Fichiers wav.

représentation des données informatiques.

Les bits de données (0 ou 1) sont regroupés par 8, ce qui donne un octet. Cela peut représenter un entier écrit en base 2. On peut aussi écrire l'octet en base 16(les chiffres 0 à 9 puis les lettres A à F)

00000000 correspond à 0 en base 10 et 00 en base 16 ;

11111111 correspond à 255 en base 10 et FF en base 16.

Q1 :Quelles sont les écritures en base 2 et base 16 de l'octet 100 en base 10 ?

Description d'un fichier .wav simple.

Nous nous contenterons ici d'une structure simple : signal sonore mono codé sur 8 bits ou un octet.

Un fichier .wav est constitué d'un entête qui décrit le fichier et ensuite des données.

La taille TD des données est codée sur 4 octets TD_0,TD_1,TD_2,TD_3 avec :

$$TD = (TD_0) + (256 \times TD_1) + (256^2 \times TD_2) + (256^3 \times TD_3)$$

La fréquence d'échantillonnage f_e est codée sur 4 octets selon le même principe. Ainsi f_e=8000Hz correspond à 64,31,0,0 avec les octets écrits en base 10.

Nous avons aussi besoin de (TD+36) qui est la taille des données augmentée de 36 octets et codée sur le même principe.

L'entête est alors composé des 44 octets suivants (en base 10) avec lecture de gauche à droite et de haut en bas :

82	**73**	**70**	**70**	$(TD+36)_1$	$(TD+36)_2$	$(TD+36)_3$	$(TD+36)_4$
87	**65**	**86**	**69**	102	109	116	32
16	0	0	0	1	0	1	0
f_{e1}	f_{e2}	f_{e3}	f_{e4}	f_{e1}	f_{e2}	f_{e3}	f_{e4}
1	0	8	0	**100**	**97**	**116**	**97**
$(TD)_1$	$(TD)_2$	$(TD)_3$	$(TD)_4$				

Ensuite, il n'y aura qu'écrire les octets de données les uns derrière les autres.

Rem : en code ASCII, la suite 82 ;73 ;70 ;70 est la suite de lettres RIFF. La suite 87 ; 65 ; 86 ; 69 est WAVE. La suite 100 ; 97 ; 116 ; 97 est DATA.

Q2. En octets, quelle est la taille maximale des données sur le fichier décrit ci-dessus ? Pour une fréquence d'échantillonge de 8kHz, quelle sera la durée maximale d'enregistrement ?

Q3. Comment sera codé une fréquence d'échantillonnage de 44,1kHz ?

Q4. La première ligne de l'entete d'un fichier wav, échantilloné à 44,1kHz,est la suivante :

82	73	70	70	250	75	0	0

Quelle est la durée du morceau en ms ?

Proposition de solution.

Q1) $100=64+32+4=2^6+2^5+2^2$ soit l'octet 01100100.

$100=6*16+4$ soit 64 en base 16.

Q2)Au maximum, les quatre derniers octets de la ligne 1 sont à 255.

Donc la taille maximale est :

$$taillemax = 255 + 255 \cdot 256 + 255 \cdot 256^2 + 255 \cdot 256^3 = 4\,294\,967\,295\ octets$$

Comme le résultat est un entier, il n'y a pas d'erreur.

On peut ne pas retrancher 36.

Il faut 8000 octets par seconde, donc la durée est environ de 536 871 s ou 6,21 jours.

Q3)Les quatre derniers octets de la ligne nous permettent de calculer la taille des données (il faut en toute rigueur retrancher 36) :

$$taille\ data = 250 + 75 \cdot 250 - 36 = 19414\ octets$$

Il faut 44100 octets par seconde, cela donnera donc une durée d'environ 440ms.

Recouvrement de spectre.

Rappels sur le signal numérique : N points s[k]=s(kτ) échantillonnés à la fréquence $f_e=1/\tau$ du signal analogique s(t). La fonction est en fait transformée en fonction en escalier de largeur τ. Chaque échantillon a une durée de τ. La TFD n'est évaluée qu'aux fréquences $\mathbf{f_n= n.f_e/N=n/T}$. Le pas fréquentiel est donc $\mathbf{\Delta f=1/T}$.

On considère un signal analogique constitué uniquement de sinusoïdes de fréquences f_i :

0kHz 2kHz 6kHz 11kHz 23kHz

On fait une acquisition de ce signal à une fréquence d'échantillonnage f_e=48kHz et on obtient alors N=9600 points d'une suite appelée s.

1)Quelle est la durée T de l'acquisition ?

2)Y-a-t-il des problèmes de recouvrement de spectre ?

3)La TFD de s donne 9600 points d'une suite appelée TFD(s) ce qui permet d'obtenir le spectre.

a)Quelles sont les fréquences pour lesquelles le spectre a été calculée ? Pourquoi considère-t-on habituellement que seule la première moitié de la suite est "utile" ?

b)Si on admet que les fréquences f_i sont connues de façon absolue au sens mathématique, quels sont les seuls points non nuls de la suite TFD(s)? Faire un dessin qualitatif.

c)Si on admet une imprécision typique de 1% sur les valeurs numériques fournies, comment se transforment qualitativement les résultats de la question précédente ?

4)On souhaite maintenant rééchantilloner le signal numérique s précédemment obtenu à une fréquence d'échantillonnage f_{e2}=8kHz. On obtient la suite s2.

a)Comment faire de la façon la plus simple ? Combien aura-t-on alors de points ?

b)On fait alors la TFD de s2. Quelles sont les fréquences pour lesquelles le spectre est calculé ? Quelles sont les fréquences détectées dans cette TFD ? Donner la forme qualitative du spectre en prenant tous les points de la TFD et en notant les abscisses intéressantes.

Correction.

1)La durée totale est $T=N\tau=N/f_e=0{,}2$s.

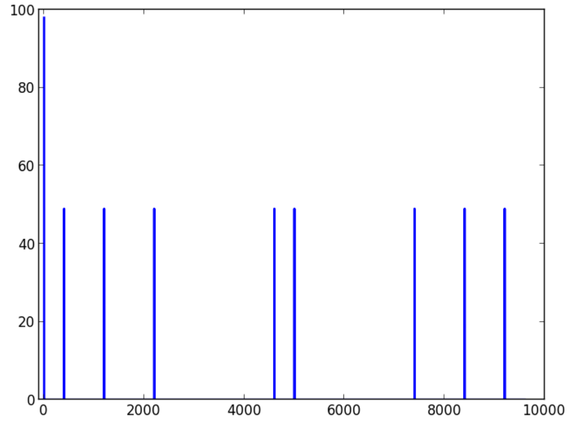
2)La fréquence présente la plus élevée est inférieure à $f_e/2$=24kHz donc il n'a aucun problème de recouvrement de spectre.

