

Utilisation de la résistance thermique.

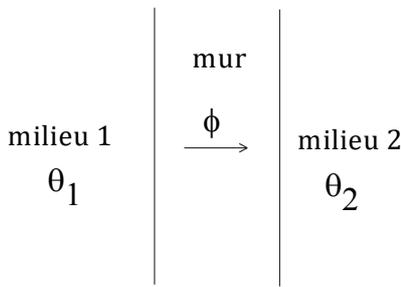


figure 1

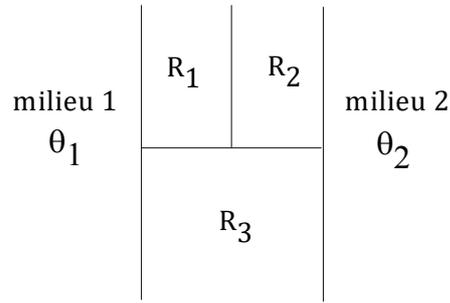


figure 2

On considère (voir figure 1) un mur homogène d'épaisseur L , de section droite Σ , séparant un milieu 1 de température θ_1 constante et uniforme et un milieu 2 de température θ_2 constante et uniforme.

On note ϕ le flux thermique (en W) traversant le mur du milieu 1 vers le milieu 2. On suppose cette grandeur constante dans le temps.

1) Quels arguments peut-on fournir pour justifier la relation $\phi = K(\theta_1 - \theta_2)$ avec K constante positive ?

2) La lettre K n'est forcément la plus pertinente. Quelle serait l'intérêt de l'appeler G ou $1/R$? Comment pourrait-on nommer R et G ?

3) On définit λ comme étant la conductivité thermique du matériau constituant le mur. Cette grandeur mesure l'aptitude d'un milieu à favoriser les échanges thermiques. G serait alors une fonction de λ , L et Σ . Proposer une forme simple en la justifiant.

Quelle est alors l'unité de λ ?

4) Le mur est en fait constitué de trois parties homogènes de propriétés différentes (cf figure 2), chacune caractérisée par sa grandeur R_i . Comment peut-on revenir au cas de la figure 1 ?

Correction.

1) ϕ doit s'annuler pour $\theta_1 = \theta_2$ (équilibre thermique), et est du signe du signe de $\theta_1 - \theta_2$ (flux thermique du chaud vers le froid). On peut donc penser que ϕ est une fonction impaire de $\theta = (\theta_1 - \theta_2)$.

La fonction est toujours inconnue. En supposant θ pas trop grand en valeur absolue, on peut donc remplacer la fonction par son DL à l'ordre 1. Et on a la forme proposée avec G en $W.K^{-1}...$ Ne reste plus qu'à vérifier expérimentalement.

2) Cette forme mathématique est en fait un équivalent de la loi d'Ohm : la température représente le potentiel électrique, le flux thermique représente le courant électrique. K est donc une conductance thermique ou l'inverse d'une résistance thermique.

3) D'après son nom, K doit être une fonction croissante de λ . Plus la surface de contact Σ est grande, plus ϕ doit être grand. Plus le mur est épais, plus ϕ doit être faible.

On peut donc proposer : $G = \frac{\lambda \Sigma}{L}$.

G est en $W.K^{-1}$ donc λ est en $W.m^{-1}.K^{-1}$.

4) Le mur est en fait constitué de trois parties homogènes de propriétés différentes (cf figure 2), chacune caractérisée par sa grandeur R_i . Comment peut-on revenir au cas de la figure 1 ?

On poursuit l'analogie de la loi d'Ohm. Les portions 1 et 2 sont en série, en parallèle sur la portion 3.

On obtient $R = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$.

Symétrie sphérique statique avec ou sans production volumique.
Température à l'intérieur de la Terre.

La Terre est assimilée à une boule sphérique de rayon $R_T=6400\text{km}$ et de centre O. La température en M à l'intérieur de la Terre est une fonction $T(M)=T(r=OM)$ et on note $T_S=T(R_T)$. On suppose que le régime permanent de refroidissement de la Terre est atteint et que les flux thermiques sont radiaux.

A l'intérieur de la Terre, on distingue deux zones :

$r < R_L = 6300 \text{ km}$: il n'y a aucune source de production de chaleur.

$R_L < r < R_T$: lithosphère, on tient compte de la source de chaleur que constitue la radioactivité de certains éléments dont la puissance massique est $\alpha = 5 \cdot 10^{-10} \text{ W.kg}^{-1}$.

A) On suppose ici $r < R_L$. On considère comme système la matière comprise entre r et $r+dr$.

A1) Quelle est la puissance thermique reçue par ce système ?

A2) Faire un bilan thermique. En tenant compte de la loi de Fourier, montrer que $T(r)$ vérifie l'équation différentielle suivante : $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$.

On rappelle en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}T(r) = \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$

A3) Exprimer $T(r)$ en fonction de deux constantes d'intégration A et B. Quelle condition aux limites va simplifier cette relation ? Conclusion sur le champ de température pour $r < R_L$.

B) On reprend l'étude précédente dans la lithosphère. On note $\lambda = 4 \text{ SI}$ la conductivité thermique de la lithosphère, $\rho = 2800 \text{ SI}$ sa masse volumique.

B1) Reprendre le bilan thermique précédent pour aboutir à l'équation différentielle :

$$\lambda \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \alpha \rho r^2 = 0$$

B2) En déduire l'expression de $T(r)$ en fonction des données et de deux constantes C et D.

B3) Avec les conditions aux limites adéquates, exprimer C et D en fonction de $T_S, R_T, R_L, \rho, \alpha$ et λ .

B4) Montrer alors que la température du centre de la Terre T_o est donnée par :

$$T_o = T_S + \frac{\alpha \rho}{6\lambda} (R_T - R_L) \left(R_T + R_L - 2 \frac{R_L^2}{R_T} \right)$$

B5) Faire l'AN et commenter la valeur obtenue. Sous la lithosphère, dans quel état physique attend-on la matière ? Quel phénomène physique a-t-on négligé ici ?

Proposition de solution :

A1 et A2 : voir cours.

A3. L'intégration de la relation précédente donne : $r^2 \frac{dT}{dr} = A$ constante. On divise par r^2 et on intègre à nouveau pour obtenir : $T(r) = B - \frac{A}{r}$ où B est une constante.

Si on veut éviter une divergence au centre de la Terre en $r=0$, on doit prendre $A=0$ donc la température est uniforme sous la lithosphère.

B1. Voir cours.

B2. On réécrit l'équa diff sous la forme directement intégrable : $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\alpha \rho}{\lambda} r^2$

Qui donne : $r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{\alpha \rho}{3\lambda} r^3 + C$ où C est une constante. On divise à nouveau par r^2 ce qui donne une forme directement intégrable : $T(r) = -\frac{\alpha \rho}{6\lambda} r^2 - \frac{C}{r} + D$ où D est une constante.

