

page 2 : onde sur câble coaxial.

page 3 : réflexion transmission à l'interface entre deux cordes.

page 4 : Ondes harmoniques sur une corde.

page 6 : Retour sur la corde...Agreg externe 2009 version extra light.

page 9 : Résolution numérique de l'équation d'onde.

page 11 : Etude d'un câble coaxial.

page 13 : câble avec pertes.

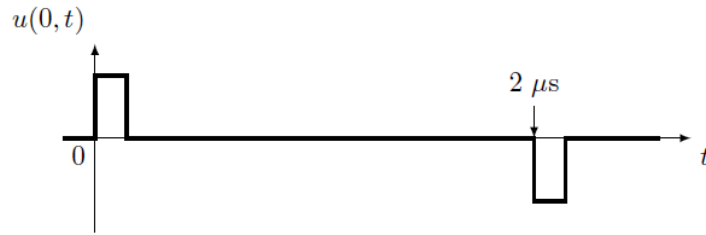
page 15 : Ondes élastiques dans un solide.

page 17 : Chaîne d'atomes à deux types de particules.

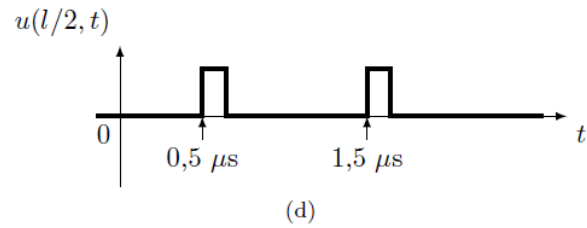
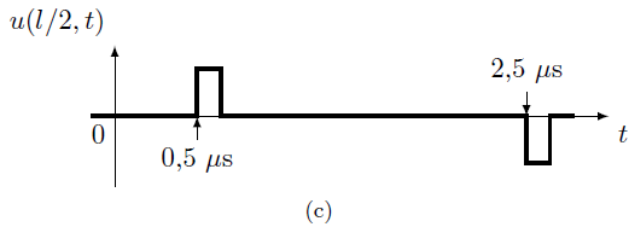
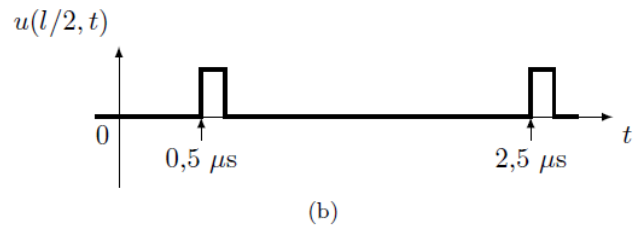
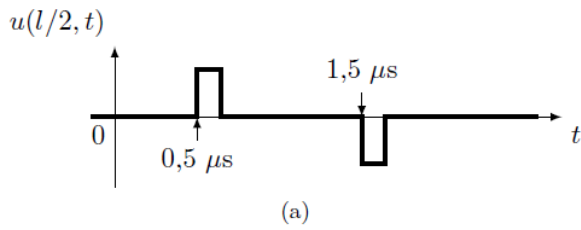
page 19 : Extrait modifié XENS ambitieux.

page 23 : Filtre peigne de fréquence. Sophistiqué.

- . Un câble coaxial peut être le siège de la propagation d'un signal de tension électrique. On envoie une impulsion unique de tension très courte dans un câble de longueur l . Un oscilloscope placé immédiatement en entrée du câble affiche le signal de tension $u(0, t)$ de la figure ci-dessous.



Quel signal $u(l/2, t)$ aurait-il affiché s'il avait été placé au milieu du câble ?



Réflexion transmission sur une corde non homogène.

Une corde infinie est constituée de deux parties :

—masse linéique μ_1 , tension T pour $x < 0$; —masse linéique μ_2 , tension T pour $x > 0$.

Une onde progressive harmonique $y_i(x,t)$ se dirige vers le point O en provenant de la région des x négatifs. En $x=0$, elle donne naissance à une onde réfléchie $y_r(x,t)$ et à une onde transmise $y_t(x,t)$. On appelle $y(x,t)$ l'onde totale.

En utilisant la notation complexe, les différentes ondes s'écrivent à un signe près :

$$\underline{y}_i(x, t) = Y_{io} \cdot \exp[j(\omega t \pm k_1 x)]$$

$$\underline{y}_r(x, t) = Y_{ro} \cdot \exp[j(\omega t \pm k_1 x)]$$

$$\underline{y}_t(x, t) = Y_{to} \cdot \exp[j(\omega t \pm k_2 x)]$$

Où ω , k_1 et k_2 sont des réels positifs.

1) Expliquer les bons signes à mettre.

2) A l'interface $x=0$, on a continuité de y et de sa dérivée spatiale. En déduire les deux relations liant Y_{io} , Y_{ro} , Y_{to} .

En déduire alors en fonction de k_1 et k_2 , les expressions de $\tau = \frac{Y_{to}}{Y_{io}}$ et $\rho = \frac{Y_{ro}}{Y_{io}}$.

Proposition de solution.

1) $y_i(x,t)$ et $y_t(x,t)$ sont des OPPH+ donc on prend le signe -. $y_r(x,t)$ est une OPPH- donc on prendra le signe +.

2)

Attention : ne pas confondre, comme certains l'ont fait, une relation de continuité avec une relation de conservation.

Pour $y(x,t)$, la relation de continuité en $x=0$ s'écrit :

$$y(x = 0^-, t) = y(x = 0^+, t)$$

Pour $x < 0$, l'onde totale est l'onde incidente + l'onde réfléchie

Pour $x > 0$, l'onde totale est l'onde transmise .

Soit

$$\begin{aligned} \underline{y}_i(x = 0^-, t) + \underline{y}_r(x = 0^-, t) &= \underline{y}_t(x = 0^+, t) \\ Y_{io} + Y_{ro} &= Y_{to} \end{aligned}$$

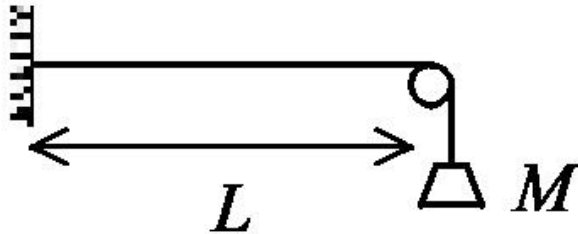
La même relation avec la dérivée spatiale en $x=0$ donne :

$$-jk_1 Y_{io} + jk_1 Y_{ro} = -jk_2 Y_{to}$$

En simplifiant, en divisant par Y_{io} , on fait apparaître un système de Cramer pour ρ et τ qui se résoud facilement en :

$$\rho = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

C'est homogène, et on peut vérifier le cas la corde 2 est identique à la corde 1, $\rho=0$ et $\tau=1$.

Ondes harmoniques sur une corde.

Une corde horizontale est fixée à une de ses extrémités et une masse $M=25\text{g}$ est suspendue à la seconde par le truchement d'une poulie. La longueur L de la corde tendue est $L=117\text{cm}$. On note μ_0 la masse linéique de la corde et T_0 la tension de la corde à l'équilibre. On s'intéresse aux petits mouvements verticaux $y(x,t)$ de la corde où x est l'abscisse comprise entre 0 et L . Dans ce cas, on montre que $y(x,t)$ obéit à l'équation de d'Alembert unidimensionnelle.

1) Retrouver **avec le minimum de calcul** l'expression de la vitesse de propagation c en fonction de T_0 et de μ_0 .

Ecrire l'équation de d'Alembert vérifiée par $y(x,t)$. Décrire l'ensemble des solutions de cette équation.

On s'intéresse maintenant aux mouvements sinusoïdaux permanents de pulsation temporelle ω compatibles avec les conditions aux limites. On décide d'utiliser la notation complexe.

2) Justifier la forme de la fonction proposée suivante :

$$\underline{y}(x, t) = \underline{A} \cdot e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B} \cdot e^{j(\omega t + kx)}$$

où k est une constante positive dont on donnera l'expression, et \underline{A} et \underline{B} deux nombres complexes.

3) En vous aidant des conditions aux limites, montrer que le mouvement ne peut avoir lieu que pour certaines pulsations ω_n , paramétrée par un entier strictement positif n .

4) Décrire le mouvement (qu'on appellera mode) correspondant à un entier n . On définira et dénumbrera les noeuds et ventres. Faire un dessin des modes 1 et 3 montrant la corde à un instant donné et l'enveloppe du mouvement.

5) Plusieurs modes peuvent-ils coexister ensemble ?

6) Application. Les fréquences expérimentales correspondant aux modes 2 et 3 sont $f_2=18\text{Hz}$ et $f_3=27\text{Hz}$. Vérifiez la cohérence de ces données. Calculer maintenant la vitesse de propagation puis la masse linéique de la corde.

Proposition de solution.

1) Une simple analyse dimensionnelle suffit. T_0 est une force en N ou kg.m.s^{-2} et μ est une masse linéique en kg.m^{-1} . $\frac{T_0}{\mu}$ est une vitesse au carré donc on peut définir c comme : $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

L'équation de d'Alembert est : $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)$.

Une solution quelconque de cette EDP est la somme d'une onde progressive se dirigeant selon les x croissant, donc dépendant de $\alpha = t - x/c$, et d'une onde progressive se dirigeant selon les x décroissant, donc dépendant de $\beta = t + x/c$.

2) Si on s'intéresse aux solutions sinusoïdales vis-à-vis du temps, une solution quelconque est une OPPH+ en $\omega\alpha$ + une OPPH- en $\omega\beta$. C'est bien la forme que propose la solution écrite en utilisant la notation complexe (ce qui permet notamment de ne pas avoir à définir de phase à l'origine). On a bien sur $k = \omega/c$.