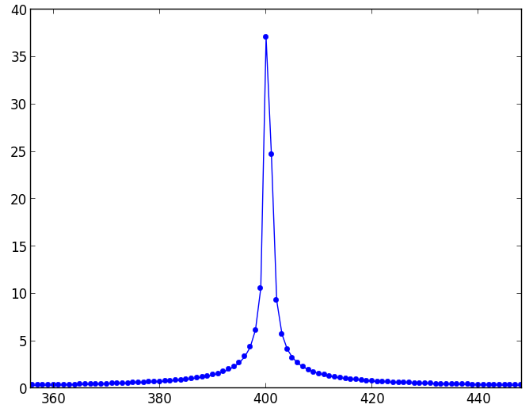
3) a)Le spectre est calculé pour les fréquences multiples de $\Delta f=1/T=5$Hz en commençant à 0 et en finissant à 9599Δf=47,995kHz.

A cause du repliement de spectre, une fréquence présente apparaît 2 fois : 1 fois dans la première moitié, une fois dans la seconde moitié. Pour qu'il n'y ait pas d'erreur, il faut absolument être sûr au départ que seules des fréquences inférieure à $f_e/2$ soient présentes.

b)Si il n'y aucune erreur sur les fréquences présentes, celles –ci correspondent toutes à des points de mesure dont les numéros sont successivement : 0;400;1200;2200;4600 et évidemment les valeurs miroirs : 5000;7400;8400;9200 sauf pour le continu. Ces points ont des valeurs non nulles et tous les autres sont rigoureusement nuls. On a des pics de Dirac.

c)Maintenant, les fréquences présentes ne font pas partie des fréquences de calcul (multiples de 5Hz), donc il y aura étalement des pics autour de la fréquence présente.





spectre avec fréquences exactes où on voit de beau pics puis zoom au voisinage du point n°400 si on prend 2002Hz (qui n'est pas un point de calcul) au lieu de 2000Hz. On a étalement du pic

4)On souhaite maintenant rééchantilloner le signal numérique s précédemment obtenu à une fréquence d'échantillonnage f_{e2}=8kHz. On obtient la suite s2.

a)Il suffit de prendre un point sur 6 et on obtient alors 1600 points.

b)Le pas fréquentiel est le même (soit 5Hz) mais l'intervalle spectral est maintenant [0 8kHz[et l'intervalle utile est [0 4kHz[.

Si on n'a pas fait attention à éliminer les fréquences supérieures à 4kHz, on va avoir du repliement de spectre.

Le continu est détecté à 0 (point n°0)

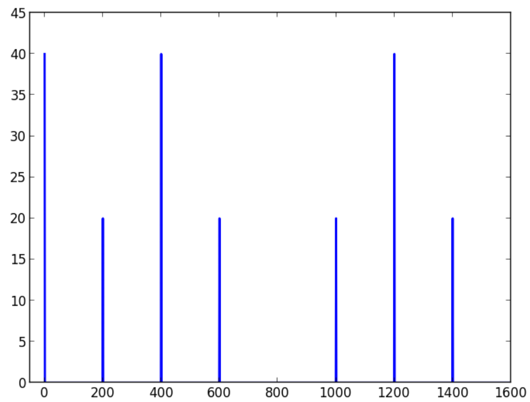
Le 2kHz est détecté à 2kHz(point n°400) et 6kHz(point n°1200).

Le 6kHz est détecté à 2kHzet 6kHzet se mélange avec la composante précédente.

Le 11kHz est repéré à 3kHz(point n°600) et 5kHz(point n°1000).

Le 23kHz est repéré à 1kHz(point n°200) et 7kHz(point n°1400).

Cela donne :



Etude de la TFD. **Vous pouvez deviner des tas de résultats.**

Définitions et rappels :

En Physique, j est le nombre complexe de module 1 et d'argument +π/2.

$(1+X+X^2+\cdots+X^{N-1})(1-X)=(1-X^N)$ $\qquad \cos(\theta)=\dfrac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ $\qquad \sin(\theta)=\dfrac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$

$e^a.e^b=e^{a+b}$ $\qquad e^{N.a}=\left(e^a\right)^N$

Soit s une suite réelle ou complexe de N termes, de terme courant s[k], k variant de 0 à (N-1). A partir de s, on peut construire deux autres suites Ts et <u>T</u>s par les définitions suivantes, valables uniquement dans cet énoncé.

Ts est défini par : pour n compris entre 0 et N-1 , $Ts[n]=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}s[k]e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$

<u>T</u>s est défini par : pour n compris entre 0 et N-1 , $\underline{T}s[n]=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}s[k]e^{+j\frac{2\pi kn}{N}}$

La première est la Transformée de Fourier Discrète (TFD) de s, la deuxième est la Transformée Discrète Inverse de Fourier de s (iTFD). Pour compliquer un peu plus le problème, les mathématiciens ont pris les définitions inverses. On peut calculer la TFD ou l'iTFD de n'importe quelle suite finie.
Les calculs sont généralement conduits de façon numérique par ordinateur. Mais nous sommes plus intelligents qu'un ordinateur.

Question : si s_1 *et* s_2 *sont deux suites de même taille N, si* α *et* β *sont deux réels, que peut-on dire de* $T(\alpha s_1+\beta s_2)$ *?*

A.Discrétisation d'un signal analogique.

Soit $s(t)=A.\cos(2\pi f_s t)$ *un signal temporel analogique sinusoïdal de fréquence* f_s *qu'on discrétise à la fréquence* $f_e=\frac{1}{\tau}$. *A est positif.*
On construit ainsi une suite de N termes dont le terme courant est, pour k compris entre 0 et (N-1):

$$s[k]=s(k\tau)=s\left(\frac{k}{f_e}\right)$$

Donner une expression de l'élément courant s[k].

B.Premiers calculs et interprétations.

