linéaire : $T(x) = Ax + B$

Les CI en $x=0$ et $x=L$ permettent d'exprimer A et B et de sortir : $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$

$$b) P_{th} = j(x)S = \left(\frac{\lambda S}{L}\right) (T_1 - T_2)$$

2)a) h est en $W.K^{-1}.m^{-2}$.

b) Dans le bilan du 1a, il faut maintenant compter le flux thermique qui part sur le côté :

$$j(x)\pi R^2 - j(x+dx)\pi R^2 - (2\pi R dx)h(T(x) - T_e) = 0$$

On divise par dx , qu'on fait tendre vers 0, et on utilise la loi de Fourier.

On obtient la formule demandée :

$$T''(x) - m^2(T(x) - T_e) = 0 \quad \text{avec} \quad m = \sqrt{\frac{2h}{\lambda R}}$$

c) Une solution particulière est $T_p(x) = T_e$

La solution générale sans second membre peut s'écrire : $T_g(x) = \alpha e^{-mx} + \beta e^{+mx}$

α et β étant des constantes réelles ici.

La solution générale avec second membre est donc :

$$T(x) = T_p(x) + T_g(x) = T_e + \alpha e^{-mx} + \beta e^{+mx}$$

d1) Il faut éviter la divergence de $T(x)$ à l'infini donc : $\beta = 0$ et $\alpha = T_1 - T_e$

$$T(x) = T_e + (T_1 - T_e)e^{-mx}$$

Simple décroissance exponentielle.

d2)

La loi de Fourier donne : $\vec{j}(x=0) = -\lambda \frac{dT}{dx}(x=0) \vec{e}_x = \lambda \alpha m \vec{e}_x$

et $P_{th}(x=0) = j(0) \vec{e}_x \cdot \pi R^2 \vec{e}_x = \pi \lambda \alpha m R^2$

La puissance d_{cond} perdue par convection sur la longueur dx est :

$dP_{cond} = 2\pi R h (T(x) - T_e) dx = 2\pi R \alpha e^{-mx} dx$ qu'on peut donc intégrer de 0 à l'infini.

$$P_{cond} = \int_0^{+\infty} 2\pi R \alpha e^{-mx} dx = \frac{2\pi R h \alpha}{m}$$

Si vous regardez de plus près : $P_{th}(x=0) = P_{cond}$.

d3) La relation obtenue en 2d1 permet de sortir : $T(x) - T_e = (T_1 - T_e)e^{-mx}$

D'où :

$$x = \frac{1}{m} \ln\left(\frac{T_1 - T_e}{T(x) - T_e}\right)$$

AN : $m \approx 12,6 \text{ m}^{-1}$ $T(x) - T_e \approx \frac{T_1 - T_e}{100}$, on sort :

$$x \approx \frac{1}{12,6} \ln(100) \approx 0,36 \text{ m}$$

Pour que l'ailette puisse être considérée comme infinie, sa longueur doit être au minimum de 36 cm.

AS6.Flux géothermique terrestre. Production volumique.

La Terre est globalement sphérique de rayon $R=6400\text{km}$. La croûte continentale a une épaisseur $h\approx 35\text{km}$, assimilée à une couche homogène de conductivité thermique $\lambda=2,3\text{ SI}$. Comme $h\ll R$, on peut supposer la Terre localement plane et on choisit Ox un axe vertical ascendant avec origine au niveau bas de la croûte. Le flux géothermique s'écrit $\vec{j} = j(x)\vec{e}_x$.

1) a) En supposant le système stationnaire atteint, le champ de température dans la croûte est linéaire. En utilisant les CL, on obtient : $\theta(x) = \frac{\theta(h)-\theta(0)}{h}x + \theta(0)$.

b) $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(\theta)$ projeté sur l'axe Ox donne :

$$j(x) = -\lambda \frac{d\theta}{dx} = -\lambda \frac{\theta(h) - \theta(0)}{h} = \lambda \frac{\theta(0) - \theta(h)}{h} \approx 40 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$$

On retrouve le résultat du cours, le flux est uniforme dans la croûte.

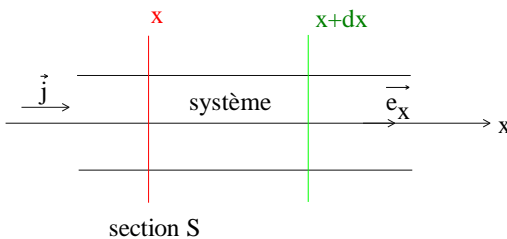
Pour obtenir la puissance totale traversant la surface terrestre, il faut multiplier par la surface de la Terre :

$$P = 4\pi R^2 j(x) \approx 20\,000 \text{ GW}$$

Soit environ 7400 tranches de centrales nucléaires. Ce flux est difficile à exploiter car il est trop dilué, sauf dans certains pays comme l'Islande.

2)

2a) Voir cours. On peut partir directement en régime stationnaire.