3) On doit avoir $y(0,t) = y(L,t) = 0$ à tout instant. Ce qui donne le système :

$$\underline{A} + \underline{B} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{A}e^{-jkL} + \underline{B}e^{jkL} = 0$$

Si c'est un système de Cramer, la seule solution est le couple $\underline{A} = \underline{B} = 0$ et on retombe sur la solution nulle. Pour avoir une infinité de solutions, il faut $\Delta = 0$ ce qui conduit à :

$$\sin(kL) = 0 \quad \text{ou} \quad kL = \frac{\omega L}{c} = n\pi \quad n \text{ entier} > 0$$

On peut indiquer les pulsations avec n et écrire : $k_n = \frac{n\pi}{L}$ $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$

4) On peut maintenant résoudre le mode n :

$$y_n(x, t) = 2j\underline{B} \cdot \sin(k_n x) \cdot \exp(j\omega_n t)$$

x varie de 0 à L donc $k_n x$ varie de 0 à $n\pi$. Sur cet intervalle, le sinus va s'annuler $(n+1)$ fois et passer par un extremum n fois. Dans le premier cas, l'amplitude de vibration est nulle et on appelle un tel point un nœud. dans le second cas, l'amplitude de vibration est maximale et un tel point s'appelle un ventre.

Pour le mode n : n ventres et $(n+1)$ nœuds. Cf cours pour les dessins.

5) L'EDP est linéaire, donc l'ensemble des solutions est un espace vectoriel. On peut donc faire des combinaisons de solutions.

6) Les résultats fournis donnent un fondamental à $f_1 = 9\text{Hz}$.

On calcule alors $c = 2Lf_1 = 21,1 \text{ m.s}^{-1}$.

On a aussi $T_0 = mg = 0,245\text{N}$ avec $g = 9,8 \text{ SI}$.

On peut alors calculer : $\mu = \frac{T_0}{c^2} \approx 55 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$.

Retour sur la corde...Agreg externe 2009 version extra light.

On considère une corde sans raideur, de masse linéique constante μ , tendue par une tension T_0 . Au repos, la corde se confond avec l'axe Ox.

De part et d'autre de cette position d'équilibre, on étudie les petits mouvements transversaux de cette corde dans le plan xOy, en admettant qu'un élément de corde au repos (point M_0) reste pendant le mouvement à la même abscisse. L'élongation d'un point d'abscisse x à l'instant t (point M) est notée $y(x, t)$.

1. Équation d'onde pour un ébranlement le long de la corde.

Dans le cadre des petits mouvements transversaux, on montre que la norme de la tension du fil est constante et vaut T_0 , et que l'élongation $y(x,t)$ obéit à (1): $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

Déterminer par des arguments dimensionnels c en fonction de T_0 et de μ et donner sa signification.

AN : corde de guitare : $\mu=3g.m^{-1}$ et $T_0=103N$

corde de piano : $\rho=7800kg.m^{-3}$ et $T_0=850N$ diamètre de la corde $d=1,2mm$.

2. Recherche d'une solution en ondes stationnaires générales.

A présent la corde de longueur L est fixée en ses extrémités, deux points de l'axe Ox d'abscisse $x=0$ et $x=L$. On cherche les solutions de l'équation d'onde (1) sous la forme de variables séparées :

$$y(x, t) = f(x) \cdot g(t)$$

a. Montrer que f et g doivent être des fonctions sinusoïdales. En notant ω la pulsation de g(t), quelle est la pulsation k de f(x) ?

b. Montrer que les conditions aux limites imposent à ω de ne pouvoir prendre qu'une série de valeurs discrètes notées $\omega_n=2\pi f_n$ (n entier positif) et on montera $f_n = n \frac{c}{2L}$.

c. En déduire que pour des grandeurs L et v fixées, la longueur d'onde λ ne peut elle-même prendre qu'une suite de valeur λ_n . Exprimer la longueur λ_n en fonction de L.

d. Quelle est l'expression d'une solution $y_n(x,t)$ correspondant au mode de vibration n?

e. La corde de guitare précédente permet de jouer une note de fréquence fondamentale 147Hz (ré₂). Quelle est sa longueur ? Quelle est la longueur de la corde de piano jouant la même note ?

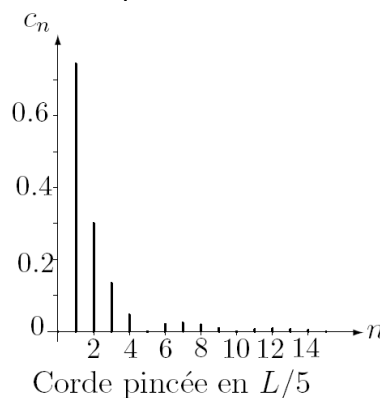
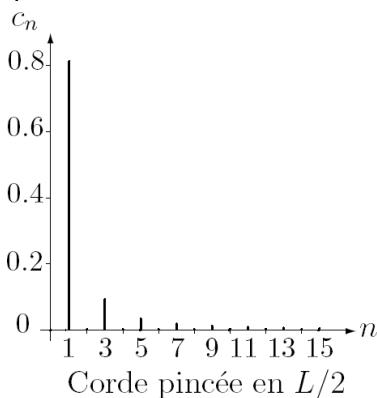
3. La solution générale de l'équation (1) s'écrit sous la forme (2) d'une série de Fourier double (période spatiale 2L et période temporelle 2L/c)

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

a. Justifier cette écriture. Interpréter la forme de la solution en fondamental et harmoniques. Quelle est l'amplitude c_n du mode n ?

b. Faire les schémas de la corde en mouvement pour les trois premiers harmoniques (n=1, n=2, n=3) pris individuellement.

c. Une corde de longueur L est pincée puis lâchée sans vitesse initiale à l'instant t=0 (cas typique d'une corde de clavecin ou de guitare). On donne les spectres calculés dans deux cas :



Comment peut-on expliquer l'absence de certaines harmoniques ? Où doit-on pincer pour éliminer l'harmonique n=7 ?

4. On montre que l'énergie totale de la corde dans le mode n, s'écrit $E_n = n^2 c_n^2 \frac{\pi^2 T_0}{4L}$.

a. Justifier que, dans le cas général, l'énergie totale E s'écrit : $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$.

b. Les amplitudes des différentes harmoniques d'une corde pincée (clavecin ou guitare) sont de la forme $c_n = \frac{c_1}{n^2}$ alors que ceux d'une corde frappée (piano) sont de la forme $c'_n = \frac{c'_1}{n}$. Comparer les énergies des différents modes d'une corde de clavecin et d'une corde de piano.

5. On tient compte dans cette question de la raideur de la corde. Dans ce cas, on peut montrer, mais on ne le fera pas, que l'équation de propagation devient :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ES K_0^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

E est le module d'Young du matériau constituant la corde. S est la section de la corde. K_0 est un coefficient dépendant de la forme de la section droite de la corde.

a. Dans le cas où la corde est cylindrique de rayon a, on montre que $K_0 = a/2$. Ce résultat est-il homogène ?

b. En supposant une déformation harmonique de la forme $y(x,t) = y_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(kx + \phi)$, déterminer la relation entre ω et k, Comment appelle-t-on cette relation ?

c) Dans le cas où la raideur reste faible, montrer que les fréquences propres de la corde tendue entre $x=0$ et $x=L$ se mettent sous la forme :

$$f'_n = n \cdot \frac{c}{2L} \sqrt{1 + Bn^2}$$

où B est une constante à exprimer en fonction de E, S, K_0 , T_0 et L.

d) Pour la corde de piano étudiée, on donne $B = 4 \cdot 10^{-4}$. A partir de quelle valeur de n la fréquence propre d'ordre n de la corde avec raideur est-elle plus aigüe d'un demi-ton que celle de la corde idéale ?

On rappelle que la gamme tempérée divise l'octave en 12 intervalles, appelés demi-tons, et que les fréquences successives g_p des notes espacées par ces demi-tons forment une suite géométrique vérifiant la loi générale $g_p = 2^{p/12} \cdot g_0$ où p est un entier compris entre 1 et 12.

Corrigé. Origine Agreg externe 2009.

1) T_0 est en $N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$ et μ en $kg \cdot m^{-1}$. T_0/μ est donc en $(m/s)^2$. Une expression possible de c est donc $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$. c est la vitesse de propagation de l'onde sur la corde.

Corde de guitare : $c = 185,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Corde de piano : $\mu = 8,82 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$ et $c = 310,41 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2a) La méthode proposée conduit à $c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}$. La partie gauche est indépendante de t, la partie droite est indépendante de x et elles sont égales. Donc, ces deux expressions égales sont indépendantes de t et de x donc c'est une constante Z.

Si $Z > 0$, cela conduit à un comportement divergent de g(t) . Impossible.

Si $Z = 0$, cela conduit à $f(x) = cte \cdot x$ qui ne s'annule pas en $x=L$ (sauf pour la solution nulle).

Il ne reste donc que $Z < 0$, que l'on note $Z = -\omega^2$ avec $\omega > 0$. On a alors pour g(t) une fonction sinusoïdale de pulsation ω et f(x) est alors une fonction sinusoïdale de pulsation spatiale $k = \omega/c$.

b) On écrit $f(x) = A \cdot \cos(kx) + B \cdot \sin(kx)$ et on cherche une solution non identiquement nulle. Les deux conditions aux limites donnent alors $A=0$ et $B \cdot \sin(kL) = 0$ soit kL un multiple entier de π si B différent de 0. De $kL = n\pi$, avec n entier non nul, on sort les valeurs possibles f_n des fréquences temporelles, indicées par la valeur de n soit donc : $f_n = \frac{nc}{2L}$.

c) La longueur d'onde, ou période spatiale, vaut $2\pi/k$ et donc aussi indicée par n. Elle s'écrit donc $\lambda_n = (2L/n)$.

d) Avec une origine des temps quelconque, la solution du mode n s'écrit :

$$y_n(x, t) = B \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi c t}{L} + \phi\right)$$

e) Corde de guitare : $L = 0,63 \text{ m}$. Corde de piano : $L = 1,06 \text{ m}$.

3a) La solution proposée est de fréquence spatiale $1/(2L)$ et de fréquence temporelle $c/(2L)$. Le terme d'ordre n est de fréquence spatiale $n/(2L)$ et de fréquence temporelle $nc/(2L)$, ce qui en fait l'harmonique de rang n. L'amplitude du terme de rang n est $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

3b) Voir cours. On remarque que les nœuds de vibrations du mode n sont en $k(L/n)$ avec k variant de 0 à n .