Dans cette partie, la fréquence du signal est très particulière : $f_s=p\left(\frac{f_e}{N}\right)$ *, p étant un entier compris entre 0 et N-1 sauf N/2.*

0)Réécrire l'élément courant s[k]

1)Calculer la valeur commune de $Ts[p]$ *et* $Ts[N-p]$*, proportionnelle à* $A\sqrt{N}$ *. On utilisera les propriétés rappelées en début de problème.*
Remarque : si le calcul n'a pas l'air simple, le résultat l'est.
On évacuera le cas potentiel p=N/2 pour lequel le résultat est le double du résultat obtenu ci-dessus.

2)Pour n différent de p et de (N-p), montrer que $Ts[n]$ *prend une valeur très simple.*

3)Le spectre de s est la représentation graphique de $\|Ts[n]\|$ *en ordonnée en fonction de* $f(n)=n\left(\frac{f_e}{N}\right)$ *en abscisse. On va donc dessiner un nuage de N points.*
Donner son allure pour N=100 pour les deux cas suivants : p=25 puis p=80.

4)Le signal s est maintenant constitué de la somme de plusieurs sinusoïdes (on prendra la forme générique de la partie A) :

sinusoïde 1 : amplitude A , fréquence $f_{s1} = p_1 \left(\frac{f_e}{N}\right)$ *avec* $p_1 = 25$

sinusoïde 2 : amplitude 2A , fréquence $f_{s2} = p_2 \left(\frac{f_e}{N}\right)$ *avec* $p_2 = 40$

sinusoïde 3 : amplitude 3A , fréquence $f_{s3} = p_3 \left(\frac{f_e}{N}\right)$ *avec* $p_3 = 80$

Temporellement, la somme ne permet pas de reconnaître facilement les différentes composantes, ni les amplitudes, ni les fréquences.

Construire le spectre de cette somme pour N=100.
A partir de ce spectre, peut-on reconstituer les amplitudes et fréquences présentes ? Explications et commentaires nécessaires.

5)On suppose maintenant que la fréquence fréquence du signal est : $f_s = p' \left(\frac{f_e}{N}\right)$ *, p' étant un entier compris entre N et 2N-1. On peut donc poser p'=p+N avec p compris entre 0 et N-1.*
Comment sont changés les calculs des questions 1 et 2 ?
Quel est le nouveau spectre ? Commenter et généraliser le résultat obtenu.

C. Passons à l'étape suivante.

On reprend le premier signal pour lequel on reprend les résultats obtenus aux questions B1 et B2.
La TFD de s est une suite de même taille que s. On peut donc calculer à tout hasard son iTFD, qu'on notera TTs et dont l'élément courant sera noté TTs[n] pour n compris entre 0 et (N-1).

Poser le calcul de cet élement courant. Remarquer la somme n'est pas aussi longue qu'elle paraît. En achevant le calcul, montrer qu'on obtient un résultat très intéressant.

D. Filtration.

On fait l'acquisition de N=1000 points d'un signal à la fréquence d'échantillonage f_e*=2000Hz.*
On a donc un tableau s de 1000 valeurs dans la mémoire vive de l'ordinateur. On notera s[n] l'élement courant avec n entre 0 et N-1.

QP)On souhaite enlever la composante continue du signal numérique. Comment va-t-on faire ?

Les différentes composantes sinusoïdales du signal sont : f_1*=100Hz ;* f_2*=300Hz ;* f_3*=600Hz. Il n'y a pas de composante continue.*

1)Donner l'allure du spectre du signal en indiquant notamment les abscisses des points significatifs.
2)On veut supprimer la sinusoïde de fréquence f_2*. Proposer une méthode de calcul.*

E. Conclusion.

Expliquer en quoi la réalité expérimentale est plus compliquée. Dans une expérience réelle, donner une forme plus réaliste du spectre du signal de la partie D.

PREMIERE QUESTION : EVIDENT $T(\alpha s_1 + \beta s_2) = \alpha T(s_1) + \beta T(s_2)$.

$\boxed{\text{PARTIE A}}$ $s[k] = A\cos(2\pi k f_0 \tau)$ $\tau \longrightarrow \frac{1}{fe}$

$\boxed{\text{PARTIE B}}$

⓪ ON REMPLACE f_0 par $p\left(\frac{fe}{N}\right)$ $\boxed{s[k] = A\cos\left(\frac{2\pi p k}{N}\right)}$

①

$$Ts[p] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} s[k]\, e^{-j\frac{2\pi k p}{N}}$$

$$A\cos\left(\frac{2\pi k p}{N}\right) = \frac{A}{2}\left[e^{j\frac{2\pi k p}{N}} + e^{-j\frac{2\pi k p}{N}}\right]$$

$$Ts[p] = \frac{A}{2\sqrt{N}}\left[\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} 1}_{N} + \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{e^{-j\frac{4\pi k p}{N}}}_{\left(e^{-j\frac{4\pi p}{N}}\right)^k = X^k}\right]$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{-j\frac{4\pi p}{N}}\right)^k}_{1 + X + \dots + X^{N-1}} = \frac{1-X^N}{1-X} \quad (X \neq 1)$$

SI ON ÉVACUE $p = \frac{N}{2}$, $X \neq 1$ MAIS $X^N = 1$

$\longrightarrow \boxed{Ts[p] = \frac{A\sqrt{N}}{2}}$

MÊME MÉTHODE DE CALCUL POUR L'AUTRE, EN ÉVACUANT TJS $p = \frac{N}{2}$. ON TROUVE LE MÊME RÉSULTAT.

$\boxed{Ts[N-p] = \frac{A\sqrt{N}}{2}}$ JE VOUS LE LAISSE.