Le système est à température constante dans le temps, donc ne reçoit aucune énergie. On peut dire que la puissance nette reçue est nulle ce qui s'écrit ici :

$$j(x, t)S - j(x + dx, t)S + PSdx = 0$$

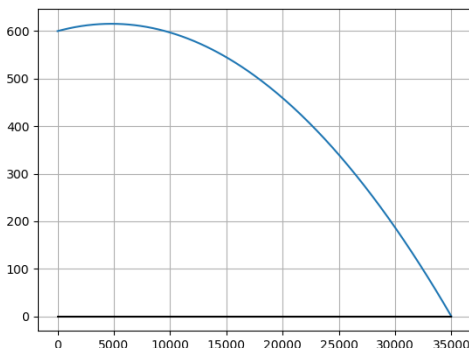
On simplifie par S , divise par dx qu'on fait ensuite tendre vers 0. On sort alors : $\theta''(x) = -P/\lambda$.

2b) Il suffit d'intégrer deux fois l'expression précédente par rapport à x , ce qui donne :

$$\theta(x) = -\frac{P}{2\lambda}x^2 + Ax + B \quad A \text{ et } B \text{ ctes d'intégration}$$

On utilise alors les deux CL de l'énoncé pour sortir finalement :

$$\theta(x) = -\frac{P}{2\lambda}x^2 + \left(\frac{\theta_h - \theta_o}{h} + \frac{Ph}{2\lambda}\right)x + \theta_o .$$



Vous pouvez aller chercher la position du maximum.

Le plus simple est d'écrire la fonction sous la forme : $\theta(x) = Ax^2 + Bx + C$

La dérivée s'annule en $x = -\frac{B}{2A} \approx 4800\text{m}$, et la température vaut alors : $\theta_{max} = C - \frac{B^2}{2A} \approx 630^\circ\text{C}$

2c) On reprend maintenant la loi de Fourier : $j(x) = -\lambda \frac{d\theta}{dx}$

Ce qui donne :

$$j(x) = -\lambda \frac{d\theta}{dx} = Px - \lambda \left(\frac{\theta_h - \theta_o}{h} + \frac{Ph}{2\lambda} \right)$$

Ce qui donne :

$$j(0) = \frac{\lambda(\theta_o - \theta_h)}{h} - \frac{Ph}{2} \quad \text{et} \quad j(h) = \frac{\lambda(\theta_o - \theta_h)}{h} + \frac{Ph}{2}$$

Dans chaque expression, deux termes découplés:

Le premier vient de la conduction.

Le second vient de la production par la radioactivité.

Les deux flux sont séparés.

On remarque aussi que l'énergie issue de la radioactivité se sépare en deux parties égales : une va vers le haut, l'autre vers le bas. Cohérent avec une marche au hasard.

AS7) Symétrie cylindrique.

1a) loi de fourier $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$ qu'on peut aussi écrire :

$$\vec{j} \cdot d\overrightarrow{OM} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot d\overrightarrow{OM} = -\lambda dT$$

On choisit maintenant un déplacement radial : $d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r$

On divise par dr , qu'on fait ensuite tendre vers 0 : $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = -\lambda \frac{dT}{dr}$

Si on le laplacien en coordonnées cylindriques, c'est direct.

On suppose un flux latéral : $\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_r$ $T = T(r, t)$

Système : milieu compris entre le cylindre d'axe Oz, de hauteur h , et de rayon r et le cylindre d'axe Oz, de hauteur h , et de rayon $r+dr$.

Puissance reçue par le système sur la surface latérale de rayon r : $P(r) = 2\pi r h j(r)$

Puissance reçue par le système sur la surface latérale de rayon $r+dr$: $-2\pi(r+dr)h j(r+dr)$

En régime stationnaire, la température du système n'évolue pas donc la puissance reçue totale est nulle :

$$2\pi r h j(r) - 2\pi(r+dr)h j(r+dr) = 0$$

Soit aussi :

$$2\pi r h j(r) = 2\pi(r+dr)h j(r+dr)$$

Ou

$$P(r) = P(r+dr)$$

Donc la fonction $P(r)$ est une constante qu'on note P_{th} . La puissance thermique traversant un cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon r est indépendant de r .

En remplaçant j par l'expression obtenue en 1a, on obtient $r \frac{dT}{dr} = Cte$ soit $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$

1c) On a donc : $P(r) = P_{th} = 2\pi r h j(r) = -\lambda 2\pi r h \frac{dT}{dr}$

Soit : $\frac{dT}{dr} = \frac{P_{th}}{2\pi \lambda h} \left(-\frac{1}{r} \right)$ Qu'on peut intégrer : $T = \frac{P_{th}}{2\pi \lambda h} \ln(r) + Cte$

On l'applique aux deux cylindres, on élimine la constante et on sort :

$$(T_1 - T_2) = \left[\frac{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}{2\pi \lambda h} \right] P_{th} = R P_{th}$$

Une nouvelle loi d'Ohm, en symétrie cylindrique.

AS8) Symétrie cylindrique. Etude d'un fusible.

1) $P_j = RI^2$. Pour obtenir la puissance volumique p , il faut diviser par le volume SL du fusible. On obtient : $p = \frac{I^2}{\sigma S^2}$.