3c) Remarques : si on tape en $L/2$ (nœud de tout mode pair), les harmoniques d'ordre pair sont nulles. Si on tape en $L/5$ (nœud de tout mode multiple de 5), les harmoniques d'ordre multiple de 5 sont nulles. Donc, si on tape en plein sur un nœud d'un mode, ce mode sera éliminé.

→ Pour éliminer l'harmonique 7, il suffit de taper en $x=L/7$. On éteint alors les harmoniques 7, 14, 21, ..

4a) L'équa diff de propagation est linéaire, donc une combinaison linéaire de solutions est solution. Cela signifie aussi que les différentes solutions possibles n'interagissent pas, l'énergie associée à une solution possible ne dépend pas de la présence d'autres solutions.

4b) Pour une corde pincée, $E_n \propto \frac{1}{n^2}$. Pour une corde frappée, $E_n \propto cte$. Ce dernier résultat est fort surprenant, car il entraîne une divergence de l'énergie d'une corde frappée. Pour les hautes fréquences, le modèle choisi est manifestement insuffisant.

En ce qui concerne la comparaison, on peut remarquer que les HF seront plus présentes dans le signal d'une corde frappée (piano) que dans celui d'une corde pincée.

5a) La formule est effectivement homogène si on se souvient qu'un module d'Young est une pression.

5b) Dériver deux fois par rapport au temps revient à multiplier par $-\omega^2$. Dériver deux fois par rapport à x revient à multiplier par $-k^2$.

On obtient donc une relation de dispersion : $ESK \cdot k^4 + T_o \cdot k^2 - \mu\omega^2 = 0$

5c) Du fait des deux points fixes, on a toujours $k=n\pi/L$ et on sort alors la pulsation ω_n associée :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T_o}{\mu}} \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{ESK^2\pi^2}{T_o L^2}\right) n^2} \approx c \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right) \sqrt{1 + Bn^2}$$

en supposant que la vitesse de propagation ne change pas, d'où f_n en divisant par 2π .

On peut alors réécrire la formule précédente : $f_n = f_{n_0} \cdot \sqrt{1 + Bn^2}$ où f_{n_0} est la fréquence prévue en négligeant la raideur de la corde ($B=0$).

On veut alors que f_n soit un demi-ton au-dessus de la fréquence f_{n_0} , soit donc $f_n = 2^{1/12} \cdot f_{n_0}$.

On sort alors $n = \sqrt{\frac{2^{1/6}-1}{B}} = 17,5$.

La dix-huitième harmonique sera donc décalée de plus d'un demi-ton par rapport au calcul le plus simple.

Résolution numérique de l'équation d'onde.

On considère une corde de longueur L, de masse linéique μ , tendue selon l'axe Ox avec la tension T_0 .

On s'intéresse aux ébranlements transversaux $y(x,t)$. Si on se limite aux petits mouvements, on montre que $y(x,t)$ obéit à l'équation dite de propagation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

1) Donner une expression possible de c par des arguments dimensionnels.

On est parfois conduit à résoudre l'équation d'onde de façon purement numérique. Dans ce cas, l'ébranlement ne sera évalué que pour N positions $x_n = na$ avec n variant de 0 à (N-1) et à certains instants $t_k = k\tau$. a est le pas spatial et τ est le pas temporel.

2) On veut que le dernier point coïncide avec le bout de la corde. Quelle doit être la relation entre a, N et L ?

3) Soit une fonction f(z). On rappelle que :

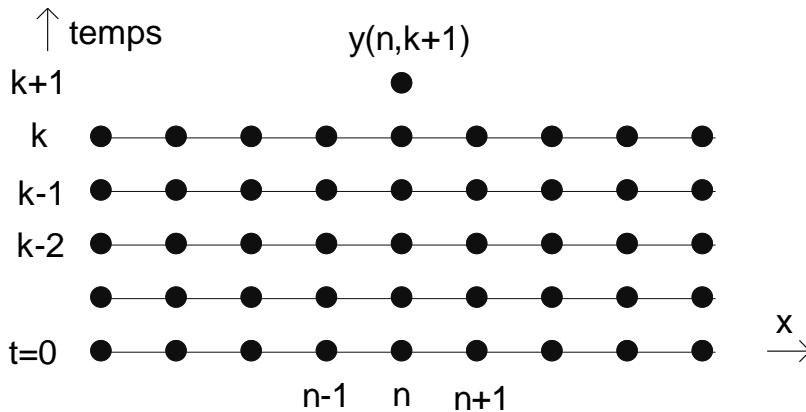
$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h.f'(z_0) + \frac{h^2}{2} f''(z_0) + \frac{h^3}{6} f'''(z_0) + o(h^3)$$

Montrer alors que la connaissance de $f(z_0)$, $f(z_0+h)$ et de $f(z_0-h)$ permet d'évaluer $f'(z_0)$. Montrer que l'erreur est en $o(h)$.

4) On pose $y(n, k) = y(na, k\tau)$. En appliquant le résultat précédent aux deux dérivées partielles, montrer qu'on peut obtenir la relation de récurrence :

$$y(n, k + 1) = \left(\frac{c\tau}{a}\right)^2 [y(n + 1, k) + y(n - 1, k) - 2y(n, k)] - y(n, k - 1) + 2y(n, k)$$

5) Compléter le dessin suivant indiquant les points nécessaires pour calculer $y(n,k+1)$.



Que faut-il connaître pour pouvoir lancer la récurrence ? On fera la différence entre les conditions initiales CI et les conditions aux limites CL.

6) On suppose ici N=200. A l'instant t_k , seuls les points entre $n=90$ et 110 sont non nuls. On fait 10 itérations, quels sont les points qui sont encore obligatoirement nuls ? Définir alors la vitesse de propagation numérique.

7) On reprend la relation de récurrence, montrer qu'une valeur particulière τ_p de τ permet de la simplifier considérablement. Reprendre le dessin de la question 6. Montrer que la vitesse de propagation numérique prend alors une valeur très particulière.

8) Pour aller plus vite dans le processus de calcul, on est tenté de prendre la plus grande valeur possible pour τ . En quoi est-ce dangereux de prendre $\tau > \tau_p$?

Proposition de solution.

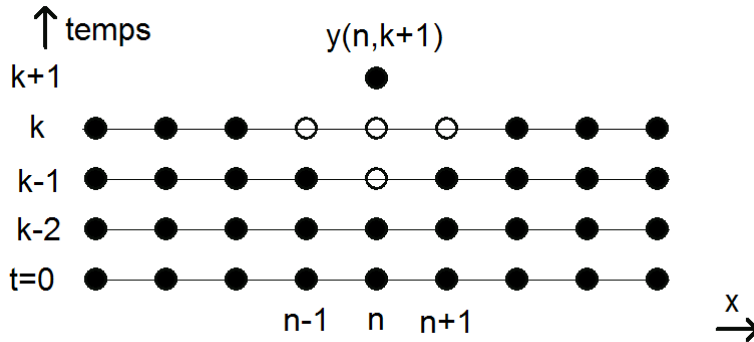
1) T_0 en $N=kg.m.s^{-2}$ et μ en $kg.m^{-1}$ donc T_0/μ en $m^2.s^{-2}$ donc, on pourrait prendre : $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

2) $L=(N-1)a$.

3) On ajoute $f(z_0+a)$ et $f(z_0-a) \rightarrow f''(z_0) = \frac{f(z_0+h)+f(z_0-h)-2f(z_0)}{h^2} + o(h)$

4) On obtient la formule proposée en évaluant les deux dérivées secondes par la formule précédente. Pour la dérivée temporelle $h=\tau$; pour la dérivée spatiale $h=a$.

5) Pour calculer le point supérieur, il faut connaître les quatre points blancs :



Donc, pour calculer une ligne, il faut connaître les deux lignes précédentes. Il faudra donc donner comme CI les deux premières lignes. D'autre part, cette formule ne permet pas de calculer les points extrêmes $n=0$ et $n=N-1$. Il faudra les imposer : ce sont les conditions aux limites CL.

6) Si on remarque la formule, elle n'implique entre eux que des points voisins. Donc si à un instant t_k , seuls les points entre $n=90$ et 110 sont non nuls, une itération n'agira que sur les points 89 et 111 . Au bout de 10 itérations, seuls les points entre 80 et 120 peuvent être non nuls. La vitesse de propagation numérique est de 1 pas d'espace par pas de temps soit aussi a/τ .

7) On remarque que si on prend $a=c\tau$, alors la relation de récurrence se simplifie en :

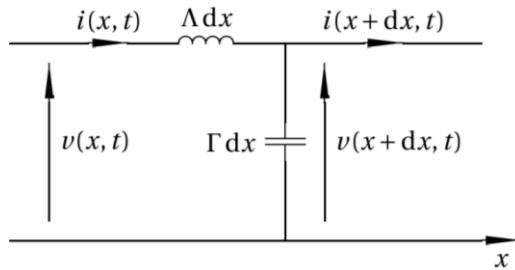
$$y(n, k + 1) = y(n + 1, k) + y(n - 1, k) - y(n, k - 1) .$$

On remarque alors que la vitesse de propagation numérique est égale à la vitesse de propagation de l'onde.

8) Dans le cas $\tau > \tau_p$, l'onde avance plus vite que la résolution numérique. On observera une divergence de la résolution numérique.

Etude d'un câble coaxial.

Un câble coaxial peut être modélisé par une succession de cellules élémentaires représentant la portion $[x, x+dx]$ du câble où Λ est l'inductance par unité de longueur et Γ sa capacité par unité de longueur.



1) En appliquant correctement la loi des mailles et la loi des nœuds, montrer alors que i et v obéissent à l'équation d'onde. On exprimera la vitesse c de propagation en fonction de Λ et Γ .