B3. On a une première CL avec $T(R_T)=T_S$.

A la frontière basse de la lithosphère, on ne connaît pas la valeur de la température mais on sait qu'aucun flux thermique ne vient d'en-dessous car la température y est uniforme donc $j(R_L) = 0$ ce qui donne ici avec la loi de Fourier dans la lithosphère $\frac{dT}{dr}(R_L^+) = 0$

On obtient maintenant : $C = \frac{\alpha \rho R_L^3}{3\lambda}$ et on reporte dans la première CL : $D = T_S + \frac{\alpha \rho R_T^2}{6\lambda} + \frac{\alpha \rho R_L^3}{3\lambda R_T}$

B4. Pour obtenir la température du centre de la Terre, il suffit de calculer la température à la frontière basse de la lithosphère soit $T(R_L)$ en supposant la température continue à la frontière.

On obtient : $T_o = T_S + \frac{\alpha \rho}{6\lambda} (R_T - R_L) \left(R_T + R_L - 2 \frac{R_L^2}{R_T} \right)$ et pas +.

Ceci est un bon exemple de calcul lourd difficile à gérer...

B5. En prenant une température de surface de 0°C , on obtient sous la lithosphère une température uniforme de 1700°C . A une telle température, on peut penser que cette zone est sous forme liquide. Donc il y a possibilité de transfert de chaleur par convection.

Etude du skeleton. Extrait centrale 2011 psi.

Le skeleton est un sport d'hiver qui se pratique dans un couloir de glace en pente: le coureur s'allonge sur une planche qui glisse sur la glace en prenant appui sur des patins.



Figure 6

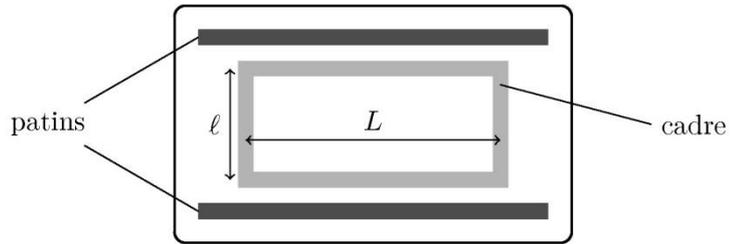


Figure 7 Skeleton vu de dessous

L'ensemble coureur+skeleton (voir figure 6) est assimilé à un solide de masse $m=100\text{kg}$ pouvant glisser sans frottement. A l'arrivée, la vitesse est de l'ordre de $v_0=30\text{m.s}^{-1}$ et le skeleton rentre alors sur la piste de décélération droite et horizontal. Le freinage va être réalisé par induction électromagnétique. Pour cela, on fixe sous la planche un cadre métallique conducteur en cuivre ayant la forme d'un rectangle de côtés $L \times \ell$, voir figure 7. Les côtés du cadre sont des tiges cylindriques de rayon a (donc de section droite $s = \pi a^2$).

On donne les valeurs numériques suivantes :

longueur $L=50\text{cm}$, largeur $\ell = 30\text{cm}$, longueur totale $L_0=1,6\text{m}$.

section droite circulaire $s = \pi a^2 = 1,0\text{cm}^2$, capacité calorifique massique $c_p = 390 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$

conductivité thermique $\lambda = 390 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$ masse volumique $\mu = 8,9. 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

Question préliminaire 1 :

Sur la piste de décélération, la norme v de la vitesse suit la loi $\frac{dv}{dt} + k.v = 0$. Au bout de combien de temps le skeleton s'arrête-t-il (noter l'ambiguïté de la question) ? Quelle sera alors la distance parcourue ?

Question préliminaire 2 :

Du fait du phénomène d'induction, l'énergie cinétique initiale est consommée par effet Joule dans le cadre métallique. Calculer alors la température ϑ_0 du cadre métallique quand le skeleton s'arrête. On prendra 0°C pour la température initiale du cadre.

Peut-on laisser le cadre métallique sans dispositif de protection thermique ?

On s'intéresse maintenant au refroidissement du cadre métallique après l'arrêt du skeleton. Pour simplifier, nous le considérons comme une tige métallique droite de longueur totale $L_0 = 2(L + \ell)$ et d'axe Oz. Cette tige cylindrique est initialement à la température uniforme θ_0 et se refroidit au contact d'une atmosphère ventilée dont la température est maintenue à $\theta_{\text{air}} = 0^\circ\text{C}$.

Les transferts thermiques entre le cadre et l'air ont lieu selon un mode dit conducto-convectif; il y a une discontinuité de température en $r=a$ et la puissance thermique transférée vers l'air par unité de surface latérale est $P_{th} = h(\theta_{\text{surface}} - \theta_{\text{air}})$ où θ_{surface} est la température de la surface latérale de la tige. On donne $h=10 \text{ SI}$.

Comme la longueur totale de la tige est très grande devant son rayon, nous supposons les flux thermiques uniquement radiaux et à symétrie cylindrique. et donc la longueur de la tige n'a aucune influence sur son évolution thermique.

On repère un point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques d'axe Oz : (r, θ, z) de base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec les notations habituelles. Le vecteur densité de courant de chaleur est noté : $\vec{j}(M, t) = j(r, t)\vec{e}_r$ et on rappelle que : $\overrightarrow{\text{grad}}(f(r, t)) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r$

0) En faisant un bilan thermique sur une couronne cylindrique d'axe Oz , comprise entre les rayons r et $r+dr$, obtenir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(r, t)$ sous la forme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)$$

où β est une constante à exprimer en fonction des données du problème.

1) A l'aide de considérations dimensionnelles sur les constantes fournies, donner le temps caractéristique τ_m d'évolution de la température dans le métal puis le temps caractéristique τ_{ech} des échanges thermiques entre la tige et l'air ambiant. AN.

Peut-on justifier l'approximation $\theta(M, t) = \theta(t)$ pour la température d'un point M intérieur à la tige ? On garde cette approximation pour toute la suite.

2) A un instant donné, donner l'expression de $P_1(t)$, puissance thermique transférée à l'air ambiant au niveau de la surface latérale de la tige.

3) Etablir la loi d'évolution de la température $\theta(t)$ définie précédemment.

On a l'idée d'entourer le cadre métallique d'un manchon isolant thermique, de conductivité thermique $\lambda_{is} = 0,1 \text{ SI}$ entre les rayons a et b , comme indiqué sur la figure 10. En un point M à la distance r de l'axe du cadre, on définit le champ de température $\theta(M, t) = \theta(r, t)$. Entre l'isolant et l'air existe encore un transfert thermique de type conducto-convectif avec la même constante h que précédemment. Ce mode de transfert n'existe pas entre la tige et l'isolant, donc la température est continue en $r=a$.