②

② ON DEVRAIT TROUVER 0.

$$Ts[n] = \frac{A}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi p k}{N}\right)}_{\frac{e^{j()} + e^{-j()}}{2}} \cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

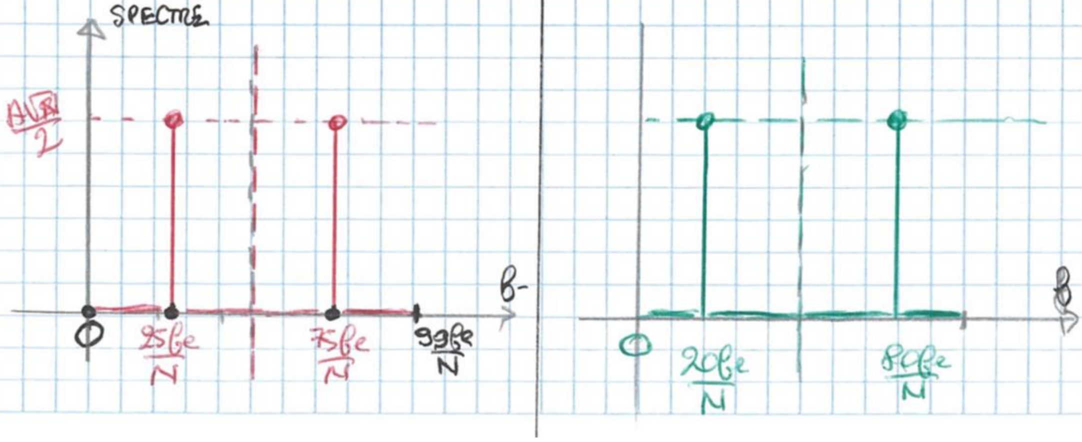
$$= \frac{A}{2\sqrt{N}} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{e^{j\frac{2\pi k}{N}(p-n)}}_{\left(e^{j\frac{2\pi(p-n)}{N}}\right)^{k}}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{e^{-j\frac{2\pi k}{N}(p+n)}}_{\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}(p+n)}\right)^{k}}} \right)$$

$$\underbrace{\frac{1 - \overbrace{e^{j2\pi(p-n)}}^{=1}}{1 - \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{N}(p-n)}}_{\neq 1}}}_{0} \qquad \underbrace{\frac{1 - \overbrace{e^{-j2\pi(p+n)}}^{=1}}{1 - \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+p)}}_{\neq 1}}}_{0}$$

ET VOILÀ.

③ POUR LA PREMIÈRE SINUSOÏDE, LES POINTS N° 25 et 75 SONT ÉGAUX À $\frac{A\sqrt{N}}{2}$. LES AUTRES POINTS SONT NULS

POUR LA SECONDE, LES POINTS N° 80 et $100-80 = 20$ SONT ÉGAUX ET VALENT $\frac{A\sqrt{N}}{2}$. LES AUTRES POINTS



3

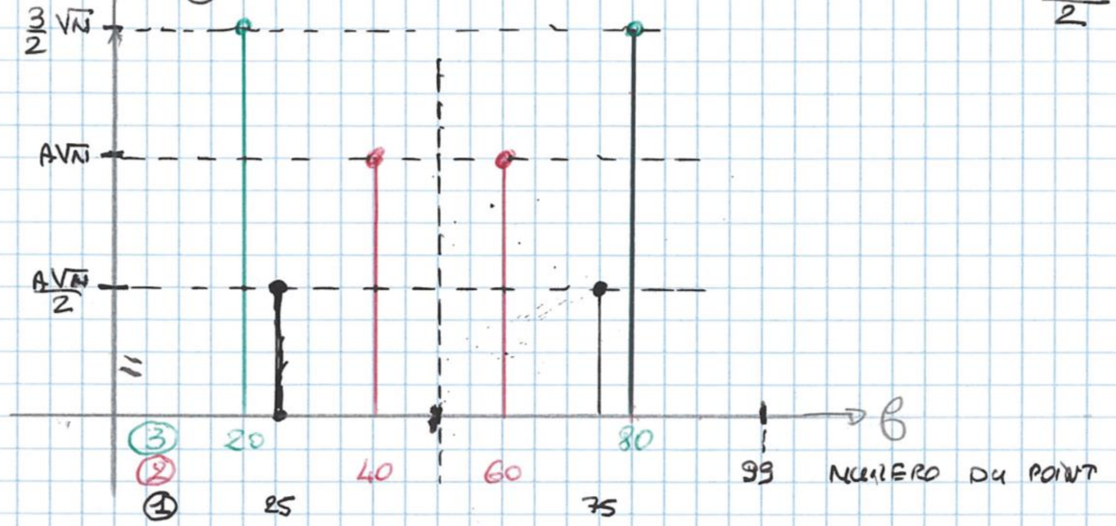
4 LES DIFFERENTES TFD S'AJOUTENT.

SINUSOÏDE 1 TOUS LES POINTS NULS SAUF n°25 et 75 à $\frac{A\sqrt{N}}{2}$

2 ———————— n°40 et 60 à $A\sqrt{N}$

AMPLITUDE

3 ———————— n°80 et 20 à $\frac{3A\sqrt{N}}{2}$



CHAQUE SINUSOÏDE LAISSE DEUX TRACES FREQUENTIELLES
LA QUELLE PRENDRE ?

ON RETROUVE LE CRITÈRE DE SHANNON : LA BONNE SIGNATURE EST LA PLUS PETITE SI LA FREQUENCE EST INFERIEURE À $f_e/2$

ICI SINUSOÏDES 1 et 2 CORRECTEMENT DETECTÉES

ERREUR SUR 3

ON DETECTE AUSSI L'AMPLITUDE SUR LE SPECTRE.

5

IL SUFFIT DE REGARDER LA FORMULE POUR VERIFIER QUE LES RESULTATS SONT LES MÊMES AVEC p et p'.

⇒ ON RETROUVE LA PERIODICITÉ.

$\boxed{\text{TOUTE FRÉQUENCE PRESENTE, QUELLE QUE SOIT SA VALEUR, LAISSE UNE SIGNATURE DANS L'INTERVALLE } [0\ f_e/2[}$

4

PARTIE C ON A DONC $T_s[p] = T_s[N-p] = \frac{A\sqrt{N}}{2}$

SINON 0.

ON REECRIT LE CALCUL À FAIRE.

Pour n entre 0 et $N-1$

$$IT_s[n] = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{T_s[k]}_{\text{PRES QUE TOUS NULS, DEUX NON NULS}} e^{+j\frac{2\pi kn}{N}}\right)$$

$$IT_s[n] = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(T_s[p]\, e^{j\frac{2\pi np}{N}} + T_s[N-p]\, e^{j\frac{2\pi n}{N}(N-p)}\right)$$

$$= \frac{A}{2}\left(e^{j\frac{2\pi np}{N}} + e^{-j\frac{2\pi np}{N}}\right)$$

$$= A\cos\left(\frac{2\pi np}{N}\right) = s[n]$$

CALCUL EXACTE

POUR UNE SINUSOÏDE, l'iTFD de la TFD redonne LE SIGNAL INITIAL.

$$\boxed{iTFD(TFD) = Id}$$

A PRIORI, ÇA NE SERT À RIEN. PASSONS À LA PARTIE SUIVANTE.