2) $i(x, t)$ peut se mettre sous la forme $i(x, t) = i_+(\alpha = t - x/c) + i_-(\beta = t + x/c)$.

a) Que cela signifie-t-il ? Comment pourra-t-on alors écrire $v(x, t)$?

b) On s'intéresse à $i_+(\alpha = t - x/c)$ et à la tension $v_+(\alpha = t - x/c)$ associée. Montrer que, dans le cas d'une OPPH+, on obtient $v_+ = R_c i_+$ où R_c est à définir en fonction de Λ et de Γ . Vérifier l'homogénéité. Comment va-t-on généraliser ce résultat à une forme d'onde quelconque ?

c) Par le même raisonnement, montrer : $v_- = -R_c i_-$.

d) Exprimer alors $i(x, t)$ en fonction des deux tensions v_+ et v_- .

3) Une OPPH+ de pulsation ω se propage sur le câble coaxial. Le câble est fermé en $x=L$ sur une résistance R . Arrivée en bout de ligne en $x=L$, l'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie qui est une OPPH- de même pulsation.

Après l'avoir défini, montrer que le coefficient de réflexion en tension en $x=L$ est : $\rho = \frac{R - R_c}{R + R_c}$.

4) Un générateur d'impulsions de résistance interne $R_g = 2R_c$ est branché à l'entrée d'un câble coaxial de longueur L . La sortie du câble est fermée sur une résistance $R_c/2$. On note τ le temps nécessaire à une onde progressive pour parcourir le câble.

A l'instant $t=0$, le générateur émet une impulsion unique de hauteur 27V, de largeur temporelle $\Delta t \ll \tau$.

Décrire le plus précisément ce qu'est devenue l'onde aux instants : $\frac{\tau}{2}$; $\frac{\tau}{2} + \tau$; $\frac{\tau}{2} + 2\tau$; $\frac{\tau}{2} + 3\tau$.

Proposition de solution.

1) La LDM et la LDN donnent après arrangements : $\frac{\partial v}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$ et $\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial v}{\partial t}$. En utilisant le théorème de Schwartz, obtient l'équation d'onde pour i et v avec $c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$.

2a) La solution générale est la somme d'une onde progressive i_+ se propageant sans déformation et à vitesse constante selon les x croissants et d'une onde progressive i_- se propageant sans déformation et à vitesse constante selon les x décroissants. On pourra aussi écrire :

$$v(x, t) = v_+(\alpha = t - x/c) + v_-(\beta = t - x/c)$$

2b) On adopte la notation complexe pour l'OPPH+ :

$\underline{v}_+ = \underline{V}_0 \exp j(\omega t - kx)$, $\underline{i}_+ = \underline{I}_0 \exp j(\omega t - kx)$, avec $k = \omega/c$ et on reporte dans une quelconque des équations de la question 1, il sort : $\underline{V}_0 = R_C \underline{I}_0$ avec $R_C = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$.

En utilisant Fourier et la nature linéaire de l'équa diff, ce qui est vrai pour des ondes sinusoïdales est vrai pour les combinaisons d'ondes sinusoïdales donc un signal quelconque.

2c) Même méthode avec $\omega t + kx$.

$$2d) i(x, t) = \frac{1}{R_C} (v_+(\alpha = t - x/c) - v_-(\beta = t - x/c))$$

3) L'onde en tension peut s'écrire :

$$\underline{v}(x, t) = \underline{A} \exp j(\omega t - kx) + \underline{B} \exp j(\omega t + kx)$$

et en courant :

$$i(x, t) = \frac{1}{R_C} (\underline{A} \exp j(\omega t - kx) - \underline{B} \exp j(\omega t + kx))$$

L'amplitude complexe de la tension de l'onde incidente en $x=L$ est : $\underline{A} \exp j(-kL)$

L'amplitude complexe de la tension de l'onde réfléchie en $x=L$ est : $\underline{B} \exp j(+kL)$

Le coefficient de réflexion en tension est donc :

$$\rho = \frac{\underline{B} \exp j(+kL)}{\underline{A} \exp j(-kL)}$$

On utilise maintenant la loi d'Ohm aux bornes de la résistance R en $x=L$: $\underline{v}(L, t) = R \underline{i}(L, t)$

On obtient alors :

$$\underline{A} \exp j(-kL) + \underline{B} \exp j(+kL) = \frac{R}{R_C} (\underline{A} \exp j(-kL) - \underline{B} \exp j(+kL))$$

On sort alors la relation demandée : $\rho = \frac{R - R_C}{R + R_C}$

On peut remarquer qu'il est réel.

D'autre part, on peut aussi remarquer qu'avoir mis la terminaison en $x=L$ et non en $x=0$ a compliqué l'écriture de ρ et son calcul.

4) A chacun des instants considérés, l'onde est au milieu du câble en $x=L/2$.

A l'instant $\tau/2$, il ne lui est rien arrivé, pas de déformation, son amplitude est de 27V

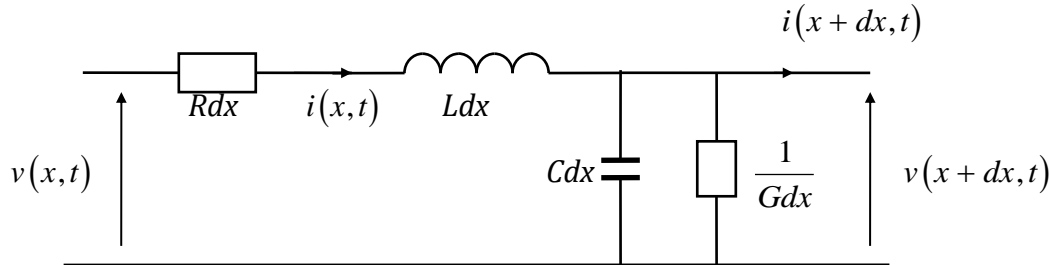
A l'instant $3\tau/2$, il y a eu une réflexion en bout de ligne, $\rho = -1/3$, l'onde est au milieu du câble avec une amplitude de -9V.

A l'instant $5\tau/2$, nouvelle réflexion mais en $x=0$ avec $\rho = +1/3$, l'onde est au milieu du câble avec une amplitude de -3V.

A l'instant $7\tau/2$, même endroit mais avec une amplitude de +1V.

Câble avec pertes

Un câble coaxial est constitué de deux surfaces conductrices cylindriques de même axe Oz, de rayons a et b ($a < b$). L'espace qui les sépare est rempli d'un isolant dont les propriétés électromagnétiques sont assimilées à celles du vide. On note L l'inductance linéique et C la capacité linéique du câble. Un élément de longueur dx possède par ailleurs une résistance Rdx car les conducteurs ne sont pas parfaits et conductance Gdx car l'isolant n'est pas parfait. Le schéma équivalent d'un tronçon de ligne avec pertes est représenté sur la figure suivante :



La tension entre les conducteurs et l'intensité du courant les parcourant sont notées $v(x,t)$ et $i(x,t)$ à l'abscisse x et à l'instant t . La ligne est obtenue par mise en série d'une infinité de tronçons élémentaires de longueur dx très petite par rapport à la longueur d'onde λ des signaux qui s'y propagent afin que les lois de l'électrocinétique y soient applicables.

1) Etablir les équations donnant $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial i}{\partial x}$, en fonction de v , i , $\frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial i}{\partial t}$ et en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $v(x,t)$ sous une des formes suivantes :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \pm LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \pm (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} \pm RGV$$

2) Les variations temporelles des signaux sont à présent sinusoïdales de pulsation ω imposé par un générateur en début de ligne. Montrer que l'amplitude de la représentation complexe $\underline{v}(x,t) = \underline{V}(x)e^{j\omega t}$ de la tension obéit à l'équation $\underline{V}''(x) - \gamma^2 \underline{V}(x) = 0$ où la constante γ^2 est complexe.

a) En étudiant qualitativement γ^2 , montrer que les deux racines carrées peuvent s'écrire : $\gamma_1 = k_a + jk_b$ et $\gamma_2 = -\gamma_1$ avec k_a et k_b réels positifs.

b) Ecrire les solutions $\underline{V}_1(x)$ et $\underline{V}_2(x)$ correspondant aux deux cas précédents puis les formes complètes $v_1(x,t)$ et $v_2(x,t)$.

c) Interpréter les solutions trouvées et les rôles joués par k_a et k_b sur la forme de l'onde trouvée.

d) Comment va s'écrire une solution sinusoïdale quelconque ?

3) On considère deux solutions sinusoïdales de pulsations différentes se propageant selon les x croissants. Définir leurs vitesses de propagation. Sont-elles identiques ? que va-t-il se passer au cours de la propagation de l'onde complète ? Que va-t-il se passer pour une onde progressive quelconque ?

Proposition de solution.

1) LDM entre les abscisses x et $x+dx$:

$$v(x, t) - v(x + dx, t) = (Rdx)i(x, t) + (Ldx) \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$$

On divise par dx qu'on fait tendre ensuite vers 0, ce qui fait apparaître la dérivée partielle $\frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$

On obtient : $-\frac{\partial v}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}$

LDN : le courant $i(x, t)$ se sépare en 3 :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + (Cdx) \frac{\partial v(x + dx, t)}{\partial t} + (Gdx)v(x, t)$$

On divise par dx qu'on fait tendre ensuite vers 0, ce qui fait apparaître la dérivée partielle $\frac{\partial i(x, t)}{\partial x}$

On obtient : $-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv$

On dérive la première par rapport à x . On peut alors introduire la seconde dans les expressions des dérivées de l'intensité, pour lesquelles on utilisera le théorème de Schwartz. On obtient l'équation fournie avec uniquement des signes +.

2a) On introduit la forme proposée dans l'EDP précédente et on sort sans problème :

$$\gamma^2 = (RG - LC\omega^2) + j\omega(RC + LG) = \|\gamma\|^2 e^{j\theta}$$

Les deux solutions pour γ sont opposées et on peut les écrire $\pm \|\gamma\| e^{j\theta/2}$. La partie imaginaire est positive donc on peut prendre θ entre 0 et $+\pi$. Donc $\theta/2$ est compris entre 0 et $+\pi/2$. Donc une des racines est dans le premier quadrant, on peut l'écrire $\gamma_1 = k_a + jk_b$ avec k_a et k_b réels positifs et l'autre solution est son opposée.