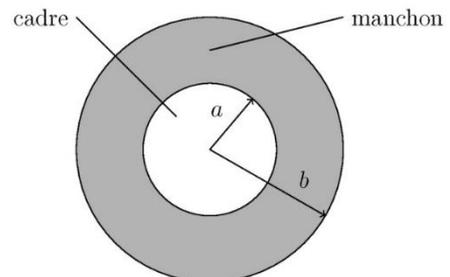


Figure 10 Manchon isolant

4) Donner une première justification de la présence du manchon isolant.

5) Donner l'allure qualitative du profil des températures à deux instants différents sur un intervalle spatial suffisamment grand.

6) A un instant donné, donner l'expression de $P_2(t)$, puissance thermique transférée à l'air ambiant. Comment pourrait-on justifier que le cadre métallique pourrait se refroidir plus vite avec le manchon isolant ?

7) Des calculs approximatifs non effectués ici permettent d'obtenir la relation suivante :

$$P_2(t) = K(t) \cdot \frac{x}{1 + \frac{ha}{\lambda_{is}} x \cdot \ln(x)}$$

où $x = \frac{b}{a}$. Reconnaître la fonction $K(t)$. Déterminer l'épaisseur d'isolant à placer pour que le refroidissement s'effectue le plus rapidement possible. Déterminer alors le nouveau temps caractéristique du refroidissement du cadre et comparer à la première valeur calculée.

Correction. Inspiré de centrale psi 2011.**Question préliminaire 1 :**

On obtient comme loi de vitesse $v=v_0 \cdot \exp(-kt)$ donc le skeleton s'arrête au bout d'un temps infini. Pour obtenir la distance parcourue $d(t)$, il vaut intégrer la vitesse entre l'instant initial et l'instant courant t : $d(t) = \int_0^t v(t)dt = \frac{v_0}{k} (1 - \exp(-kt))$ et la distance parcourue totale est donc $\frac{v_0}{k}$.

Question préliminaire 2 :

L'énergie cinétique de départ est transformée en chaleur qui augmente la température du cadre métallique : $\mu s L_o c_p (\Delta\theta) = \frac{1}{2} m v_0^2$ d'où : $(\Delta\theta) = \frac{m v_0^2}{2 \mu s L_o c_p} \approx 81^\circ C$

La température du cadre à l'arrêt du skeleton est donc $\theta_o = 81^\circ C$, il ne faut surtout pas que le sportif touche ce cadre avec une partie de son corps. Il faut donc envisager une protection thermique.

0)

Système : couronne cylindrique entre r et $r+dr$, de hauteur L_o .

La surface latérale interne est $(r) = 2\pi r L_o$.

La surface latérale externe est $(r + dr) = 2\pi (r + dr) L_o$.

La masse est $dm = \mu \pi \{(r + dr)^2 - (r)^2\} L_o$

On prend un intervalle de temps dt .

Pendant dt , il rentre en r : $S(r)j(r,t)dt$; il sort en $r+dr$: $S(r+dr)j(r+dr,t)dt$;

La chaleur reçue nette est la différence entre ces deux termes et la température varie de $d\theta$ selon la loi : $S(r)j(r,t)dt - S(r+dr)j(r+dr,t)dt = dmc_p d\theta$.

En remuant bien avec $j(r, t) = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r}$ (Fourier), puis en faisant tendre dt vers 0, on obtient la formule demandée avec : $\beta = \frac{\lambda}{\mu c_p}$.

1) Pour la conduction dans le métal, les données sont : λ, μ, c_p, a . Par analyse dimensionnelle $\tau_m = \frac{\mu c_p a^2}{\lambda}$ est un temps dont une valeur approchée est 28s.

Pour les transferts à la surface du métal, les données sont : h, μ, c_p, a . Par analyse dimensionnelle $\tau_{ech} = \frac{\mu c_p a}{2h}$ est un temps dont une valeur approchée est 980s soit environ 16min. Pour le facteur 2, voir questions suivantes.

Les échanges à la surface sont beaucoup plus lents qu'à l'intérieur du métal. On peut donc supposer que la température est uniforme à l'intérieur du métal. dans la suite, on la note $\theta(t)$.

$$2) P_1 = 2\pi a L_o h (\theta(t) - \theta_{air})$$

$$3) \text{La capacité calorifique de la tige est } \mu \pi a^2 L_o c_p$$

Pendant dt , la chaleur reçue par la tige est $-P_1(t)dt$ qui vaut aussi $\mu \pi a^2 L_o c_p d\theta$

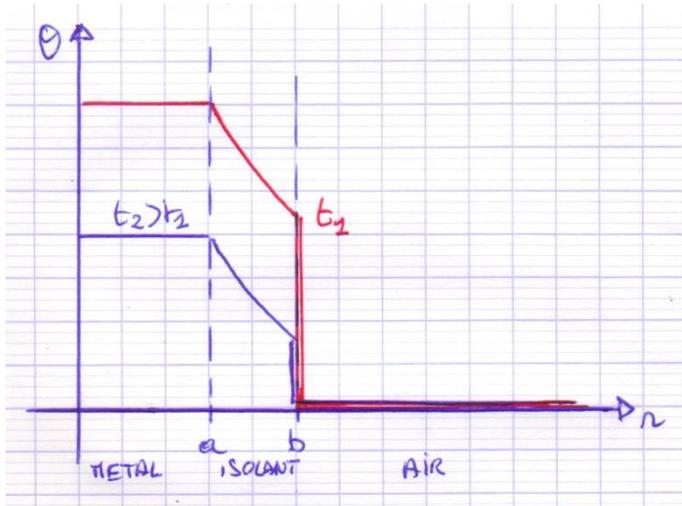
En regroupant, divisant par dt , puis en faisant tendre dt vers 0, on obtient :

$$\frac{d\theta}{dt} + \tau_{ech} (\theta(t) - \theta_{air}) = 0$$

On résoud sans aucun pb : $\theta(t) = \theta_{air} + (\theta_o - \theta_{air}) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_{ech}}\right)$.

4) Le manchon isolant permet d'éviter les brûlures au contact de la surface latérale de la tige.

5)



$$6) P_2(t) = h\{\theta(b^-) - \theta_{air}\}2\pi b.$$

La différence de température à la jonction air est plus faible avec isolant, donc la puissance thermique surfacique est plus faible que dans le premier cas. Mais la surface de contact est plus élevée avec l'isolant. Donc, on peut envisager que $P_2(t) > P_1(t)$, donc que le cadre se refroidisse plus vite avec l'isolant que sans l'isolant.

7) Il suffit de prendre $b=a$ soit $x=1$ pour retrouver le cas sans isolant, donc $K(t)=P_1(t)$.