2) et 3). Voir cours.

4) On réécrit l'équation précédente sous la forme :

$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{p}{\lambda} r$ qui s'intègre en $r \frac{dT}{dr} = -\frac{p}{2\lambda} r^2 + A$.

On divise par r et on intègre à nouveau : $T(r) = -\frac{p}{4\lambda} r^2 + A \ln(r) + B$

Si A est non nul, on a une divergence de la température en $r=0$, ce qui est physiquement inacceptable. Donc on doit prendre $A=0$.

On calcule B avec la condition aux limites fournies et on obtient : $T(r) = T_o + \frac{p}{4\lambda} (a_o^2 - r^2)$.

La température est la plus élevée au centre du fil.

5) Données insuffisantes. Aucune information sur T_o .

AT1. Où Fourier rejoint Fourier...

1) On remarque qu'on nous propose une solution à variables séparables.

Avec la forme proposée : $\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\alpha \theta$ et $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -k^2 \theta$

On repute dans l'EDP et on sort :

$$\alpha = Dk^2$$

2) Il s'agit tout simplement de la décomposition en série de Fourier d'un signal carré de période spatiale L et donc la restriction à l'intervalle $\left[-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right]$ est le profil de température à l'instant $t = 0$.

3) « presque partout » car il y a un problème de discontinuité. En $x=0$, on trouve 0 pour la décomposition alors qu'il y a une discontinuité.

4)

Posons $k_p = \frac{(2p+1)2\pi}{L}$ et $\alpha_p = Dk_p^2$ pour p entier

La fonction : $\frac{4\theta_0}{\pi} \cdot \frac{1}{2p+1} \sin[k_p \cdot x] \cdot \exp(-\alpha_p t)$ est solution de EDP d'après la question 1.

L'ensemble des solutions est un espace vectoriel, donc :

$$\frac{4\theta_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin[k_p \cdot x] \cdot \exp(-\alpha_p t)$$

Est encore solution de EDP, solution qui vérifie les conditions initiales à $t=0$. Cette fonction est donc une solution du problème posé. Par contre, on n'a pas l'unicité. Il pourrait y avoir d'autres solutions.

AT2.Oscillations sinusoïdales. Aspect dynamique.

1) Cf cours. A savoir faire.

2a) T_0 est une constante, donc de dérivée nulle par rapport à toute variable. θ vérifie donc la même EDP que T .

On peut travailler sur l'oscillation jour-nuit de période 1 jour, ou sur l'oscillation liée aux saisons de période 1 an.

2b) On fait comme en Elec, on pense que le régime permanent sera sinusoïdal de pulsation ω . Comme l'EDP est linéaire, on va pouvoir utiliser la notation complexe, ce qui nous évitera de gros problèmes de trigo.

2c) On reporte la forme proposée dans l'EDP ce qui donne :

$$j\omega \underline{f}(x) e^{j\omega t} = b \underline{f}''(x) e^{j\omega t}$$

En simplifiant l'exp qui n'est jamais nulle, on sort : $\underline{f}''(x) = \frac{j\omega}{b} \underline{f}(x)$

qui est une équation différentielle linéaire, à coefficients constants, à second membre nul.

Une solution particulière est la fonction nulle.

L'ensemble des solutions de l'équation ss second membre (donc de l'équation) est un espace vectoriel de dimension 2. Pour le décrire totalement, il nous suffit de deux solutions formant un système libre donc une base.

La méthode habituelle est de poser $\underline{f}(x) = Ae^{rx}$. L'équa diff devient alors un polynôme de degré 2 en x , qui a donc 2 solutions dans C . On a notre système libre.

Le polynôme est : $r^2 = \frac{j\omega}{b}$

Pour le résoudre, on peut utiliser l'énoncé : $r^2 = \frac{j\omega}{b} = \frac{\omega}{b} e^{j\pi/2} = \left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{b}} e^{j\pi/4} \right)^2$

On a les deux racines : $r_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{b}} e^{j\pi/4} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2b}} (1 + j) = \pm \frac{1}{\delta} (1 + j)$

Une solution quelconque est une combinaison linéaire de la base qu'on vient de trouver :

$$\underline{f}(x) = \underline{A} e^{+\frac{1}{\delta}(1+j)x} + \underline{B} e^{-\frac{1}{\delta}(1+j)x}$$

Si on suppose le sous-sol infini, le premier terme est divergent, donc on doit l'éliminer $\underline{A}=0$. Pour trouver \underline{B} , on utilise la condition en $x=0$, ce qui donne $\underline{B} = \theta_0$.

On obtient donc finalement : $\underline{\theta}(x, t) = \theta_0 e^{-\frac{1}{\delta}(1+j)x} \exp(j\omega t) = \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - x/\delta)}$

On repasse en réel :

$$\theta(x, t) = \text{Re} \left\{ \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - x/\delta)} \right\} = \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - x/\delta)$$

On reconnaît un terme d'OPPH+, d'amplitude décroissante exponentiellement. On parle d'onde thermique.