2bc)

On obtient $\underline{V}_1(x) = \underline{A}_1 \cdot e^{k_a x + jk_b x}$ d'où : $\underline{v}_1(x, t) = \underline{A}_1 \cdot e^{k_a x} \cdot e^{j(\omega t + k_b x)}$

La seconde exponentielle indique une onde se propageant selon les x décroissant et la première exponentielle indique alors une atténuation de l'amplitude de l'onde au cours de la propagation. L'écriture de cette onde peut prêter à confusion.

Pour l'onde n°2, on obtient une onde se propageant selon les x croissant, donc dont l'amplitude décroît aussi au cours de la propagation.

k_b est la pulsation spatiale de l'onde associée à la propagation, k_a est associé à l'absorption de l'onde au cours de sa propagation : l'onde va se propager sur quelques $1/k_a$.

2d) Une onde sinusoïdale quelconque sera une combinaison linéaire des deux solutions précédentes.

3) La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k_b}$ qui va dépendre de ω , donc les deux ondes ne vont pas se propager à la même vitesse. Donc, en plus de l'atténuation, il va y avoir déformation de l'onde : l'onde la plus rapide s'éloigne de plus en plus de l'onde la plus lente. On aura dispersion de l'onde. Pour une onde quelconque, on observera les deux mêmes phénomènes : atténuation au cours de la propagation et déformation (elle semble s'étaler) de l'onde.

Ondes élastiques dans un solide.

On considère une chaîne linéaire infinie d'atomes identiques de masse m . A l'équilibre, ils sont séparés par une distance a et l'atome n se trouve à l'abscisse x_n^0 . Lorsqu'une perturbation longitudinale modifie suivant l'axe Ox la position de l'atome n d'une quantité $u_n \ll a$, celui-ci est alors soumis à des interactions modélisées par des forces de rappel de raideur K , limitées entre atomes premiers voisins.

1) Ecrire l'équation du mouvement d'un atome quelconque de la chaîne.

2) On veut montrer qu'il existe des ondes élastiques longitudinales de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k} = k \vec{e}_x$ qui peuvent se propager sans atténuation le long de la chaîne. On adopte la notation complexe et on pose : $\underline{u}_n = \underline{A} \cdot \exp(j(\omega t - kx_n^0))$.

Montrer que ω est proportionnel à $|\sin(ka/2)|$. Comment s'appelle la relation obtenue ?

Dessiner le graphe $\omega = \omega(k)$.

Quel est l'intérêt de se limiter à k compris entre $-\pi/a$ et $+\pi/a$? Dans ce cas, que peut-on dire des ondes selon le signe de k ?

On rappelle : $\cos(p+q) = \cos(p)\cos(q) - \sin(p)\sin(q)$.

3) On note ω_M la pulsation maximale des ondes qui peuvent se propager dans la chaîne. Préciser dans ce cas le mouvement comparé d'atomes voisins.

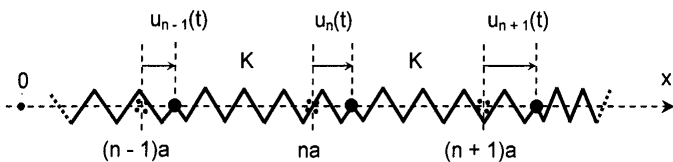
4) On s'intéresse aux faibles valeurs positives de k . Simplifier alors la relation entre ω et k et exprimer alors la vitesse de propagation c de l'onde. Y-a-t-il dispersion ?

AN pour le fer : $a = 2,52 \cdot 10^{-10} \text{ m}$; $m = 9,26 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$; $K = 49,4 \text{ N.m}^{-1}$. Calculer f_M et c .

5) Pour k proche de π/a par valeurs inférieures, exprimer les vitesses de phase et de groupe. Y-a-t-il dispersion ? Que deviennent ces deux vitesses à la limite $k = \pi/a$? Interpréter.

Proposition de solution.

1) Il convient d'abord de faire un dessin autour de la particule n :



ATTENTION, une tension de ressort est une force difficile à écrire. La longueur à vide du ressort n'est pas défini, je la note ℓ_o .

Le référentiel d'étude est supposé galiléen, le système est la particule n , on néglige les effets de la pesanteur.

Action de la particule $(n-1)$: $\vec{F}_g = -K(a + u_n - u_{n-1} - \ell_o)\vec{e}_x$.

Action de la particule $(n+1)$: $\vec{F}_d = +K(a + u_{n+1} - u_n - \ell_o)\vec{e}_x$.

Le PFD s'écrit : $m\ddot{u}_n \vec{e}_x = \vec{F}_g + \vec{F}_d$ soit en projection sur Ox , avec $\omega_o = \sqrt{\frac{K}{m}}$:

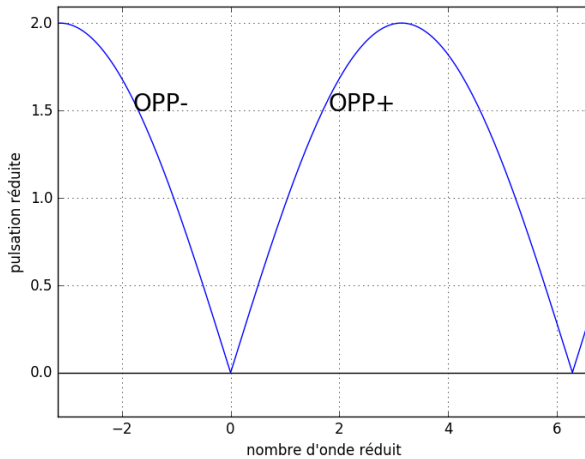
$$\ddot{u}_n = \omega_o^2 (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

Rem : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir $\ell_o = a$.

2) On introduit la forme proposée dans l'équation précédente, on se rappelle des formule de trigo et on se méfie de l'extraction de racine carrée (présence de la valeur absolue) qui donne la RELATION DE DISPERSION suivante après simplification :

$$\omega = 2\omega_o \cdot \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

La courbe pulsation réduite $y = \omega/\omega_o$ en fonction du nombre d'onde réduit $x = ka$ a la forme suivante :



Si on décale ka de 2π , on tombe sur le même mouvement pour la particule n , donc on peut limiter l'intervalle de définition de k à un intervalle de largeur de $2\pi/a$, par exemple $]-\pi/a, +\pi/a]$. Dans ce cas, $k > 0$ correspond à une OPPH+ et on peut enlever la valeur absolue; et $k < 0$ à une OPPH-.

3) On a bien sûr $\omega_M = 2\omega_o$, ce qui correspond à $ka = \pi \pmod{2\pi}$, à vérifier par vous-même. Vérifiez alors que deux points adjacents vibrent en opposition de phase.

4) L'énoncé est un peu imprécis, il faut savoir l'interpréter : il faut en fait prendre :

$$0 \leq k \ll \frac{\pi}{a}$$

ce qui permet de linéariser le sinus et d'enlever la valeur absolue : $\omega = a\omega_o k$.

On obtient ainsi la vitesse de phase : $v_\varphi = a\omega_o$ constante donc le milieu n'est pas dispersif (rigoureusement peu dispersif) et la vitesse de groupe est égale à la vitesse de phase.

Pour le fer on calcule : $f_M = 7,35 \cdot 10^{12}$ Hz et $c = 5820$ m.s⁻¹, vitesse typique de la propagation d'ondes sonores. ce sont bien entendu des ultrasons.

5) Pour k proche de π/a par valeurs négatives, on ne peut plus linéariser le sinus mais on peut enlever la valeur absolue.

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{2\omega_o}{k} \cdot \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = a\omega_o \cdot \cos\left(\frac{ka}{2}\right)$$

A la limite $k = \pi/a$, $v_\varphi \rightarrow \frac{2a\omega_o}{\pi}$ et $v_g \rightarrow 0$: il n'y a plus propagation.

Chaîne d'atomes à deux types de particules.

Pour aborder cet exercice, il vaut mieux avoir bien assimilé le précédent.

On considère une file constituée de deux types de particules de masses m et $m'=\lambda m < m$ situées, à l'équilibre, aux abscisses respectives $x_{2n}=2na$ et $x_{2n+1}=(2n+1)a$ de l'axe Ox . Ces particules peuvent effectuer des déplacements selon l'axe Ox et on appelle u_n le déplacement algébrique de la particule n . On suppose qu'il existe entre deux particules adjacentes des forces élastiques proportionnelles à l'allongement de la distance les séparant (coefficient α).

- 1) Ecrire les équations des mouvements des particules $2n$ et $2n+1$.
- 2) On cherche des solutions du mouvement sous la forme :

$$u_{2n} = u \cdot \exp[j(\omega t - 2nka)] \qquad u_{2n+1} = u' \cdot \exp[j(\omega t - (2n+1)ka)]$$

Montrer que pour une valeur de k donnée, il existe deux valeurs possibles pour ω notées ω^+ et ω^- ($\omega^- < \omega^+$).

- 3) Déterminer ω_1 et ω_2 telles que la propagation soit impossible pour $\omega \in]\omega_1 \ \omega_2[$.
- 4) Montrer qu'on peut se limiter à $|k| \leq \frac{\pi}{a}$. Tracer $\omega^+(k)$ et $\omega^-(k)$.

- 5) Dans le cas $ka \rightarrow 0$, caractériser les types d'ondes obtenues par $\omega^+(k)$ et $\omega^-(k)$ et calculer les rapports

d'amplitude $\frac{u_1}{u_2}$. Interpréter les mouvements de deux masses voisines ou de leur centre de masse.

Proposition de solution.