Pour avoir le refroidissement le plus rapide, il faut chercher le maximum de :

$$f(x) = \frac{x}{1 + \frac{ha}{\lambda_{is}} x \cdot \ln(x)}$$

On calcule maintenant : $f'(x) = \frac{1 - \frac{ha}{\lambda_{is}} x}{\left(1 + \frac{ha}{\lambda_{is}} x \cdot \ln(x)\right)^2}$ qui s'annule pour $x_0 = \frac{\lambda_{is}}{ah} \approx 1,77 > 1$

Pour $x > 1$, f est d'abord croissante puis décroissante. c'est bien un maximum et $f_{max} = 1,13$. La valeur de b correspondante est $b_0 = ax_0 = 1 \text{ cm}$ et l'épaisseur d'isolant est $(b_0 - a) = 4,4 \text{ mm}$.

Maintenant, le nouveau temps caractéristique du refroidissement est environ 1,13 fois plus petit qu'avant et vaut 14,5 minutes.

Extrait long centrale 09 pc avec la discrétisation.

Partie I - Étude de la diffusion thermique

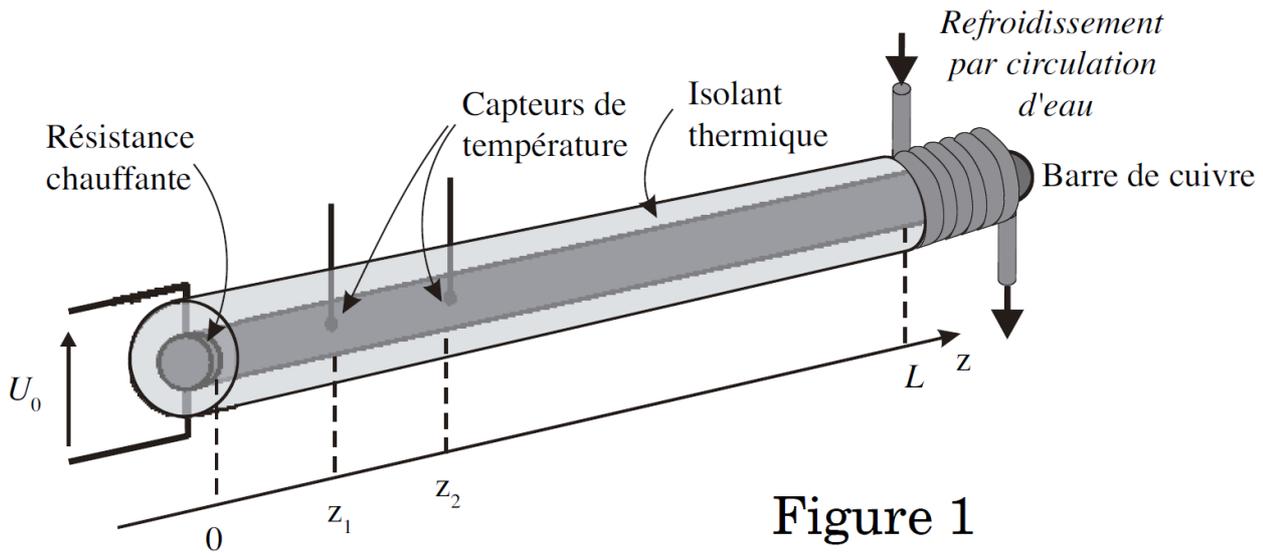


Figure 1

On cherche à étudier le phénomène de diffusion thermique dans une barre cylindrique de cuivre, de diamètre $d = 15,0 \text{ mm}$ et de conductivité thermique λ . À cet effet, on creuse une cavité à l'extrémité de la barre pour y placer une résistance chauffante $R_{ch} = 8,00\Omega$.

Cette résistance est alimentée par un générateur délivrant une tension continue $U_0 = 6,00 \text{ V}$. Afin de rendre les pertes thermiques par la face latérale du cylindre négligeables, le barreau de cuivre est isolé latéralement par une matière plastique de conductivité thermique suffisamment faible par rapport à celle du cuivre. La mesure de température se fait par l'intermédiaire de petits capteurs logés dans des puits creusés latéralement en divers points du cylindre conducteur. Un dispositif de refroidissement par circulation d'eau est placé à l'autre extrémité de la barre de telle sorte que la température du cuivre y soit égale à $20,0^\circ\text{C}$.

IA - Étude du régime stationnaire

On se place tout d'abord en régime stationnaire et on suppose que la température, considérée uniforme dans une section droite de la barre, ne dépend que de la position z .

I.A.1) Quel est a priori la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}T}$? Rappeler la loi de Fourier donnant l'expression du vecteur densité de courant thermique \vec{j}_Q . Préciser la signification des différents termes ainsi que leur dimension respective.

I.A.2) Exprimer la puissance fournie par l'alimentation continue à la résistance chauffante. En supposant que cette puissance est intégralement transférée à la barre située dans la partie $z > 0$, exprimer $\vec{j}_Q(z = 0)$ en fonction de R_{ch} , U_0 et d

Évolution de la température dans la barre

I.A.3) Montrer que \vec{j}_Q est uniforme dans la barre. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température $T(z)$.

I.A.4) Exprimer littéralement $T(z)$ en fonction des données ci-dessus et de $T(L)$. Les deux capteurs de température placés en $z_1 = 8 \text{ cm}$ et $z_2 = 16 \text{ cm}$ indiquent $T_{p1} = 46,4^\circ\text{C}$ et $T_{p2} = 41,4^\circ\text{C}$. Donner l'expression de la conductivité thermique du cuivre λ et calculer sa valeur numérique.

I.A.5) Le refroidissement à l'extrémité de la barre est assuré par une circulation d'eau de débit volumique d_v . En négligeant les fuites thermiques latérales, exprimer grâce à un raisonnement simple la variation de température de l'eau lors de la traversée du système de refroidissement. On pourra introduire la masse volumique et la capacité thermique massique de l'eau.

I.B - Équation d'évolution de la température en régime variable

Le générateur délivre maintenant une tension $U(t)$, ce qui entraîne une variation temporelle de la température en chaque point du barreau. Néanmoins, on conserve l'hypothèse d'uniformité de la température dans une section droite de la barre, ce qui permet d'écrire la température en un point sous la forme $T(z, t)$.

Analyse qualitative

I.B.1) D'une manière générale, le phénomène de diffusion thermique ne peut faire intervenir que les caractéristiques pertinentes du matériau, à savoir la conductivité thermique λ , la capacité thermique massique à pression constante $c_n = 380 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et la masse volumique $\rho = 8870 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Montrer à l'aide d'une analyse dimensionnelle, qu'il est possible de construire un coefficient de diffusion D exprimé en $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$ à partir de ces trois grandeurs.

I.B.2) Le coefficient de diffusion D peut s'exprimer directement en fonction de la résistance thermique linéique r_{th} (résistance thermique par unité de longueur de la barre) et de la capacité thermique linéique c_{th} . Exprimer r_{th} et c_{th} et donner l'expression de D faisant intervenir ces deux grandeurs.

