

Correction du DM6

1. $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^\alpha}$ donc $\sum u_n$ CVN sur \mathbb{R}^+ si et seulement si $\alpha > 1$

2. Si $\alpha > 1$ alors

H1 : les fonctions u_n sont continues sur \mathbb{R}^+ .

H2 : $\sum u_n$ CVN sur \mathbb{R}^+ .

donc S est continue sur \mathbb{R}^+ pour $\alpha > 1$

3. a) $A_n(x) = \text{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right)$ et $e^{ix} \neq 1$ donc $\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = e^{i\frac{n+1}{2}x} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ donc $A_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$

b) Comme $\sin(kx) = A_k(x) - A_{k-1}(x)$ (en posant $A_0(x) = 0$), on a $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} (A_k(x) - A_{k-1}(x))$, puis

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k(x)}{k^\alpha} - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{A_p(x)}{(p+1)^\alpha} \text{ donc } S_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k(x) \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) + \frac{A_n(x)}{(n+1)^\alpha}$$

c) $|A_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n(x)}{(n+1)^\alpha} = 0$ et $\left| A_k(x) \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$ qui est le terme général d'une série convergente par télescopage; par majoration, $\sum_{n \geq 1} A_n(x) \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$ est ACV

$$\text{puis } \sum_{n \geq 1} u_n(x) \text{ CV et } S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(x) \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$$

d) On pose $f_n(x) = A_n(x) \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$ et on vérifie la CVN sur $[a, 2\pi - a] \subset]0, 2\pi[$: on a $|A_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \frac{a}{2}}$

donc $\|A_n\|_{\infty, [a, 2\pi - a]} \leq \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$ donc $\sum f_n$ CVN sur tout segment de $]0, 2\pi[$. On peut donc rédiger le théorème :

H1 : les fonctions f_n sont continues sur $]0, 2\pi[$

H2 : $\sum f_n$ CVN sur tout segment de $]0, 2\pi[$

donc S est continue sur $]0, 2\pi[$

4. a) $R_n \left(\frac{\pi}{4n} \right) - R_{2n} \left(\frac{\pi}{4n} \right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin \frac{k\pi}{4n}}{k^\alpha} \geq \sin \frac{(n+1)\pi}{4n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}$ car $\frac{k\pi}{4n} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ sur lequel \sin est croissante;

$$\text{puis } \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \geq n \frac{1}{(2n)^\alpha} \text{ ce qui donne } R_n \left(\frac{\pi}{4n} \right) - R_{2n} \left(\frac{\pi}{4n} \right) \geq \frac{n^{1-\alpha}}{2^\alpha} \sin \frac{(n+1)\pi}{4n}$$

b) Comme $\left| R_{2n} \left(\frac{\pi}{4n} \right) - R_n \left(\frac{\pi}{4n} \right) \right| \leq \|R_n\|_{\infty,]0, 2\pi[} + \|R_{2n}\|_{\infty,]0, 2\pi[}$, on en déduit que $(\|R_n\|_{\infty,]0, 2\pi[})_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{(n+1)\pi}{4n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $(n^{1-\alpha})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 pour $\alpha \leq 1$. Ainsi on peut donc conclure que

$$\sum u_n \text{ ne CV pas uniformément sur }]0, 2\pi[$$

5. a) On pose $t = n + u : u \mapsto n + u$ est \mathcal{C}^1 , bijectif, strictement croissante de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sur $\left[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right]$ donc

$$I_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin(nx + xu)}{n + u} du, \text{ ce qui donne ensuite le résultat en développant } \sin(nx + nu).$$

b) On a $\left| \int_{-1/2}^{1/2} \cos(xt) \left(\frac{1}{1+t/n} - 1 \right) dt \right| \leq \frac{1}{n} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{|t \cos(xt)|}{1+t/n} dt$ puis, si $|t| \leq \frac{1}{2}$, $\frac{|t \cos(xt)|}{1+t/n} \leq \frac{1/2}{1 - \frac{1}{2n}} \leq 1$ si

$$n \geq 1. \text{ On obtient donc } \left| \int_{-1/2}^{1/2} \cos(xt) \left(\frac{1}{1+t/n} - 1 \right) dt \right| \leq \frac{1}{n}$$

c) Comme $\int_{-1/2}^{1/2} \cos(xt) dt = \frac{\sin(x/2)}{x/2}$, il suffit de poser $v_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \int_{-1/2}^{1/2} \cos(xt) \left(\frac{1}{1+t/n} - 1 \right) dt$ en véri-

$$\text{fiant, grâce à la question précédente que } |v_n(x)| \leq \frac{|\sin(nx)|}{n^2} \text{ donc } |v_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

d) Cette fois on a $\int_{-1/2}^{1/2} \sin(xt) dt = 0$ et si on pose $\widetilde{v}_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n} \left| \int_{-1/2}^{1/2} \sin(xt) \left(\frac{1}{1+t/n} - 1 \right) dt \right|$ alors on vérifie de même que $|\widetilde{v}_n(x)| \leq \frac{1}{n^2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{|t \sin(xt)|}{1+t/n} dt \leq \frac{1}{n^2}$. On termine en posant $w_n(x) = v_n(x) + \widetilde{v}_n(x)$.

e) On a :

H1 : les fonctions $\lim_{x \rightarrow 0^+} w_n(x) = 0$

H2 : $\sum w_n$ CVN sur \mathbb{R}^+ car $\|w_n\|_\infty \leq \frac{2}{n^2}$

On en déduit, par double limite (ou théorème de continuité appliqué en 0) que $\lim_0^+ T = 0$

f) Fait en cours (intégration)

g) Comme l'intégrale J existe, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} I_n(x) = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} dt$, puis on pose $u = xt : u \mapsto \frac{u}{x}$ est \mathcal{C}^1 , bijective et strictement croissante de $\left[\frac{x}{2}, +\infty\right[$ sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ pour $x > 0$, ce qui donne $\sum_{n=1}^{+\infty} I_n(x) = \int_{x/2}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$.

En sommant les égalités de **5.d**, on obtient $\int_{x/2}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\sin(x/2)}{x/2} S(x) + T(x)$ si $x \in]0, 2\pi[$.

Enfin, comme $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{x/2}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = J$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} = 1$ et $\lim_0 T = 0$, on en déduit $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = J = \frac{\pi}{2}$ donc

$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) \neq 0 = S(0)$ et S n'est pas continue à droite en 0