- 1) En généralisant la formule obtenue à l'exercice précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_{2n} &= \alpha(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 2u_{2n}) \\ \lambda m\ddot{u}_{2n+1} &= \alpha(u_{2n+2} + u_{2n} - 2u_{2n+1}) \end{aligned}$$

2) On reporte la forme des solutions proposées dans les équations précédentes et on simplifie par les termes redondants non nuls (par ex $e^{j\omega t}$), on reconnaît $\cos(ka)$ dans les exp et on obtient finalement le système linéaire à deux inconnues u et u' :

$$\begin{aligned} u(m\omega^2 - 2\alpha) + u'(2\alpha \cdot \cos(ka)) &= 0 \\ u(2\alpha \cdot \cos(ka)) + u'(\lambda m\omega^2 - 2\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

Si le déterminant est non nul, on a un système de Cramer et la seule solution est (0,0). Pour avoir un nombre de solutions infinis, il faut donc qu'il soit nul, soit donc :

$$(m\omega^2 - 2\alpha)(\lambda m\omega^2 - 2\alpha) - 4\alpha^2 \cos^2(ka) = 0$$

En développant, on obtient une équation bicarrée en $X=\omega^2$:

$$\lambda m^2 X^2 - 2\alpha m(1 + \lambda)X + 4\alpha^2[1 - \cos^2(ka)] = 0$$

de déterminant : $\Delta = 4\alpha^2 m^2 [(1 - \lambda)^2 + 4\lambda \cos^2(ka)] > 0$ car $0 < \lambda < 1$.

On a donc deux racines réelles qui sont en plus toutes positives ($P=c/a > 0$ et $S=-b/a > 0$).

On peut donc écrire :

$$\omega^\pm = \omega_0 \sqrt{(1 + \lambda) \pm \sqrt{(1 - \lambda)^2 + 4\lambda \cos^2(ka)}} \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

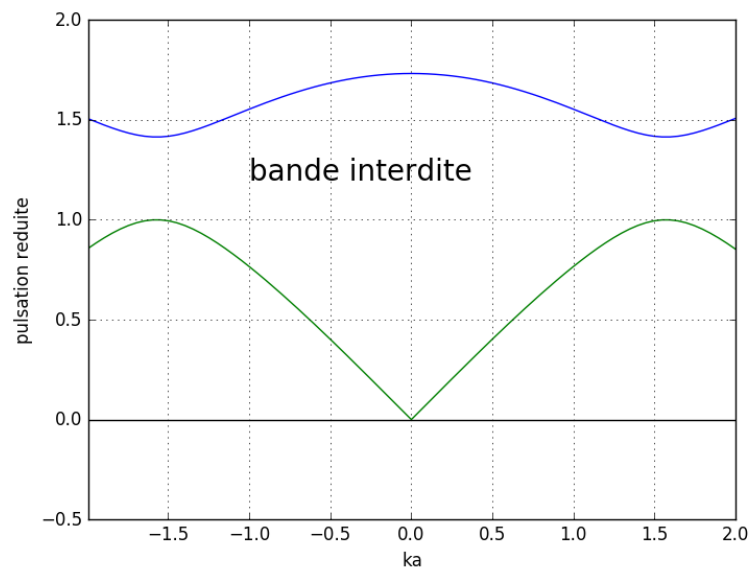
3) D'autre part, on vérifie sans aucun pb, que ω^+ a le même comportement que $\cos^2(ka)$ et que ω^- a le comportement opposé.

On sort alors les bornes de ω^\pm :

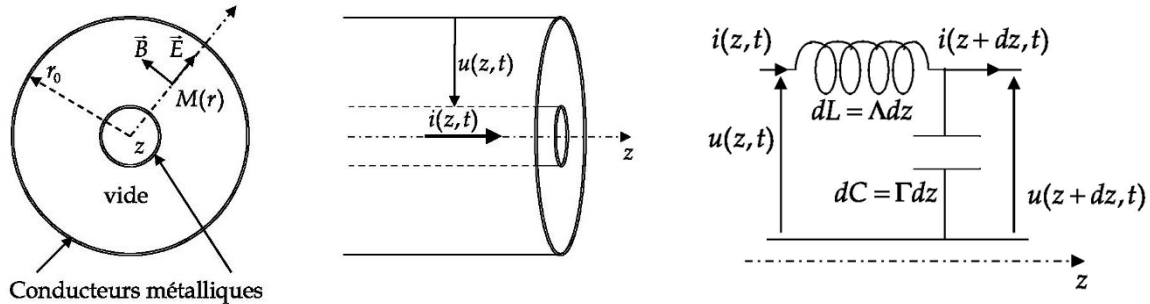
$$\begin{aligned} \omega_{MIN}^+ &= \omega_0 \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \omega_{MAX}^+ = \omega_0 \sqrt{2(1 + \lambda)} \\ \omega_{MIN}^- &= 0 \qquad \text{et} \qquad \omega_{MAX}^- = \omega_0 \sqrt{2\lambda} < \omega_{MIN}^+ \end{aligned}$$

On remarque donc que la courbe $\omega^+(k)$ est toujours au-dessus de $\omega^-(k)$. Si on pose $\omega_1 = \omega_{MAX}^-$ et $\omega_2 = \omega_{MIN}^+$, alors il n'y a aucune solution dans cet intervalle.

4) Si on reprend le système initial d'équations de la question 2, on remarque que si on décale ka de 2π , il ne se passe rien. On peut donc se limiter à travailler sur un intervalle de largeur $2\pi/a$ en k , par exemple $|k| \leq \frac{\pi}{a}$. Dans ce cas, les valeurs positives correspondent à une OPPH+ et les valeurs négatives à une OPPH-. Le graphe de la pulsation réduite ω/ω_0 en fonction de ka est pour $\lambda=0,5$:



Il y a deux bandes de pulsations autorisées. La supérieure est la bande optique, l'inférieure est la bande sonore.

Extrait modifié XENS ambitieux.

On considère un câble coaxial d'axe Oz (les deux dessins de gauche) qu'on modélise par une ligne à constantes réparties (le dessin de droite). Λ désigne l'inductance linéique du câble et Γ sa capacité linéique.

1) A partir des grandeurs Λ et Γ , construire une grandeur c analogue à une vitesse et une grandeur Z_c analogue à une résistance.

2) A partir des lois de l'électrocinétique, relier la dérivée spatiale de $i(z,t)$ {resp $u(z,t)$ } et temporelle de $u(z,t)$ {resp $i(z,t)$ }. Montrer alors que $i(z,t)$ et $u(z,t)$ vérifient l'équation d'onde.

3) En adoptant la notation complexe, on prend le cas particulier suivant :

$$\underline{i} = I_0 \sqrt{2} \cdot \exp[j(\omega t - kz)]$$

où toutes les constantes définies sont réelles positives.

a) décrire cette forme d'onde.

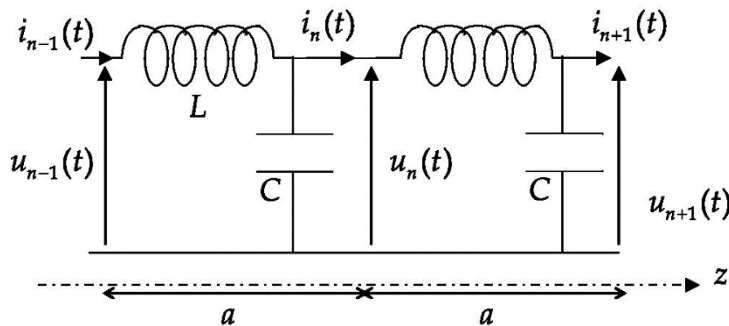
b) En déduire la tension complexe \underline{u} associée. Repasser alors en notation réelle.

c) Calculer l'énergie moyenne linéique w_{em} stockée dans le câble.

d) On définit $P = \langle u(z,t) \cdot i(z,t) \rangle$, $\langle \rangle$ désignant une moyenne temporelle. Que désigne P ? Commenter son signe .

e) Calculer $\frac{P}{w_{em}}$ et commenter le résultat obtenu.

4) On désire approcher le câble précédent par une association de composants discrets. On réalise des cellules de base composées d'une inductance et d'un condensateur. Chacune de ces cellules est de longueur a . On les place en chaîne comme sur le schéma ci-dessous :



a) Trouver la relation entre les tensions $u_n(t)$, $u_{n-1}(t)$, $u_{n+1}(t)$ et $\ddot{u}_n(t)$.

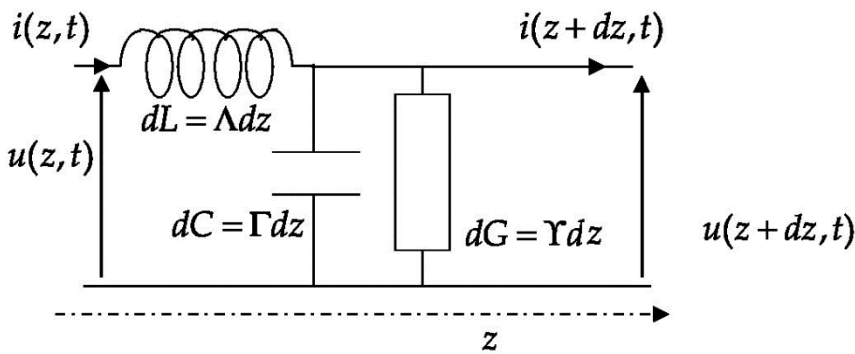
b) On cherche des solutions sous la forme d'ondes progressives

$$\underline{u}_n = U_0 \cdot \exp[j(\omega t - kna)]$$

A quelles conditions sur a , L et C les solutions sont-elles identiques à celles de la ligne à constantes réparties ? Comparer la longueur a à la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.

c) On dispose de composants de dimensions de l'ordre du centimètre, quels types d'ondes peut-on faire se propager sans dispersion notable ? Même question pour des composants de l'ordre de la dizaine de micromètres.