Pour le cuivre, la valeur numérique du coefficient de diffusion D est $D = 1,19 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

I.B.3) Quel est l'ordre de grandeur Δt , de la durée nécessaire pour qu'une modification brutale de la température en un point d'abscisse z_1 atteigne un point d'abscisse $z_2 = z_1 + \Delta z$? La barre de cuivre utilisée a une longueur $L = 0,5 \text{ m}$. Donner une estimation de la durée du régime transitoire précédant le régime stationnaire étudié au paragraphe I.A. Quelles conséquences pratiques peut-on en déduire?

Équation de la chaleur

I.B.4) Établir l'équation de diffusion thermique, dite «équation de la chaleur », à partir d'un bilan énergétique effectué pour la portion de barre comprise entre z et $z + dz$.

I.B.5) Pourquoi peut-on dire que le phénomène de diffusion thermique est irréversible?

I.C - "Ondes thermiques "

Dans cette partie, la tension délivrée par le générateur est sinusoïdale: $U(t) = U_0 \sqrt{2} \cos(\Omega t)$. Dans ce cas, en régime périodique établi, la réponse de chaque capteur oscille autour d'une valeur moyenne spécifique à chacun d'entre eux: $T(z, t) = T_p(z) + \theta_m(z) \cos(\omega t + \varphi(z))$

Par exemple, la figure 2 représente les graphes des fonctions $T(z_1, t)$ et $T(z_2, t)$ avec $z_1 = 8 \text{ cm}$ et $z_2 = 16 \text{ cm}$.

I.C.1) Mesurer sur cette figure les amplitudes $\theta_m(z_1)$ et $\theta_m(z_2)$ ainsi que le déphasage $\varphi(z_2) - \varphi(z_1)$ exprimé en radians.

I.C.2) Mettre la puissance électrique dissipée dans la résistance chauffante sous la forme $p(t) = P_0 + P_0 \cos(\omega t)$ en explicitant P_0 en fonction de U_0 et R_{ch} . Relier ω et Ω . Quelle est la fréquence de la tension aux bornes du générateur dans l'expérience dont les résultats sont présentés en figure 2 ?

I.C.3) Justifier que $\theta(z, t) = \theta_m(z) \cos(\omega t + \varphi(z))$ vérifie l'équation différentielle de la diffusion thermique.

Afin de déterminer les fonctions $\theta_m(z)$ et $\varphi(z)$, on utilise la représentation complexe pour $\theta(z, t)$ en posant $\underline{\theta}(z, t) = A \exp(j(\omega t - \underline{K}z))$.

Écrire l'équation vérifiée par le nombre complexe \underline{K} et montrer qu'il peut se mettre sous la forme

$$\underline{K} = \varepsilon \frac{1 - j}{\delta} \text{ avec } \varepsilon = \pm 1$$

Exprimer δ en fonction de $\lambda, \rho, c_p, \omega$ puis de r_{th}, c_{th}, ω .

I.C.4) Préciser la valeur de ε sachant que la barre de cuivre peut être considérée comme semi-infinie pour le signal sinusoïdal. En déduire les expressions de $\theta_m(z)$ et $\varphi(z)$. Une longueur de 50 cm vous semble-t-elle suffisante pour que cette approximation soit valable ?

I.C.5) Déterminer à partir des résultats expérimentaux de la figure 2, la valeur numérique de δ de deux manières différentes.

I.C.6) On utilise souvent le terme "ondes thermiques " à propos de ce type d'expérience. Quels adjectifs utiliseriez-vous pour caractériser cette " onde " ?

Evolution des températures en deux points de la barre

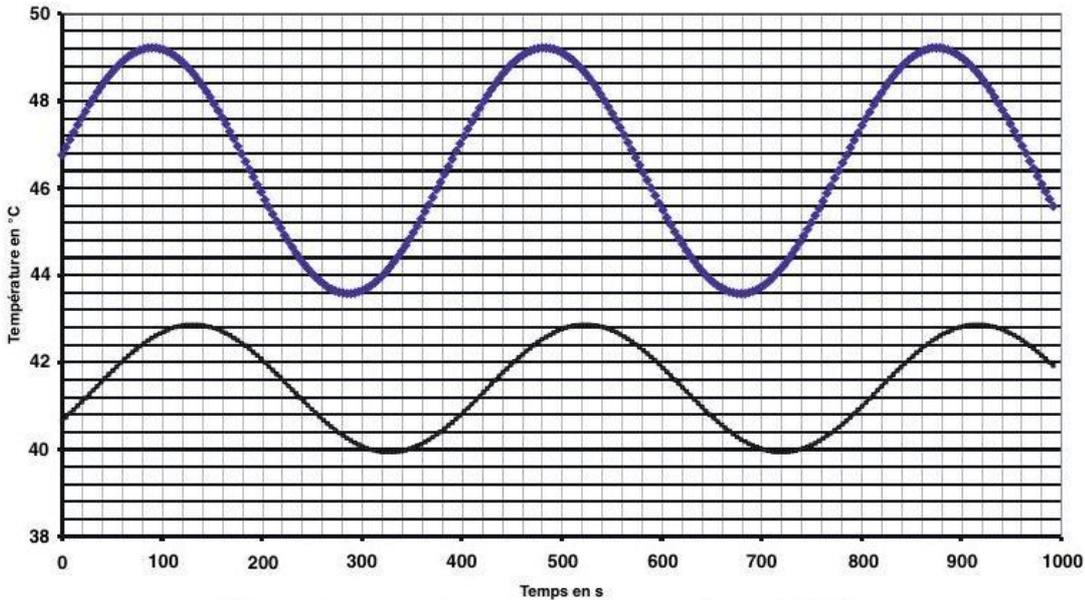


Figure 2 : températures en deux points de la barre

Partie II - Analogie électrocinétique et discrétisation de l'équation de diffusion

Les ondes thermiques abordées dans la section I.C peuvent être étudiées expérimentalement sur un modèle électrocinétique discret, facilement réalisable dans le laboratoire de votre lycée. On considère tout d'abord une chaîne infinie de cellules, associant chacune un conducteur ohmique de résistance R et un condensateur de capacité C . Cette ligne est alimentée par un générateur idéal de tension sinusoïdale de force électromotrice $e(t) = U_0 \cos \omega t$. En régime sinusoïdal forcé, la tension aux bornes $n^{\text{ième}}$ condensateur est de la forme $u_n(t) = U_n \cos(\omega t + \varphi_n)$, représentée en notation complexe par u_n