5

PARTIE D

QP DEUX METHODES

* LA COMPOSANTE CONTINUE EST LA VALEUR MOYENNE

SOIT DONC $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s[k] = \langle s \rangle$

MAINTENANT : POUR k de $0 \to N-1$

$s[k] = s[k] - \langle s \rangle$.

* DANS LE SPECTRE, LA COMPOSANTE CONTINUE EST LE PREMIER POINT.

TFD (SIGNAL) $\longrightarrow$ PREMIER POINT A 0 $\xrightarrow{ITFD}$ ~~COMPOSANTE CONTINUE~~

---

① ICI, LE PAS SPECTRAL $\frac{fe}{N} = 2$ Hz.

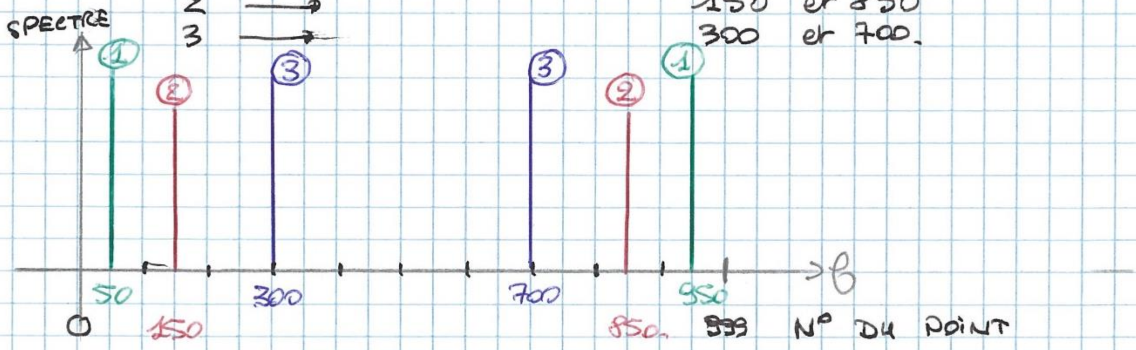
LE POINT n° k correspond à la fréquence 2k Hz

DONC

SINUSOÏDE 1 $\longrightarrow$ TRACE AUX POINTS 50 et 950.

2 $\longrightarrow$ 150 et 850

3 $\longrightarrow$ 300 et 700.

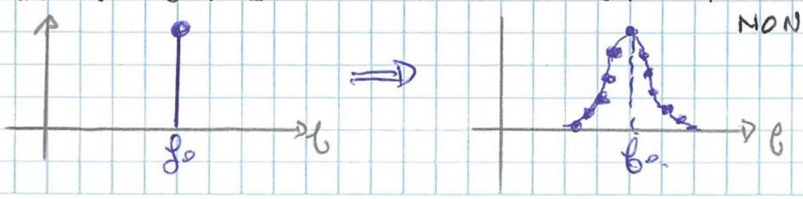


② ON FAIT LA TFD de S. ON MET LES POINTS n°150 et 850 à 0. ON REFAIT L'ITFD.

LA SINUSOÏDE N° 2 A DISPARU.

Ⓔ DANS LA REALITÉ, LES VALEURS NE SONT PAS EXACTES COMME DANS LES CALCULS PRÉCÉDENT.

LE "DIRAC" D'UNE SINUSOÏDE DEVIENT UN PIC DE LARGEUR NON NULLE.



Etude d'un filtre numérique.

Un signal analogique e(t)=E.cos(2πft) est numérisé à la fréquence d'échantillonnage f_e. On obtient la suite e[k]=e(k.τ) avec $\tau=1/f_e$, la valeur initiale de k étant 0.

On construit maintenant la suite s par les relations suivantes :

s[0]=s[1]=0

Pour k>1, $s[k] = e[k] - 2\alpha e[k-1] + e[k-2] + 2\alpha\rho s[k-1] - \rho^2 s[k-2]$

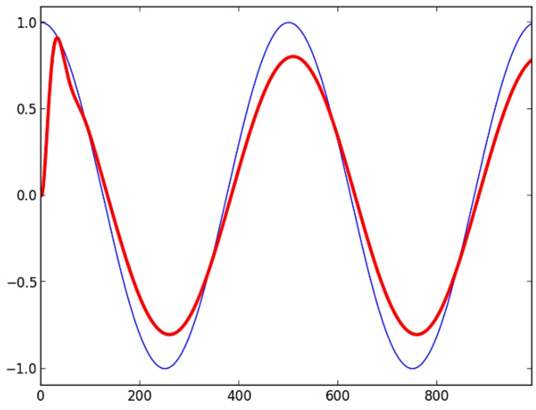
Où $\alpha = cos(\beta)$ avec $\beta = 2\pi\frac{f_0}{f_e}$ et ρ un réel proche de 1 par valeurs inférieures.

1)Montrer que si $f=f_0$, la suite s est une suite très simple.

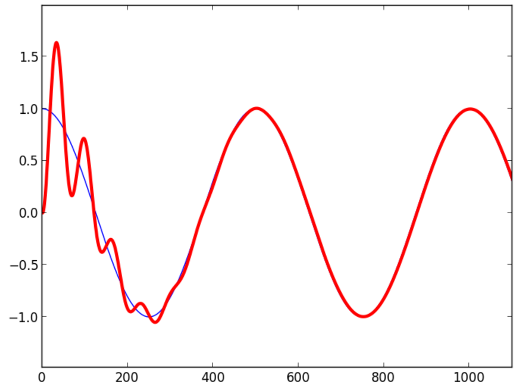
Que pourrait être ce filtre ? Comment imaginer le filtre complémentaire ?

2)Le signal d'entrée est une sinusoïde d'amplitude 1. On teste plusieurs réponses en modifiant uniquement ρ. L'entrée est en très fin, la sortie est en très gras.