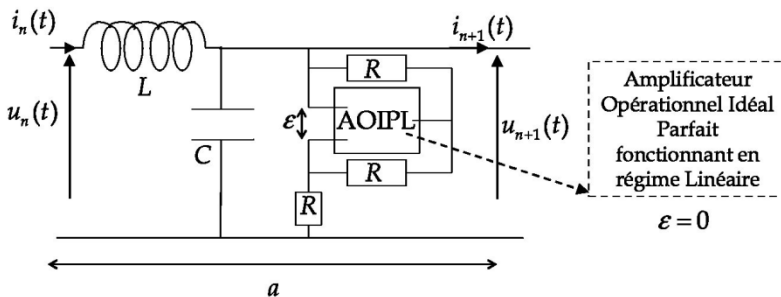
5) On prend maintenant en compte le courant de fuite entre les deux conducteurs. On complète donc la modélisation précédente par une conductance linéique γ .



a) Comment se modifient les deux premières équations obtenues à la question 2 ? En déduire alors une équation aux dérivées partielles vérifiée par $u(z,t)$ ou $i(z,t)$.

b) On cherche maintenant pour u ou i une onde progressive selon les z croissants et on prend une forme analogue à celle de la question 3. Montrer alors que k est forcément complexe et qu'on a une atténuation de l'onde lors de sa propagation.

6) On souhaite construire avec des composants discrets une ligne dans laquelle une onde progressive pourrait être amplifiée. On modifie quelque peu le montage de la question 4 pour obtenir une nouvelle cellule où le montage actif devra être reconnu. L'AOIPL désigne en fait un ALI idéal fonctionnant en régime linéaire.



ON cherchera une solution sous la forme suivante en adoptant la notation complexe :

$$\underline{u}_n = U_o \cdot \exp\left(\frac{na}{\ell_c}\right) \cdot \exp[j(\omega t - kna)] \quad \text{avec} \quad \ell_c \gg \frac{2\pi}{k} \gg a$$

7) Connaissez-vous des dispositifs où on utilise une amplification pour des ondes électromagnétiques de longueur d'onde proche du micromètre ?

Correction. Extrait X 09 psi.

1) Cf cours. On trouve $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$ et $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$.

2) L'application de la LDN et de la LDM (ou Loi d'Ohm) donne :

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -\Gamma \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\Lambda \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

On montre alors ss pb que u et i obéissent à l'équation d'onde avec la valeur de c calculée à la question 1.

3a) On a ici une onde progressive harmonique se propageant selon les z croissants. En reportant l'expression dans l'équation d'onde, on montre $k = \omega/c$. I_0 représente la valeur efficace du courant i .

3b) On prend une forme identique pour la tension soit :

$$\underline{u} = \underline{U}_o \sqrt{2} \cdot \exp[j(\omega t - kz)]$$

et on reporte dans les deux équations de la question 2, on trouve alors $\underline{U}_o = Z_c I_o$.

On repasse en réel : $i(z, t) = I_o \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t - kz)$ et $u(z, t) = Z_c I_o \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t - kz)$

3c)

L'énergie magnétique stockée dans la bobine sur la longueur dz est $\frac{1}{2} \Lambda dz \cdot i^2$

L'énergie électrique stockée dans le condensateur sur la longueur dz est $\frac{1}{2} \Gamma dz u^2$

L'énergie totale dw est donc la somme. On peut donc faire apparaître (dw/dz) qui est l'énergie linéique stockée dans le câble.

On fait maintenant la moyenne temporelle en se souvenant que $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = 1/2$.

On obtient alors : $w_{em} = \Lambda I_o^2$

3d) En utilisant la propriété précédente, il vient $P = \langle u(z, t) \cdot i(z, t) \rangle = Z_c I_o^2$

3e) P est une puissance en $W = J \cdot s^{-1}$; w_{em} est une énergie linéique en $J \cdot m^{-1}$; donc le rapport $\frac{P}{w_{em}}$

est une vitesse . On trouve évidemment c .

Au début du problème , c est la vitesse de propagation de l'onde. C'est aussi la vitesse de propagation de l'énergie.

4a) La relation courant-tension de la bobine donne : $u_{n-1} - u_n = L \frac{di_{n-1}}{dt}$ et $u_n - u_{n+1} = L \frac{di_n}{dt}$

qu'on reporte dans la LDN : $i_{n-1} = i_n + C \frac{du_n}{dt}$ dérivée par rapport au temps. On obtient finalement :

$$LC \frac{d^2 u_n}{dt^2} = u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n.$$

4b)

La forme proposée donne alors la relation de dispersion suivante :

$$2 - LC\omega^2 = 2 \cos(ka) \quad \text{soit encore : } \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{LC}{4} \omega^2$$

Dans le cas général, le milieu est dispersif : la vitesse de phase v_ϕ dépend de la pulsation ω .

Si $ka \ll 1$, on fait un dl du sin à l'ordre 1, on obtient un milieu non dispersif de vitesse de propagation $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{a}{\sqrt{LC}}$ constante indépendante de la pulsation. On a donc le même type de solutions.

On peut assimiler L à L/a et C à C/a ce qui donne $v_\phi = c$.

La condition $ka \ll 1$ devient alors $a \ll \frac{1}{k} = \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$ soit $a \ll \lambda$.

4c) Pour des composants de l'ordre du cm , les ondes qui peuvent se propager sans dispersion notable ont une longueur d'onde d'au moins 1m soit une fréquence inférieure à 300MHz (domaine radio). Pour des composants de 10 μ m, la fréquence max est de l'ordre de 10¹³Hz (domaine optique).

5a) On reprend la question 2 et on obtient maintenant : $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Lambda \gamma \frac{\partial u}{\partial t}$.

5b) Une onde en $\exp(j(\omega t - kz))$ donne alors : $k^2 = \Gamma \Lambda c^2 - j\omega \Lambda \gamma = k_o^2 \cdot e^{-j\phi}$ avec ϕ compris entre 0 et $\pi/2$ si $\gamma > 0$. Les deux solutions sont donc : $k = \pm |k_o| \cdot e^{-j\phi/2}$.

La solution + correspond à une propagation selon les z croissants et a donc une partie imaginaire négative qui va provoquer une atténuation de l'onde selon sa propagation.

6) Il faut d'abord reconnaître dans le montage à AO une résistance négative $-R$.

$$u_n - u_{n+1} = L \frac{di_n}{dt}, \text{ soit aussi } u_{n+1} - u_{n+2} = L \frac{di_{n+1}}{dt}$$

$$\text{et la LDN s'écrit : } i_n = i_{n+1} + C \frac{du_{n+1}}{dt} - \frac{u_{n+1}}{R} \text{ soit } u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2} = LC \frac{d^2 u_{n+1}}{dt^2} - \frac{L}{R} \frac{du_{n+1}}{dt}.$$

$$\text{La forme proposée donne alors : } 4 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) = LC\omega^2 + j\omega \frac{L}{R}.$$

La condition $ka \ll 2\pi$ permet de linéariser le $\sin \rightarrow k^2 = \frac{LC\omega^2}{a^2} + j\omega \frac{L}{Ra^2} = k_o^2 e^{j\phi}$ avec ϕ compris entre 0 et $\pi/2$, ce qui, comparé à la question précédente, correspond à une amplification pour une onde progressive se propageant selon les z croissants.

7) Par micromètre, il faut comprendre lumière visible (vieux ?). On parle donc ici de la fibre optique pour laquelle il faut régulièrement amplifier l'onde lumineuse.

Filtre peigne de fréquence.

Si vous voulez taper haut aux concours, il faut aller au bout de celui-là.

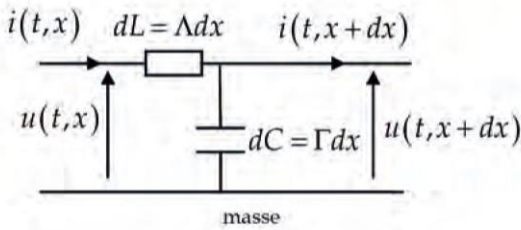


Figure 1

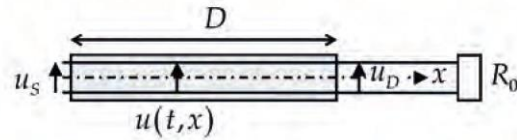


Figure 2

On considère une ligne bifilaire de longueur D fermée sur une résistance R_0 (Cf figure 2). Le modèle équivalent d'une longueur dx de la ligne est indiquée figure 1 : Λ désigne l'inductance linéique de la ligne et Γ sa capacité linéique.

1) A partir des grandeurs linéiques précédentes, définir une vitesse c et une résistance R_c .

2) A partir des lois adéquates, relier entre elles les dérivées partielles spatiales et temporelles de $u(x,t)$ et $i(x,t)$. En déduire que $u(x,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert. Quelle est la principale différence entre cette équation et l'équation de diffusion ?

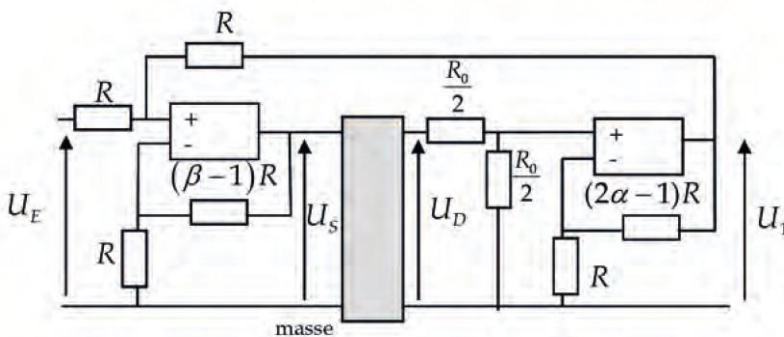
3) Cf figure 2. La ligne est fermée sur une résistance R_0 et on impose en entrée $u_s(t) = U_s \cos(\omega t)$ à laquelle on associe la tension complexe $\underline{u}_s(t) = U_s \exp(j\omega t)$.

a) $u(x,t)$ a le même comportement temporel que la tension d'entrée et on peut utiliser la notation complexe et définir $\underline{u}(x,t)$. Proposer, en la justifiant, une expression générale $\underline{u}(x,t)$ à l'aide de deux constantes complexes. Comment va alors s'écrire le courant complexe $\underline{i}(x,t)$? On pourra regarder ce que deviennent les équations de la question 2 en notation complexe.

b) Montrer que si $R_0 = R_c$, alors $\underline{u}_D(t) = \underline{u}(D, t) = U_s \exp[j\omega(t - \tau)]$ où τ est à exprimer en fonction de c et de D . Justifier le nom : LIGNE A RETARD. La propriété est-elle vraie pour un signal d'entrée quelconque ?

c) On peut alors définir la fonction de transfert harmonique de la ligne $\underline{T}(j\omega)$. Quelle est son expression ?

