I Suites et séries de fonctions

Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Modes de convergence des suites de fonctions

a) Convergence d'une suite de fonctions : convergence simple, convergence uniforme et convergence uniforme sur tout segment.

b) Continuité et convergence uniforme : la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur I est une fonction continue sur I ; le résultat reste valable dans le cas de la convergence uniforme sur tout segment de I.

2. Modes de convergence d'une série de fonctions

a) Convergence simple, uniforme, normale, uniforme et normale sur tout segment. La convergence normale sur I entraine la convergence absolue en $x \in I$.

b) Théorèmes de continuité et de double limite (*admis*) pour la somme d'une série de fonctions.

3. Intégration et dérivation des suites et séries de fonctions

a) Intégration des suites de fonctions :
- si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
- Théorème de convergence dominée (*admis*).

b) Intégration des séries de fonctions :
- si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ telle que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
- Théorème d'intégration terme à terme (*admis*).

c) Dérivation des suites et séries de fonctions : si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, $k \geqslant 1$, telle que, pour $j \in [\![0, k-1]\!]$, $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I et $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I alors f, la limite de (f_n), est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $f^{(k)} = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}$.

Application aux séries : si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I telle que, pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I et telle que $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I alors $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour $j \in [\![0, k]\!]$, $S^{(j)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

À suivre : la réduction