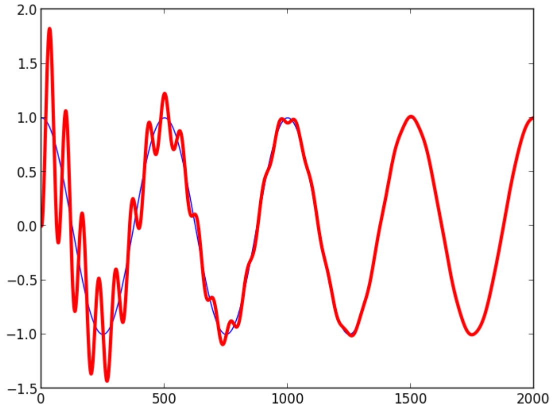
ρ=0,95



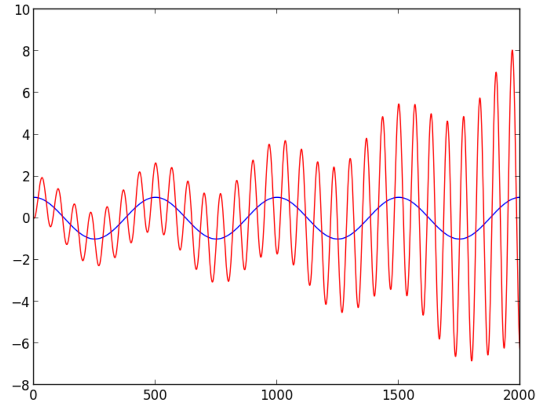
ρ=0,99



ρ=0,997



ρ=1,001



Discuter l'influence de ρ sur le signal de sortie calculé.

Solution :

1)Si deux termes successifs sont nuls, il suffit de vérifier que le suivant l'est aussi… si vous connaissez votre trigo. Il pourrait s'agir d'un filtre coupe-bande centrée sur la fréquence f_o. Et c'est bien le cas.

2)Pour ρ<1 , on peut considérer que la sortie part de 0 vers un régime permanent en passant par un régime transitoire. Plus ρ est proche de 1 par valeurs inférieures :

plus le régime transitoire est long

plus le gain est proche de 1 pour le régime permanent.

Pour ρ>1, la suite est divergente comme le montre l'exemple ρ=1,001.

Filtre numérique étudié avec Python.

On reprend un filtre numérique vu en feuille d'exercice :

Un signal analogique e(t)=E.cos(2πft) est numérisé à la fréquence d'échantillonnage f_e. On obtient la suite e[k]=e(k.τ) avec $\tau=1/f_e$, la valeur initiale de k étant 0.

On construit maintenant la suite s par les relations suivantes :

s[0]=s[1]=0 (ce n'est en fait pas obligatoire)

Pour k>1, $s[k] = e[k] - 2\alpha e[k-1] + e[k-2] + 2\alpha\rho s[k-1] - \rho^2 s[k-2]$

Où $\alpha = cos(\beta)$ avec $\beta = 2\pi\frac{f_{supp}}{f_e}$ et ρ un réel proche de 1 par valeurs inférieures.

Ce filtre est censé être un filtre coupe-bande centré sur la fréquence f_{supp}.

On souhaite ici mettre en évidence les propriétés de ce filtre par une approche empirique sous Python. Le fichier de base est : dl16_02gain_coupebande.py écrit en python 2.7 avec la distribution python(x,y). Des modifs seront peut-être nécessaires avec une autre distribution. Une édition de ce fichier est fournie à la fin de ce problème, Le fichier lui-même vous a été envoyé et est disponible sur le serveur de la classe http://psi2.perso.sfr.fr

Dans ce fichier, le signal numérique d'entrée est constitué de 2000 points d'une sinusoïde d'amplitude 1 échantillonnée à la fréquence 1kHz. On choisit juste sa fréquence.

1)Dans cette question, on souhaite étudier l'influence de ρ sur le signal filtré.
On prend en entrée une sinusoïde de 2Hz. Comparer les différents signaux filtrés obtenus avec f_{supp}=15 Hz pour les valeurs de ρ suivantes : 0,6 0,8 0,95 0,99 0,997
Commenter l'influence d'une augmentation de ρ. Les dessins, même qualitatifs, seront fournis.
Tester maintenant le dernier cas ρ=1,001 et commenter.

2)Quelle est la valeur efficace du signal d'entrée ? Décrire la fonction eff. Comment cette fonction permet-elle d'avoir accès au gain du filtre à une fréquence donnée.

Pour la suite, on prend f_{supp}=250Hz. Pour une valeur de ρ donné, on souhaite obtenir la valeur du gain pour toutes les fréquences entières comprises entre 0Hz et 499Hz et en faire une représentation graphique.

2a)Pourquoi ne pas aller au-delà de 499Hz ?

2b)On prendra successivement ρ=0,6 0,8 0,95 0,99.
Comparer les différentes représentations graphiques obtenues. Quelle est l'influence de ρ sur les caractéristiques du filtre ?
Les lignes python nécessaires seront fournies.

2c)Pourquoi n'a-t-on pas pris ρ=1,01 ?

3)Proposer des améliorations sur l'écriture initiale du fichier python fourni en listant ses défauts.

Edition du fichier python. Attention, les retraits obligatoires ont été perdus lors du copier-coller.