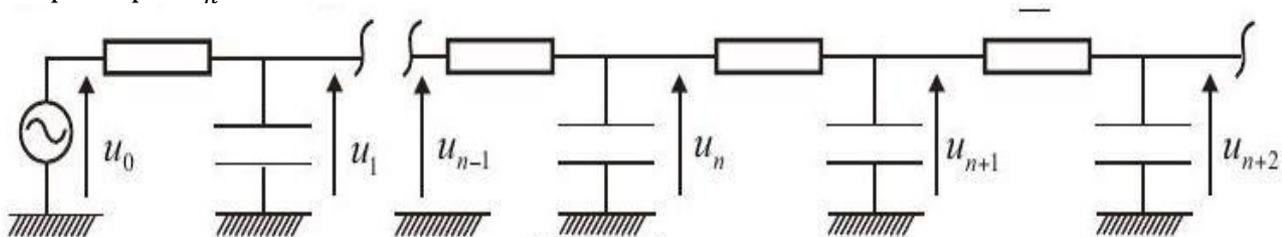


Figure 3

II.A - Chaîne de cellules RC en régime sinusoïdal forcé

II.A.1) Établir la relation de récurrence liant les amplitudes complexes u_n des diverses tensions aux bornes des condensateurs. On pourra utiliser la loi des nœuds exprimée à l'aide des tensions.

II.A.2) On cherche une solution de la forme $u_n = \underline{k}^n u_0$.

Montrer que de telles solutions existent si \underline{k} vérifie une condition à expliciter.

II.A.3) On se place dans l'hypothèse $RC\omega \ll 1$. Montrer que $\underline{k} \cong 1 \pm (1 + j)\sqrt{RC\omega/2}$ au deuxième ordre près en $\sqrt{RC\omega}$.

II.A.4) Interpréter physiquement le caractère complexe de \underline{k} . Déterminer $|\underline{k}|$ au même ordre d'approximation que précédemment. Lever alors l'indétermination de signe dans l'expression de \underline{k} .

II.B - Choix du nombre de cellules

II.B.1) Comme $RC\omega \ll 1$, $|k|$ est proche de l'unité. Montrer que l'amplitude U_n de $u_n(t)$ présente alors une décroissance quasi exponentielle du type $U_n/U_0 \cong \exp(-n/n_0)$. Exprimer n_0

II.B.2) En pratique, on peut se contenter d'un nombre fini de cellules électrocinétiques. Combien de cellules faut-il prendre, à R, C et f fixés, pour que l'on puisse considérer la chaîne ci-dessus comme infinie?

II.C - Validation expérimentale

Le tableau ci-dessous consigne des résultats expérimentaux à R et C fixés. On cherche à savoir si ces données sont modélisables sous la forme $n_{0exp} = Af^s$:

Fréquence f	200	350	500	650
n_{0exp}	4,0	3,0	2,5	2,2

II.C.1) À l'aide d'une représentation graphique simple, montrer que le modèle proposé est en accord avec les données expérimentales. Estimer la valeur de s . Comparer aux résultats de la question II.B.1.

II.C.2) Sachant que $R = 1,0k\Omega$, calculer la valeur numérique de la capacité des condensateurs utilisés.

II.D - Discrétisation de l'équation de diffusion

Les condensateurs sont repérés par leur position $x_n = na$ où a est la taille caractéristique d'une cellule. On introduit une fonction $u(x, t)$, des variables x et t , telle que la tension $u_n(t)$ (non nécessairement sinusoïdale) aux bornes du nème condensateur se note $u_n(t) = u(na, t) = u(x_n, t)$.

II.D.1) On suppose que la variation spatiale de la fonction $u(x, t)$ est petite sur une échelle de distance de l'ordre de a . Montrer alors que $u(x, t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{1}{rc} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Préciser l'expression du produit rc en fonction de R, C et a , ainsi que son unité.

II.D.2) On désire construire une analogie entre la diffusion thermique dans la barre isolée latéralement (étudiée dans la Partie I) et la propagation de signaux électriques dans la chaîne de composants électriques abordée dans cette seconde partie du problème. Reproduire et compléter sur votre copie le tableau ci-dessous qui regroupe les grandeurs physiques analogues.

Thermique	$T(x, t) - T_0$			ρc_p		δ
Électrocinétique		$\frac{u_{n+1} - u_n}{R}$	rc		R	

II.D.3) Soit la grandeur $(u_{n+1} - u_n)^2 / (RT)$, où T désigne la température de la pièce où a lieu l'expérience. Cette grandeur possède-t-elle un équivalent dans le cas de l'expérience thermique ? Quel rapprochement peut-on faire avec la question I.B.5 ?

II.D.4) Proposer, sans justification, un schéma du montage à réaliser pour simuler les phénomènes thermiques par la surface latérale. La température extérieure extérieure est identique à la température à l'extrémité du barreau.

Extrait centrale 09 pc.

On note \vec{u}_z le vecteur unitaire de la direction Oz.

IA1) Si $T=T(z)$, alors son gradient est selon \vec{u}_z .

La loi de Fourier est $\vec{j}_Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{grad}(T)$.

Le premier terme est la puissance thermique surfacique en Wm^{-2} . Le gradient de T est en $K.m^{-1}$ et λ , conductivité thermique, est en $W.m^{-1}.K^{-1}$.

$$IA2) P = \frac{U_0^2}{R_{ch}}. \text{ On a alors } \vec{j}_Q(z=0) = \frac{4P}{\pi d^2} \vec{u}_z = \frac{4U_0^2}{\pi d^2 R_{ch}} \vec{u}_z.$$

IA3) On note **S la section droite**. Faire un bilan d'énergie entre z et z+dz. La puissance entrante est $j_Q(z)S$ et la puissance sortante est $j_Q(z+dz)S$. En régime stationnaire, la température de ce morceau est constante donc ne reçoit aucune énergie

$$\rightarrow j_Q(z) = j_Q(z+dz) \quad j_Q \text{ ne dépend pas de } z.$$

On reprend la loi de Fourier qui donne : $\frac{dT}{dz} = -\frac{4P}{\lambda \pi d^2}$.

$$IA4) \text{ On obtient une loi linéaire qui peut s'écrire : } \frac{T(z)-T(L)}{z-L} = -\frac{4U_0^2}{\lambda \pi d^2 R_{ch}}.$$

AN : $\lambda=407 W.m^{-2}$.

IA5) On note μ la masse volumique de l'eau, c sa capacité thermique massique et ΔT sa variation de température. Le débit massique vaut μd_v et la puissance thermique reçue par l'eau est donc $\mu d_v c \Delta T$. En régime stationnaire et en négligeant les pertes, cette puissance est tout simplement la puissance électrique P. Soit donc : $\Delta T = \frac{U_0^2}{\mu c d_v R_{ch}}$.

$$IB1) D = \frac{\lambda}{\rho c_p} \text{ par analyse dimensionnelle.}$$

$$IB2) \text{ La résistance thermique est } R_{th} = \frac{L}{\lambda S},$$

$$\text{donc la résistance thermique linéique sera } r_{th} = \frac{R_{th}}{L} = \frac{1}{\lambda S}.$$

La capacité du barreau est $\rho c_p L S$ donc la capacité linéique est $c_{th} = \rho S c_p$.

$$\text{On obtient maintenant : } D = \frac{\lambda S}{\rho S c_p} = \frac{1}{r_{th} \cdot c_{th}}.$$

IB3) L'énoncé invite à une analyse dimensionnelle. On peut donc assimiler D à $L^2/\Delta t$. On sort donc $\Delta t = L^2/D \approx 35 \text{ min}$.