$\delta = \sqrt{\frac{2b}{\omega}} = \sqrt{\frac{bT}{\pi}}$ est la profondeur de pénétration de l'onde pour l'oscillation de pulsation ω ou de période T .

2d) On remarque qu'entre 0 et 2m, l'amplitude est quasiment divisée par 3, proche de e . On en déduit $\delta \approx 2m$, en fait 1,89m si on fait une régression linéaire.

Au bout de qqes fois 2m, l'oscillation annuelle n'est plus détectable et la température ne dépend plus du temps. Dans certaines zones viticoles, le vin était conservé dans des caves à une profondeur d'environ 10m. La climatisation a changé la donne.

Si vous avez l'occasion, visitez la ville fortifiée Laguardia-Biasteri dans la Rioja Alavesa, dans le Pays Basque Espagnol, Euskadi pour ne froisser personne.

2e) si $\frac{x}{\delta} = \pi$ soit $x \approx 5,9m$, les oscillations sont en opposition de phase par rapport à la surface.

2f) On connaît δ pour l'oscillation annuelle, donc on peut calculer b puis δ pour l'oscillation journalière.

On peut aussi remarquer que $\frac{\delta}{\sqrt{t}}$ est une constante donc :

$$\frac{\delta_{\text{annuel}}}{\sqrt{1\text{an}}} = \frac{\delta_{\text{jour}}}{\sqrt{1\text{jour}}} \text{ soit } \delta_{\text{jour}} = \frac{\sqrt{1\text{jour}}}{\sqrt{1\text{an}}} \delta_{\text{annuel}} \approx \frac{2}{\sqrt{365}} m \approx 0,1m$$

AT3. Régime transitoire de conduction.

1) Ici, il semble qu'on peut utiliser les résultats de cours. Si on attend suffisamment, on atteint le régime stationnaire et le profil de température est linéaire dans la barre.

La loi d'Ohm généralisée donne : $P_{th} = \frac{1}{R_{th}}(\theta_o - \theta_L)$ avec $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$

On ne pas faire l'AN car S n'est pas donnée.

2) Il suffit de construire une constante de temps avec les données fournies.

On peut construire la capacité calorifique de la barre $C_{th} = m \cdot c = \mu L S c$

Et la constante de temps vaut : $\tau = R_{th} \cdot C_{th} = \frac{\mu c L^2}{\lambda}$ par analogie avec l'électronique.

On peut aussi faire une AD à partir des unités de L, μ , c, et λ . cela donne le même résultat.

AT4. Discrétisation de l'équation de la chaleur.

1) Obtention de la formule de récurrence. Schéma explicite.

On s'intéresse à la propagation unidimensionnelle de la chaleur dans un mur d'épaisseur L dans la direction Oz. Un point du mur a une ordonnée z comprise entre 0 et L et a une température T(z,t). Si on note D la diffusivité thermique du mur, l'EDP vérifiée par T(t,z) est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

I1 : Par AD, D est en $m^2.s^{-1}$. Donc $\tau_{mur} = \frac{L^2}{D}$ est une constante de temps. On peut considérer que cette grandeur est un temps typique d'évolution du système. Au bout de qqes τ_{mur} on atteindrait le régime permanent.

I2 : en notant $t_k = k\tau$ et $z_p = pa$, les formules précédentes permettent d'évaluer les différentes dérivées en un point (t_k, z_p) selon les formules :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t_k, z_p) \approx \frac{T(t_{k+1}, z_p) - T(t_k, z_p)}{\tau} \text{ et } \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)(t_k, z_p) \approx \frac{T(t_k, z_{p+1}) + T(t_k, z_{p-1}) - 2T(t_k, z_p)}{a^2}$$

on envoie dans l'EDP et on sort :

$$T(t_{k+1}, z_p) = \frac{D\tau}{a^2} \{T(t_k, z_{p+1}) + T(t_k, z_{p-1})\} + \left(1 - 2\frac{D\tau}{a^2}\right) T(t_k, z_p) \text{ avec } \tau_{lim} = \tau_{lim}(a, D)$$

FUTUR PRESENT

Avec la formule proposée,

$$T(t_{k+1}, z_p) = \frac{\tau}{2\tau_{lim}} \{T(t_k, z_{p+1}) + T(t_k, z_{p-1})\} + \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{lim}}\right) T(t_k, z_p)$$

on sort : $\tau_{lim} = \frac{a^2}{2D}$.

I3 : connaissant la température de tous les points à l'instant t_k , la formule ci-dessus permet de calculer à l'instant t_{k+1} **sauf pour les deux points extrêmes.**

I4 : le choix $\tau = \tau_{lim}$ est intéressant pour l'aspect calculatoire car il simplifie grandement la formule de calcul :

$$T(t_{k+1}, z_p) = \frac{1}{2} \{T(t_k, z_{p+1}) + T(t_k, z_{p-1})\}$$

On n'a même plus besoin de connaître les valeurs des grandeurs.

Rem : cette valeur est la valeur maximale qu'on peut prendre. Prendre une valeur supérieure entraîne une divergence de l'itération.