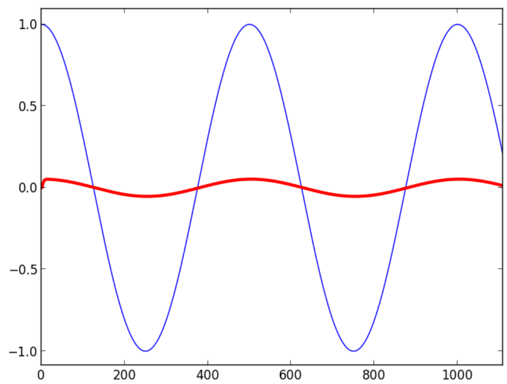
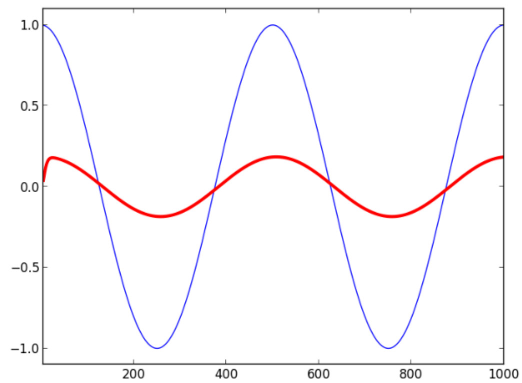
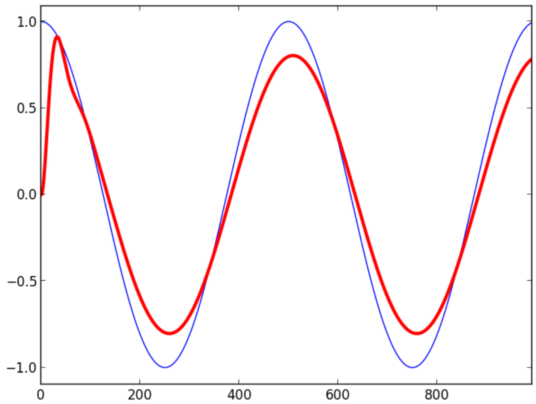
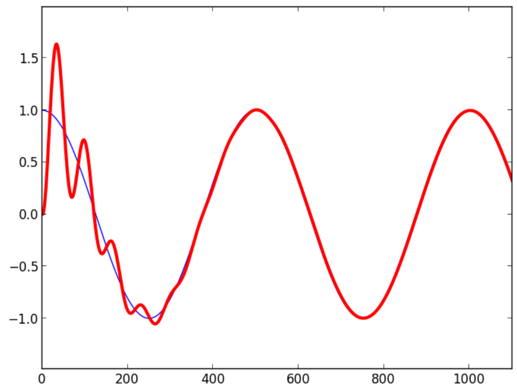
```
#2000 points
#fréquance échantillonnage 1000Hz
def signal(frequence):
e=[cos(2*pi*frequence/1000*k) for k in range(0,2000)]
return e
```

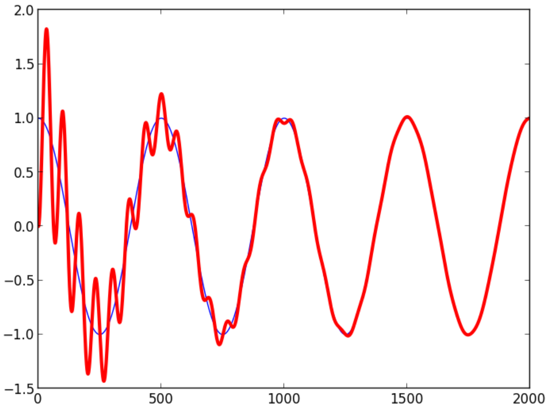
```
def filtre(e,fsupp,rho):
taille=len(e)
alpha=cos(2*pi*fsupp/1000)
s=zeros(taille)
for k in range(2,taille):
s[k]=e[k]-2*alpha*e[k-1]+e[k-2]+2*alpha*rho*s[k-1]-rho*rho*s[k-2]
return s

def eff(e):
taille=len(e)
s=0
for k in range(taille/2,taille):
s=s+e[k]*e[k]
return sqrt(2*s/taille)
```

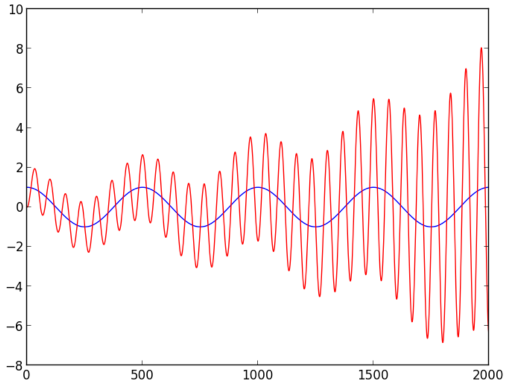
Correction.

1)

Pour successivement ρ= 0,6 0,8 0,95 0,99 0,997 1,001
on obtient les graphes suivants :





Pour ρ<1 , on peut considérer que la sortie part de 0 vers un régime permanent en passant par un régime transitoire. Plus ρ est proche de 1 par valeurs inférieures :

plus le régime transitoire est long

plus le gain est proche de 1 pour le régime permanent.

Pour ρ>1, la suite est divergente comme le montre l'exemple ρ=1,001. Pour ρ=1,0001 cela n'est pas très clair car le nombre de points est insuffisant.

2)L'amplitude du signal d'entrée est 1 donc sa valeur efficace est $E_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$.

La fonction eff réalise justement le calcul de la valeur efficace d'une suite, mais en ne faisant le calcul que pour la seconde moitié du signal. Il faut évidemment trouver une raison : il s'agit en fait d'éliminer le régime transitoire du calcul. Petit pb : il conviendrait que le nombre de points soit pair.

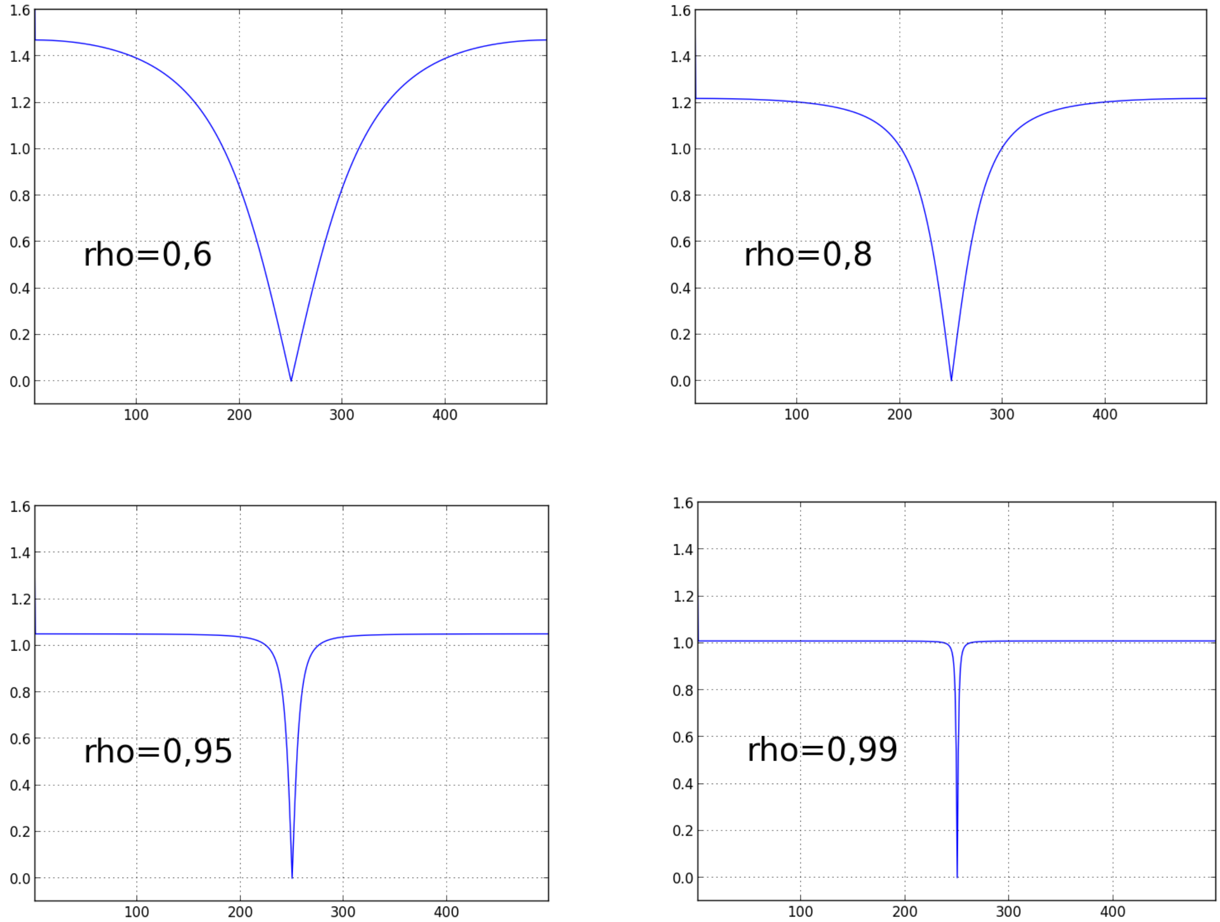
Pour obtenir le gain à une fréquence donnée, il suffira de demander le calcul de eff(sortie)/eff(entree).

