Problème : Séries factorielles

(inspiré de Centrale PC 2009 maths 1)

Partie I - Étude d'un exemple

On considère, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)} = \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}$ et, lorsque la série converge,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

1. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. a) Soit $a > 0$, montrer que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

b) En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, ainsi que la valeur de la limite en $+\infty$ de S.

3. Vérifier que S est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et montrer que $\lim_{x\to 0} S(x) = +\infty$.

4. Justifier que, si $x > 0$, on a $xS(x) - S(x+1) = 1$.
En déduire des équivalents de $S(x)$ quand x tend vers 0 et vers $+\infty$.

5. Tracer l'allure du graphe de S sur $\mathbb{R}^{+*}$.

6. a) Justifier, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, l'intégrabilité sur $[0, 1[$ de $\theta_n : t \mapsto t^n(1-t)^{x-1}$ et calculer

$$I_n(x) = \int_0^1 t^n(1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire soigneusement l'égalité, valable pour tout $x > 0$:

$$S(x) = \int_0^1 e^t(1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

Partie II - Séries factorielles

1. a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x > 0$, on pose

$$u_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad , \quad v_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x} \quad \text{et} \quad w_n(x) = \frac{u_n(x)}{v_n(x)}$$

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)$ est convergente.

b) En déduire qu'il existe $l(x)$, dépendant de x et strictement positif, tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n(x)}{v_n(x)} = l(x)$$

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $x > 0$ un réel. Montrer que le série $\sum_{n\geqslant 0} a_n u_n(x)$ est absolument convergente (en abrégé ACV) si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n v_n(x)$ est ACV.

3. On désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n u_n(x)$ soit ACV pour tout réel $x > 0$.

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{A}$. Montrer que

a) la fonction $f_a : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) la fonction f_a tend vers 0 en $+\infty$.

4. a) Donner un exemple d'un élément a de $\mathcal{A}$ avec a_n non nul pour tout entier n.

b) Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne soit pas un élément de $\mathcal{A}$.

5. Soit a un élément de $\mathcal{A}$.

a) Montrer que si $\alpha > 0$ alors la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{\ln(n)}{(n+1)^\alpha}$ est absolument convergente.

b) Montrer que, pour tout entier n, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$\forall x > 0, |u_n'(x)| \leqslant u_n(x)\left[\frac{1}{x} + \ln\left(1+\frac{n}{x}\right)\right]$$

c) En déduire que la fonction f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

Partie III - Représentation intégrale

On considère $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe de $\mathcal{A}$ et on continue de noter f_a la fonction $f_a : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est ACV pour tout $x \in [0,1[$.

Dans la suite, on définit la fonction ϕ_a par

$$\forall x \in [0,1[, \phi_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

2. Montrer que ϕ_a est continue sur $[0,1[$.

3. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$f_a(x) = \int_0^1 \phi_a(t)(1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t$$