A notre échelle personnelle, le régime permanent sera long à s'installer.

$$IB4) \text{ Cf cours, démonstration unidimensionnelle : } \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

IB5) Le changement de variable t en -t ne laisse pas l'équation invariante (à la différence par ex de l'équation d'onde ou des lois de la mécanique). Le phénomène de diffusion thermique est irréversible.

IC1) Il faut faire attention à ne pas se tromper sur les courbes, celle d'amplitude la plus élevée correspondant à la valeur de z la plus faible.

$$\theta_m(z_1) \approx 2,8^\circ C \text{ et } \theta_m(z_2) \approx 1,4^\circ C.$$

D'autre part, la courbe supérieure est en légère avance de phase sur l'autre. Le décalage temporel entre les deux courbes est de $\tau = 40s$ et la période vaut $T=400s$.

$$\text{On a alors } \varphi(z_2) - \varphi(z_1) = -2\pi \cdot \tau/T \approx -0,63 \text{ rad}.$$

$$IC2) \text{ La puissance instantanée dissipée dans la résistance } p(t) = U(t)^2/R_{ch}.$$

En linéarisant, on obtient $p(t) = \frac{U_0^2}{R_{ch}} [1 + \cos(2\Omega t)]$ soit donc $\omega = 2\Omega$.

La période associée à ω est de 400s, donc celle associée à Ω est de 200s et la fréquence associée est donc de 5mHz.

IC3) Linéarité de l'équation différentielle : une somme de solutions est solution. On introduit la forme proposée dans l'équation de diffusion thermique.

$$\text{On obtient : } K^2 = -\frac{j\omega}{D} = \frac{e^{-j\pi/2}\omega}{D} = \left[\pm e^{-j\pi/4} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{D}} \right]^2 = \left[\varepsilon \cdot (1-j) \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2D}} \right]^2$$

$$\text{D'où les deux valeurs de } K \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c_p \omega}} = \sqrt{\frac{2}{r_{th} \cdot c_{th} \cdot \omega}}$$

IC4) Si on considère la barre comme semi-infinie, il faut éviter la divergence pour z tendant vers plus l'infini. Ce qui conduit alors à prendre $\varepsilon = +1$.

$$\text{La solution complexe est donc : } \underline{\theta} = \underline{A} \cdot \exp \left[j \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) \right] \cdot \exp \left[-\frac{z}{\delta} \right]$$

$$\text{dont la partie réelle est : } \theta = A \cdot \cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \phi_A \right) \exp \left[-\frac{z}{\delta} \right]$$

L'énoncé ne spécifie pas si il demande l'expression de φ_A qui n'est autre que $\arg(\underline{A})$. Comme cette valeur ne sert à rien pour la suite, on laisse tomber...

AN $\rightarrow \delta = 12,3\text{cm} \approx L/4$. Au bout de la barre, l'amplitude résiduelle ne représente que 2% de l'amplitude en $z=0$. L'hypothèse est raisonnable.

IC5) On utilise les résultats numériques de la question IC1.

$$\text{En utilisant les amplitudes : } \frac{\theta_m(z_1)}{\theta_m(z_2)} = \frac{A \cdot \exp \left[-\frac{z_1}{\delta} \right]}{A \cdot \exp \left[-\frac{z_2}{\delta} \right]} = \exp \left[\frac{z_2 - z_1}{\delta} \right]$$

$$\text{ce qui donne } \delta = \frac{(z_2 - z_1)}{\ln \left(\frac{\theta_m(z_1)}{\theta_m(z_2)} \right)} \approx 0,115\text{m.}$$

$$\text{En utilisant la phase, } \varphi(z_2) - \varphi(z_1) = \frac{(z_2 - z_1)}{\delta} \quad \text{d'où } \delta \approx 0,2\text{m.}$$

IC6) On est ici en présence d'une onde progressive amortie. Comme δ dépend de ω , le milieu est dispersif.

IIA1) L'énoncé parle en fait de la LDN en terme de potentiel :

$$\frac{1}{R} (\underline{u}_{n-1} - \underline{u}_n) + \frac{1}{R} (\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n) + jC\omega(0 - \underline{u}_n) = 0$$

$$(2 + jRC\omega)\underline{u}_n = \underline{u}_{n-1} + \underline{u}_{n+1}.$$

IIA2) En injectant dans la formule précédente,

$$\text{on trouve } \underline{k} \text{ solution de : } (2 + jRC\omega) = \underline{k} + \frac{1}{\underline{k}}$$

IIA3) Posons $\underline{k} = 1 + \underline{\alpha}$. Le dl de $1/\underline{k}$ à l'ordre 1 se révèle insuffisant ($\underline{\alpha}$ disparaît), il faut le prendre à l'ordre 2 : $\frac{1}{1+\underline{\alpha}} \approx 1 - \underline{\alpha} + \underline{\alpha}^2$ ce qui donne :

$$\underline{\alpha}^2 = jRC\omega = [e^{j\pi/2} RC\omega] = [\pm e^{j\pi/4} \sqrt{RC\omega}]^2 = \left[\pm (1+j) \sqrt{\frac{RC\omega}{2}} \right]^2$$

On obtient la forme demandée.

IIA4) Le caractère complexe de \underline{k} dénote le déphasage entre les tensions successives. On calcule $|\underline{k}|^2 \approx 1 \pm \sqrt{2RC\omega}$, en négligeant les ordres supérieurs.

La chaîne est infinie, donc la tension diverge si la norme de \underline{k} est plus grande que 1. Il faut donc assurer une norme inférieure à 1 soit le signe -. On obtient alors : $|\underline{k}| \approx 1 - \sqrt{\frac{RC\omega}{2}}$

IIB1) Rappel : si $|x| \ll 1$, $1+x \approx \exp(x)$. Donc, en reprenant les résultats précédents,
 $\frac{U_n}{U_o} = |\underline{k}|^n \approx \left(1 - \sqrt{\frac{RC\omega}{2}}\right)^n \approx \left(e^{-\sqrt{RC\omega/2}}\right)^n = e^{-n\sqrt{RC\omega/2}}$ d'où : $n_o = \sqrt{\frac{2}{RC\omega}}$.

IIB2) $e^{-2}=0,13$ $e^{-3}=0,05 \ll 1$. Donc on peut se limiter à environ $3n_o$ cellules.