3)a)Tout simplement à cause du repliement de spectre. Comme la fréquence d'échantillonage est 1000Hz, la bande passante se limite à l'intervalle [0   500Hz[.

3b)Au fichier initial, on peut ajouter les lignes suivantes :

```
f=[k for k in range(0,500)]
gain=zeros(500)

for k in range(0,500):
    gain[k]=eff(filtre(signal(f[k]),250,0.9))*sqrt(2)

plot(gain)
grid()
text(50,0.5,'rho=0,95', fontsize=28)
axis([1,499,-0.1,1.6])
print("fin")
```

On obtient les graphes suivants :



Commentaires : dans tous les cas, la fréquence f_{supp} semble bien éliminée. Plus ρ est proche de 1 par valeurs inférieures, plus le gain dans la bande passante est proche de 1, plus la bande coupée est étroite, plus le régime transitoire est long (question précédente).

3c) On n'a pas pris ρ=1,01 à cause de la divergence du régime transitoire. On n'observera pas le régime permanent.

4)A vos crayons…

Electronique numérique. Cryptographie.

On souhaite parfois crypter des fichiers sonores pour qu'ils ne puissent pas être lus par des personnes qui n'auraient pas payé leur abonnement. Nous allons voir ici une méthode simple de cryptage-décryptage qui a été utilisée (canal+ première époque).
On rappelle : cos(a+b)+cos(a-b)=2cos(a).cos(b)

Nous considérons une note la_3 de diapason , pure sinusoïde de fréquence f_o=440Hz échantillonnée à la fréquence f_e=48kHz. Le signal analogique peut s'écrire $e(t) = Ecos(2\pi f_o t)$ et le signal numérique associé : $e[k] = Ecos(2\pi f_o k\tau_e)$ avec k variant de 0 à (N-1) et $\tau_e=1/f_e$.

1)A quels instants les acquisitions ont-elles été faites ?

2)On décide de multiplier chaque terme e[k] par $cos(2\pi f_d k\tau_e)$ avec f_d=9kHz. On obtient alors la suite cryptée s[k]. Décrire la structure spectrale de la nouvelle suite. AN.

3)Alice envoie donc à Bob le fichier crypté. Mais Charlie, en embuscade, parvient à capturer le fichier crypté et l'écoute. Qu'entend-il ?

Peut-il , en étudiant la structure du fichier, trouver la valeur de f_d ?

4)En supposant que Charlie connaît la valeur numérique de f_d, que va-t-il faire pour retrouver le fichier initial ?

5)En fait un fichier sonore ne contient pas une note de musique mais un son complexe dont on supposera la bande spectrale bornée. D'un point de vue spectral, le fichier sonore ne contient que des fréquences comprises entre 0 et f_{max}=4kHz.

Y-t-il des problèmes au cryptage et au décryptage ?

Proposition de solution.

1)L'acquisition a été faite aux instants $t_k=k\tau_e$ avec k entier compris entre 0 et N-1.

2)Quand on décompose le produit, on voit apparaître deux composantes sinusoïdales d'amplitude commune E/2 aux fréquences $f_1=f_d-f_o$=8560Hz et $f_2=f_d+f_o$=9440Hz.

3)Quand Charlie capyure le signal, il ne va pas reconnaître la note du diapason, mais va entendre des hautes fréquences.

Par contre, s'il fait le spectre du signal, il verra les deux composantes. S'il connaît la méthode de cryptage, il comprendra que la fréquence de décallage est la demi-somme.

4)Charlie a donc trouvé f_d. Il lui suffit maintenant de faire une nouvelle fois l'opération de cryptage. On va obtenir trois sinusoïdes :

Fréquence	f_o=440Hz	$2f_d-f_o$=17,56kHz	$2f_d+f_o$=18,44kHz
Amplitude	E/2	E/4	E/4

Pour retrouver la note, Charlie peut filtrer pour éliminer les deux HF. Il peut éventuellement ne rien faire car les fréquences HF sont certainement en-dehors de la bande passante de ses haut-parleurs.

5)Au cryptage , la bande spectrale du signal devient [f_d-f_{max}=5kHz ; f_d+f_{max}=13kHz].
Quand on décrypte, on décalle de f_d vers le bas soit [-4kHz ; +4kHz] (en fait 2 fois le même signal) ce qui correpond donc à l'intervalle [0 4kHz] donc on retrouve l'intervalle initial.
On décalle aussi de f_d vers le haut soit un nouvel intervalle spectral [13kHz 22kHz]. Il faudra filtrer cet intervalle, sauf si il n'est pas dans la bande passante du haut-parleur.