II) Problème à résoudre.

On impose $T(0,t)=20^{\circ}\text{C}$ et $T(L,t)=0^{\circ}\text{C}$. A l'instant initial, les autres points du mur sont à 0°C .
On veut obtenir l'évolution du champ de température dans le mur en fonction du temps et le visualiser sous la forme d'un dessin animé manuel.

τ_{lim} va nous servir de référence, donc $\tau_{lim} = 1\text{ s}$ (ce qui simplifie les calculs à effectuer).

Pour limiter le temps de calcul et le nombre d'images à générer, on prend $N=26$.

II1 : On a $L = (N - 1)a$ donc On calcule $\tau_{mur} = \frac{L^2}{D} = 2(N - 1)^2\tau_{lim}$

II2 : Avec 26 points, il faut 1250 itérations pour atteindre τ_{mur}

II3 : Avec 51 points, on passe à 5000 itérations.

AT5. Régime temporel. Approche dimensionnelle.

On peut remarquer que l'air est un isolant thermique et que le métal est un très conducteur thermique : les échanges à l'intérieur du métal seront beaucoup plus rapides qu'à l'interface métal-air. On peut donc penser que $\theta(M, t) \approx \theta(t)$.

AD sur les échanges volumiques dans le métal . On essaie faire apparaître une constante de temps.

e en m c_p en $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ λ en $\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1} = \text{J.s}^{-1}.\text{K}^{-1}.\text{m}^{-1}$ μ en kg.m^{-3}

J et kg n'apparaissent que dans deux termes. Ce sont les plus faciles à faire disparaître : μ et c_p vont ensemble, μ et $1/\lambda$ aussi.

On construit donc : $\frac{\mu c_p}{\lambda}$ en s.m^{-2} . Il suffit maintenant de multiplier par e^2 pour obtenir une constante de

temps : $\tau_{vol} = \frac{\mu c_p e^2}{\lambda} \approx 3,6\text{ s}$

AD sur les échanges surfaciques . On essaie faire apparaître une constante de temps.

e en m c_p en $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ h en $\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-2} = \text{J.s}^{-1}.\text{K}^{-1}.\text{m}^{-2}$ μ en kg.m^{-3}

La même méthode permet de construire : $\tau_s = \frac{\mu c_p e}{h} \approx 2\text{ heures}$

A l'échelle des échanges à la surface du métal, les échanges volumiques apparaissent comme instantanés et on peut considérer le champ de température homogène dans le métal.

On peut maintenant résoudre $\theta(t)$

Système : la plaque de métal de volume Se , de masse μSe de capacité thermique $C_{tige} = \mu Se c_p$.

Appliquons le premier principe en supposant la transformation isobare. Dans ce cas, la chaleur reçue est égale à la variation d'enthalpie. Sur l'intervalle de temps dt , où la température de la tige varie de $d\theta$:

$$\delta Q = dH = C_{tige} d\theta$$

La surface totale en contact avec l'air est $2S$. La chaleur reçue par la plaque vient de la surface (et elle est d'ailleurs négative car la tige se refroidit)

$$\delta Q = -P_{th}(2S)dt = -h(\theta(t) - \theta_{air})(2S)dt = -2Sh(\theta(t) - \theta_{air})dt$$

opposé de ce que reçoit l'air d'où le signe -

On égalise les deux expressions, on divise par dt qu'on fait tendre vers 0. On fait alors apparaître la dérivée temporelle et on obtient :

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \left(\frac{2h}{\mu c_p e}\right)(\theta(t) - \theta_{air}) = 0$$

La vraie constante de temps est en fait : $\tau_{air} = \frac{\tau_s}{2} = \frac{\mu c_p e}{2h} \approx 1\text{ h}$

et la solution est , en tenant compte des CI :

$$\theta(t) = \theta_{air} + (\theta_o - \theta_{air})\exp\left(-\frac{t}{\tau_{air}}\right)$$

Si vous oubliez le signe -, le système différentiel est divergent. Donc, vous devriez vous en apercevoir.

3) On reprend les notations de AT4.

3a) On calcule $\tau_{lim} = \frac{a^2}{2D} = \left(\frac{e}{N-1}\right)^2 \frac{1}{2D} \approx 2,85\text{ ms}$.

Ce qui fait environ 1,2 millions d'itérations par heure.

Si on veut bien voir l'exponentielle, on peut décider de travailler sur environ $3\tau_{air}$ soit donc finalement environ 3,6 millions d'itérations.

3b) Rappel : le processus de calcul ne peut pas calculer les deux points extrêmes. Il faut donc trouver autre chose.

Aux frontières du domaine, on a continuité du flux surfacique : la loi de Newton (dans l'air) et la loi de Fourier (dans le métal) doivent donner le même résultat.