4)



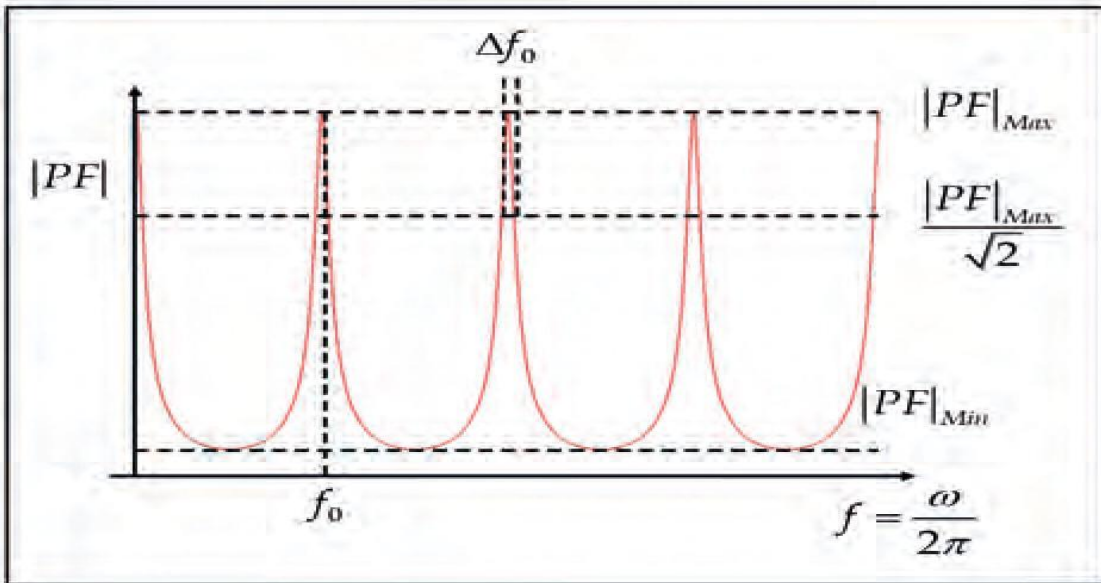
On utilise la ligne dans des circuits électrocinétiques contenant des ALI idéaux en régime linéaire. La ligne est insérée entre les deux montages à ALI et R_0 a la valeur déterminée à la question précédente. On a un quadripôle dont la tension d'entrée est U_E et la tension de sortie est U_S . On note $\underline{PF}(j\omega)$ la fonction de transfert harmonique de ce quadripôle.

Pour les calculs, l'ALI à gauche sur le dessin sera l'ALI n°1.

a) Les résultats obtenus à la question précédentes sont-ils valables ?

b) Exprimer $PF(j\omega)$ en fonction de α , β et τ . A quelle condition sur α et β le circuit peut-il fonctionner en régime linéaire pour toutes les fréquences ?

c) On pose $\alpha\beta=2(1-\delta)$. Pour les AN, on prendra $\beta=2$ et $\delta=10^{-3}\ll 1$. Le module de la fonction de transfert en fonction de la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ est tracée ci-dessous :



c1) Déterminer f_0 en fonction de τ . Montrer que le diagramme est périodique.

c2) Calculer $|PF|_{Max}$ et $|PF|_{Min}$.

c3) Déterminer la largeur des bandes passantes Δf_0 . définir et calculer la valeur du facteur de qualité de ce filtre.

Proposition de solution. Extrait XENS 2014 psi.

1) Sur des arguments dimensionnels $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$ et $R_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$. A expliquer évidemment...

2) Simple question de cours : $\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$ et $\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}$

On mélange et on retombe sur l'équation de d'Alembert vérifiée par u et i.

3a) La solution est la somme d'une OPP+ (en $\alpha=t-x/c$) et d'une OPP- (en $\beta=t+x/c$). Comme ici, on s'intéresse aux solutions sinusoïdales de pulsation ω . La première est en $\cos(\alpha+\phi_+)$ et la seconde en $\cos(\beta+\phi_-)$. Pour ne pas trainer les phases dans les calculs, on adopte la notation complexe et on cherche donc la tension complexe sous la forme :

$$\underline{u}(x, t) = \underline{A}. e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B}. e^{j(\omega t + kx)}$$

REMARQUE IMPORTANTE : si vous n'avez pas réussi à écrire cette relation, c'est que vous ne savez pas lire. C'est dans le problème précédent et je me suis contenté de copier-coller l'expression.

Si vous savez que $\underline{i}(x, t) = \frac{1}{R_c} [\underline{A}. e^{j(\omega t - kx)} - \underline{B}. e^{j(\omega t + kx)}]$, vous ne pouvez pas l'écrire directement.

En notation complexe, la première relation de la question 2 devient :

$$\frac{\partial \underline{i}}{\partial t} = j\omega \underline{i} = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} = -\frac{1}{\Lambda} jk [-\underline{A}. e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B}. e^{j(\omega t + kx)}]$$

IL ne reste plus qu'à achever le calcul avec $k=\omega/c$.

3b) On prend donc $R_0=R_c$. Pour déterminer les constantes \underline{A} et \underline{B} , on doit utiliser les conditions aux limites donc aux bornes du domaine :

$$\underline{u}(0, t) = U_s \cdot e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{u}(L, t) = R_c \cdot \underline{i}(L, t)$$

$$\underline{A} + \underline{B} = U_s \quad \text{et} \quad \underline{A} \cdot e^{-j(kD)} + \underline{B} \cdot e^{j(kD)} = \underline{A} \cdot e^{-j(kD)} - \underline{B} \cdot e^{j(kD)}$$

Comme une exp n'est jamais nulle, on obtient $\underline{B}=0$ (pas d'onde réfléchi) et $\underline{A}=U_s$.

Maintenant, $\underline{u}_D(t) = \underline{u}(D, t) = U_s \exp[j(\omega t - kD)] = U_s \exp[j\omega(t - \tau)]$ avec $kD = \omega\tau$ ce qui conduit à $\tau = D/c$.

C'est une ligne à retard. Elle retarde le signal de τ , indépendamment de la fréquence du signal; comme un signal quelconque est une superposition de signaux sinusoïdaux et qu'on est en physique linéaire, la propriété est vraie pour n'importe quel signal (a priori).

3c) La fonction de transfert est : $\underline{T}(j\omega) = \exp(-j\omega\tau)$ tout simplement.

4a) Aucun courant ne rentre à l'entrée + de l'ALI 2, donc les deux résistances $R_c/2$ sont en série et la ligne est fermée sur son impédance caractéristique. On est donc dans le cas de la question 3 et on peut utiliser la fonction de transfert précédente.

4b) Je ne mets pas les traits sous les grandeurs complexes, sauf à la fin. C'est à la fois plus pratique et plus dangereux.

LIGNE : $U_D = T \cdot U_s$.

PDT à l'entrée + de l'ALI2 et LDN à son entrée - : $U_1 = \alpha T \cdot U_s$.

PDT à l'entrée - de l'ALI2 et LDN à son entrée + : $\underline{PF} = \frac{\beta}{2 - \alpha\beta T}$

\underline{T} est parfois égal à 1 quand $\omega\tau$ est un multiple de 2π et il ne faut pas que le dénominateur puisse s'annuler. Donc on doit imposer : $\alpha\beta \neq 2$.

4c) La forme simplifiée de la fonction de transfert est : $\underline{PF}(j\omega) = \frac{1}{1 - (1 - \delta)e^{-j\tau\omega}} = \frac{1}{g(\omega)}$

La fonction $\exp j$ étant périodique de période 2π , la fonction \underline{PF} l'est aussi. La période en pulsation est $2\pi/\tau$ donc $1/\tau$ en fréquence. Donc $f_0 = 1/\tau$.

Le premier max est-il bien en $f=f_0$ et pas un peu à côté ? Comme le filtre va être très sélectif (au vu du dessin), il vaudrait mieux être précis. D'un autre côté, ça va être long. Que faire ?

Le max (resp min) de \underline{PF} correspond au min (resp max) de $g(\omega)$ donc aussi de son carré.

$$g^2(\omega) = \underline{g}(\omega) \cdot \underline{g}^*(\omega) = 1 + (1 - \delta)^2 - 2(1 - \delta)\cos(\omega\tau)$$

On calcule maintenant facilement $g_{\min} = \delta$ et $g_{\max} = 2 - \delta \approx 2$

Donc $PF_{\max} = 1/\delta = 1000$ et $PF_{\min} \approx 1/2 = 0,5$.

Reste maintenant la largeur de bande passante. On se place au voisinage de $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/\tau$ et cela revient à résoudre $g(\omega) = g_{\min}\sqrt{2}$ soit : $1 + (1 - \delta)^2 - 2(1 - \delta)\cos(\omega\tau) = 2\delta^2$

On pose $\omega = \omega_0 + x$ en supposant $|x| \ll \omega_0$ ce qui va autoriser un DL à l'ordre 2 :

$$\cos(\omega\tau) = \cos(2\pi + \tau x) = \cos(\tau x) \approx 1 - \frac{(\tau x)^2}{2}$$

On fait attention, et on sort : $\tau x = \pm \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta}} \approx \pm \delta$ DL justifié a posteriori

Les deux solutions au voisinage de ω_0 sont $\omega_0 \pm \frac{\delta}{\tau}$. la bande passante en pulsation est donc $\frac{2\delta}{\tau}$ et celle

en fréquence est : $\Delta f = \frac{\delta}{\pi\tau} = \frac{\delta}{\pi} f_0$, ce qui fait un facteur de qualité : $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\pi}{\delta} \approx 3140$.