Donc :

$$-P_{th}(x = 0^-) = j(x = 0^+) \quad \text{et} \quad j(x = e^-) = P_{th}(x = e^+)$$

Attention au signe -

$$-h(\theta(0) - \theta_{air}) = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}(x = 0) \approx -\lambda \frac{(\theta(a) - \theta(0))}{a}$$

$$h(\theta(Na) - \theta_{air}) = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}(x = e) \approx -\lambda \frac{(\theta(Na) - \theta(Na - a))}{a}$$

On peut maintenant sortir les deux points extrêmes qu'on ne peut pas calculer par itération:

$$\theta(0) = \frac{\lambda}{\lambda + ah} \left\{ \theta(a) + \frac{ah}{\lambda} \theta_{air} \right\}$$

$$\theta(Na) = \frac{\lambda}{\lambda + ah} \left\{ \theta(Na - a) + \frac{ah}{\lambda} \theta_{air} \right\}$$

Avec les numéros de points, cela donne :

$$\theta[0] = \frac{\lambda}{\lambda + ah} \left\{ \theta[1] + \frac{ah}{\lambda} \theta_{air} \right\}$$

$$\theta[N] = \frac{\lambda}{\lambda + ah} \left\{ \theta[N - 1] + \frac{ah}{\lambda} \theta_{air} \right\}$$

AT7. Déchets nucléaires.

4) $T(x, 0) = T_0$: à l'instant initial on suppose que tout l'argile est en équilibre thermique à la température de surface T_0 , donc la température de l'argile est uniforme pour $t < 0$.

$T(\ell, t) = T_0$: la surface reste toujours en équilibre thermique avec l'atmosphère dont la température moyenne est constante et vaut T_0 .

D'après la loi de Fourier projetée sur l'axe Ox : $j_{Tx}(0, T) = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)(0, t)$

la puissance totale $P = Np(t)$ dégagée en $x = 0$ peut partir vers le haut mais aussi vers le bas, donc la moitié seulement part vers le haut : $\frac{P}{2}$ est la puissance surfacique multipliée par la surface de contact S :

$$\frac{P}{2} = \frac{Np(t)}{2} = j_{Tx}(0, T) \cdot (S) = -2\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)(0, t). \text{ Et on obtient la formule demandée : } \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = -\frac{Np(t)}{2\lambda S}$$

5) Sur les graphiques les pentes à l'origine dépendent du temps, selon la relation

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = -\frac{Np(t)}{2\lambda S} \quad . \quad p(t) \text{ est une fonction décroissante du temps donc } \left|\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)(0, t)\right| \text{ est une fonction}$$

décroissante du temps.

Pour $x = 0$, c'est **la courbe intermédiaire qui a la pente la plus forte, en valeur absolue, elle correspond donc à $t = 10$ ans.**

Dans l'ordre décroissant des valeurs absolues des pentes, on trouve ensuite **la courbe supérieure qui correspond à $t = 40$ ans,**

Puis **la courbe inférieure à $t = 100$ ans**

6) La courbe la plus facile à utiliser est celle qui est sensiblement linéaire (donc $t=40$ ans) et qui permet d'évaluer la pente.

$$\text{On a } \frac{\partial T}{\partial x}(0, t = 40\text{ans}) = \frac{25-100}{50} = -1,5 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$$

On peut alors évaluer :

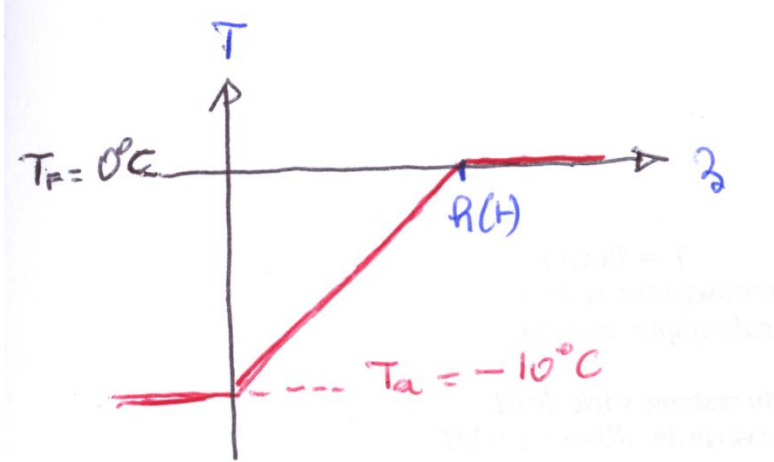
$$S = -\frac{Np(t = 40\text{ans})}{2\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0, t = 40\text{ans})} = \frac{36000 \times 1000 \times e^{-(40/43)}}{4,5} \approx 3,15 \times 10^6 \text{m}^2 = 3,15 \text{ (km)}^2$$

Typiquement un rectangle de 1km sur 3km.

AT8. Lac qui gèle en surface.

0) mL est l'énergie calorifique qu'il faut fournir pour transformer à 0°C une masse m de glace en eau. C'est aussi l'énergie libérée par une masse m d'eau qui devient une masse m de glace à 0°C.

1) On suppose un régime pseudo-permanent dans la glace. On a donc un profil de température linéaire dans la glace. A un instant t, on peut donc faire le dessin suivant :



La loi de Fourier donne alors : $\vec{j} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z = -\lambda \frac{T_F - T_a}{h(t)} \vec{e}_z = -\lambda \frac{\Delta T}{h(t)} \vec{e}_z$
Flux vers le haut.

2) On prend une section droite S de lac. Pendant dt, la hauteur de glace varie de dh, son volume varie donc de Sdh et sa masse varie de dm = μSdh .

L'énergie calorifique libérée est donc Ldm qui se dirige vers les zones froides donc vers le sol.

Le flux surfacique vers le haut est donc : μLdh .

En utilisant la question 1, on sort maintenant :

$$\lambda \frac{\Delta T}{h(t)} dt = \mu L dh$$

On divise par dt qu'on fait tendre vers 0 et on obtient l'équation différentielle :

$$h(t) \frac{dh}{dt} = \frac{\lambda \Delta T}{\mu L}$$

3) On intègre par rapport au temps :

$$\frac{1}{2} h^2 = \frac{\lambda \Delta T}{\mu L} t + Cte$$

La CI $h(0)=0$ donc Cte=0 et donc, en extrayant la solution positive :

$$h(t) = \sqrt{\frac{2\lambda \Delta T}{\mu L} t} = \sqrt{\frac{2\lambda T_o (\Delta T)}{\mu L}} \times \sqrt{\frac{t}{T_o}} \quad \text{donc } K = \sqrt{\frac{2\lambda T_o (\Delta T)}{\mu L}}$$

Question 4.

Dans cette nouvelle approche, il y a une discontinuité de température en $z=0$:

$$T(0^-) = T_a \quad \text{et} \quad T(0^+) \geq T_a$$

On garde toujours l'hypothèse du régime pseudo-permanent qui donne une puissance surfacique uniforme à un instant t et on peut écrire de 2 manières cette grandeur :

a) en $z>0$ avec la conduction $\vec{j} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z = -\lambda \frac{T_o - T(0^+)}{h} \vec{e}_z$

b) en $z=0$ avec le contact convectif $\vec{j} = -\alpha(T(0^+) - T_a) \vec{e}_z$

On obtient :

$$\lambda \frac{T_o - T(0^+)}{h} = \alpha(T(0^+) - T_a)$$

On reprend maintenant le calcul des questions précédentes sur la formation de la glace :

On prend une section droite S de d'eau

Pendant l'intervalle de temps dt , une masse dm d'eau devient solide ce qui libère une énergie Ldm .

On peut écrire $dm = \mu S dh$

L'énergie surfacique libérée est alors : $\mu L dh$ soit une puissance surfacique $\mu L (dh/dt)$ qui remonte alors vers la surface (il n'y a pas de transfert vers le bas car la température est uniforme). On a donc :

$$\vec{j} = -\mu L \left(\frac{dh}{dt} \right) \vec{e}_z$$

On élimine $T(0^+)$ dans les calculs car on ne la connaît pas (en plus elle varie dans le temps).

On obtient l'équation différentielle :

$$(\lambda + \alpha h(t)) \left(\frac{dh}{dt} \right) = \frac{\alpha \lambda (T_o - T_a)}{\mu L}$$

Qui s'intègre par rapport au temps avec $h(0)=0$. On obtient un polynôme de degré 2 dont il faudra extraire la racine positive.

$$h^2 + \frac{2\lambda}{\alpha} h - \frac{2\lambda(T_o - T_a)}{\mu L} t = 0$$

Si la température de l'air est plus petite que la température de l'eau, le déterminant est forcément positif et le produit des deux racines est négatifs donc la plus élevée est la bonne et ça prend la forme proposée.

AT10. Fer à repasser.**Question 1.**

$$1a) m = \mu SL. \text{ On calcule donc } L = \frac{m}{\mu S} = 5\text{mm.}$$

$$1b) \phi = \frac{P}{S} = 10^4 \text{W. m}^{-2}$$

$$1c) C_s = mc_p = 500 \text{J.K}^{-1}.$$

Question 2.

2a) $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$. Le signe - indique que le flux thermique va des températures élevées vers les températures faibles.

$$2b) \text{Simple AD : } \lambda \text{ en } \text{W. m}^{-1}\text{K}^{-1}.$$

Question 3.

3a) Application du premier principe de la thermodynamique. En supposant le volume constant, la chaleur reçue est égale à la variation d'énergie interne. Pour un solide ou un liquide, la variation d'énergie interne est pratiquement égale à la variation d'enthalpie. On peut remarquer que l'énoncé ne dit pas si la capacité calorifique est à volume ou pression constante.

La capacité calorifique du système est : $\mu c_p S dx$

Pendant l'intervalle de temps dt , la température du système varie de $d\theta$

$$\text{et on peut écrire : } dH \approx dU \approx (\mu c_p S dx) d\theta$$

La chaleur reçue par le système est alors : $\delta Q = S\{j(x) - j(x + dx)\}dt$

Ce qui donne finalement : $(\mu c_p S dx) d\theta = S\{j(x) - j(x + dx)\}dt$

On divise par $S dx dt$ et on fait tendre dx et dt vers 0 pour faire apparaître les dérivées partielles :

$$\mu c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial j}{\partial x}$$

3b) On projette Fourier sur l'axe Ox : $j = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}$ et on obtient finalement :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \left(\frac{\mu c_p}{\lambda}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Ordre 1 par rapport au temps. Le changement t donne $-t$ modifie l'EDP.

Question 4.

a) l'EDP précédente se simplifie : $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \theta''(x) = 0$ soit $\theta(x) = Ax + B$

A et B étant des constantes, qui seront déterminées ci-après. On a un profil linéaire, qu'on peut supposer décroissant.

b) En régime stationnaire le flux thermique est constant dans la semelle et on peut l'écrire de 3 façons :

$$\phi = \frac{P}{S} = 10^4 \text{W. m}^{-2} = j(0) = -A\lambda = j(L) = h(\theta(L) - \theta_a)$$

On sort alors :

$$\theta(x) = \frac{\phi}{\lambda}(L - x) + \theta_a + \frac{\phi}{h}$$

$$c) \theta(L) = \theta_a + \frac{\phi}{h} = 220^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad \theta(0) = \frac{\phi}{\lambda}(L) + \theta_a + \frac{\phi}{h} \approx 220,5^\circ\text{C}$$

Un métal est très conducteur de la chaleur, donc la température varie très peu dans la semelle. On aurait pu supposer la semelle isotherme.

Question 5.

a) En régime stationnaire, la puissance thermique est proportionnel à la différence de température. On sort ici :

$$P = \left(\frac{\lambda S}{L}\right) (\theta(0) - \theta(L)) = \frac{1}{R_s} (\theta(0) - \theta(L))$$

, analogue à une loi d'Ohm.

b) A l'interface, on sort aussi $P = hS(\theta(L) - \theta_a) = \frac{1}{R_c} (\theta(L) - \theta_a)$

c) La puissance thermique fournie par la résistance chauffante est équivalente à un générateur de courant qui débite dans deux résistances en série. Pour le circuit électrique, on est obligé de fermer le circuit, ce qui n'est pas le cas dans le circuit thermique. C'est la figure 6 sans le condensateur.

Question 6.

6a) On peut prendre la température moyenne au milieu de la semelle. C'est vrai en régime stationnaire et presque vrai en régime transitoire.

6b) On parle du même terme en thermique et élec : capacité. Une partie du flux thermique est capturé par le milieu qui voit alors sa température augmenter. Ce flux thermique pourra être récupéré quand la température du milieu va baisser.

(5) puissance thermique P , positive vers le haut.

(6) $x=0$ et température $\theta(0, t)$

(1) $R_s/2$

(7) point milieu de la semelle et température $\theta_M(t)$

(2) $R_s/2$

(8) $x=L$ et température $\theta(L, t)$

(3) R_c

(9) température θ_a , fermeture artificielle du circuit thermique

(4) capacité C_s . L'énergie stockée (équivalent de la charge) est $C_s(\theta_M(t) - \theta_a)$, la température θ_a étant la température d'équilibre de la semelle quand le fer ne fonctionne pas.

Question 7.

a) on peut appliquer la LDN en (7) :

$$P + C_s \frac{d}{dt} (\theta_a - \theta_M(t)) + \frac{1}{R_c + \frac{R_s}{2}} (\theta_a - \theta_M(t)) = 0$$

On aurait pu aussi le faire en RSP(ω) et repasser en réel ensuite :

$$\underline{P} + jC_s \omega (\underline{\theta}_a - \underline{\theta}_M(t)) + \frac{1}{R_c + \frac{R_s}{2}} (\underline{\theta}_a - \underline{\theta}_M(t)) = 0$$

Comme la température de l'air est une constante, on obtient finalement :

$$\theta_M(t) + \tau \frac{d}{dt} (\theta_M(t)) = \theta_a + P \left(\frac{2R_c + R_s}{2} \right) \quad \text{avec} \quad \tau = \left(\frac{2R_c + R_s}{2} \right) C_s \approx R_c C_s = 400s$$

b) τ est le temps caractéristique d'évolution de la température de la semelle. On atteindra le régime permanent au bout de quelques τ .

c) La solution générale est :

$$\theta_M(t) = A \cdot e^{-t/\tau} + \theta_a + P \left(\frac{2R_c + R_s}{2} \right)$$

Avec la CI : $\theta_M(0) = \theta_a$, on sort finalement :

$$\theta_M(t) = \theta_a + P \left(\frac{2R_c + R_s}{2} \right) (1 - e^{-t/\tau})$$

d) Pour obtenir $\theta_L(t)$, on peut utiliser un PDT

$$(\theta_L(t) - \theta_a) = \frac{R_c}{R_c + \frac{R_s}{2}} (\theta_M(t) - \theta_a) = R_c P (1 - e^{-t/\tau})$$

Il est important de marquer l'asymptote horizontale, et d'indiquer que la droite tangente à l'origine rencontre l'asymptote au bout du temps τ . Theta en °C et t en ks.