IIC1) Si on fait le Ln, on doit pouvoir vérifier une loi linéaire entre $\text{Ln}(n_{o\text{exp}})$ et $\text{Ln}(f)$ de pente s . On trouve $s = -0,5$. Cohérent.

IIC2) On calcule $C=0,1\mu\text{F}$.

IID1) On repart de la question IIA1, réécrite en réel : $u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n + RC \frac{du_n}{dt}$ qu'on réorganise pour faire apparaître des différences (donc des dérivées en continu) :

$$(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1}) = +RC \frac{du_n}{dt}$$

$u_n = u(na, t) = u(x, t)$ $u_{n-1} = u(na-a, t) = u(x-a, t)$ $u_{n+1} = u(na+a, t) = u(x+a, t)$
 et la dérivée devient alors $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$.

On a maintenant : $(u(x+a, t) - u(x, t)) - (u(x, t) - u(x-a, t)) = +RC \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$.

Un dl spatial à l'ordre 2 en a est alors nécessaire :

$$u(x \pm a, t) = u(x) \pm a \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + o(a^2)$$

On obtient l'équation demandée avec : $rc = \frac{RC}{a^2}$.

IID2)

Thermique	$T-T_o$	$j_Q \cdot S$	$1/D$	ρc_p	R_{th}	δ
Electrocinétique	$u-U_o$	courant	rc	c/a	R	épaisseur de peau ?

IID3) Curieux mélange.

IID4) On ajoute une résistance R' en parallèle sur le condensateur : courant de fuite analogue à des fuites thermiques latérales.

Résistance thermique en symétrie sphérique.(extrait ccp2012 mp)

4.1 Les particules de combustible nucléaire

Le combustible est constitué de petites sphères multicouches appelées particules TRISO (voir figure n° 3). Le cœur de matériau fissile est entouré de plusieurs couches successives ayant pour rôles d’assurer la protection du noyau et le confinement des produits de fission. Nous prendrons comme matériau pour le cœur et la couche de céramique non pas un oxyde d’uranium UO_2 et un carbure de silicium SiC comme déjà utilisé dans des centrales nucléaires mais un carbure d’uranium UC et un carbure de zirconium ZrC pour leurs propriétés physiques plus intéressantes.

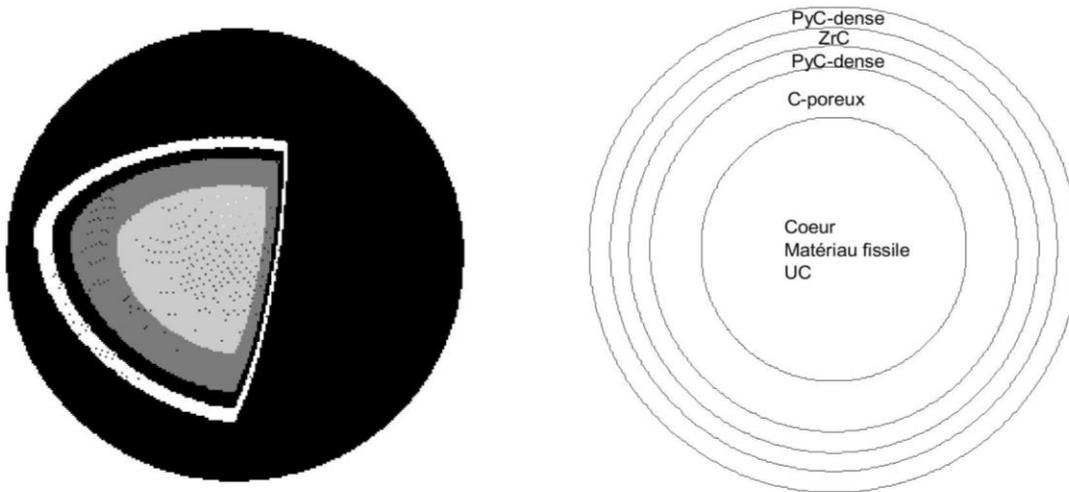


Figure n° 3 : Vue et coupe d'une particule TRISO

Dans cette partie, on considèrera que les propriétés physiques sont isotropes dans l’espace.

Couche	Position	Rayon extérieur (m)	Conductivité thermique λ ($W.m^{-1}.K^{-1}$)
Carbure d’uranium (UC)	$r < r_1$	$r_1 = 250 \times 10^{-6}$	12
Carbone poreux	$r_1 < r < r_2$	$r_2 = 345 \times 10^{-6}$	0,5
Carbone pyrolytique (PyC) dense	$r_2 < r < r_3$	$r_3 = 385 \times 10^{-6}$	4
Carbure de zirconium (ZrC)	$r_3 < r < r_4$	$r_4 = 420 \times 10^{-6}$	20
Carbone pyrolytique (PyC) dense	$r_4 < r < r_5$	$r_5 = 460 \times 10^{-6}$	4

Tableau n° 1 : caractéristiques de couches composant la particule TRISO

La puissance par unité de volume produite sous forme d’énergie thermique dans le matériau fissile UC sera notée σ_Q . La conductivité thermique de la couche numérotée i sera notée λ_i .

4.1.1 Donner la loi de Fourier en indiquant les unités des différentes grandeurs.

4.1.2 L’équation de la chaleur pour le cœur en tenant compte du terme de production s’écrit

$$\frac{du}{dt} = -div(\vec{j}_Q) + \sigma_Q.$$

Justifier cette équation.

4.1.3 En régime stationnaire, à quoi se réduit cette équation ?

4.1.4 Sachant que le laplacien en coordonnées sphériques d'un champ scalaire $\psi(r, \theta, \phi)$ vaut :

$$\nabla^2 \psi = \Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}.$$

Déterminer $T(r)$ pour $r \leq r_1$. On notera T_0 la température en $r = 0$ m.

4.1.5 Calculer numériquement la variation de température entre les abscisses $r = 0$ et $r = r_1$. La puissance volumique σ_Q vaut $5,0 \times 10^9 \text{ W.m}^{-3}$.

Afin de calculer la température dans les différentes couches de la particule TRISO, nous allons utiliser le concept de résistance thermique.

4.1.6 Donner la définition de la résistance thermique R_{th} d'un matériau soumis à un écart de température $T_1 - T_2$ ($T_1 > T_2$) impliquant un flux thermique Φ_{th} ($\Phi_{th} > 0$ selon l'axe décroissant des températures).

4.1.7 Calculer le flux thermique en coordonnées sphériques et le mettre sous la forme :

$$\Phi_{th} = B \frac{dT}{d\left(\frac{1}{r}\right)},$$

où la constante B est à exprimer en fonction des données du problème. On rappelle que le gradient d'un champ scalaire $\psi(r, \theta, \phi)$ s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} \psi = \vec{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}.$$

4.1.8 Calculer la résistance thermique $R_{th,12}$ d'une coque comprise entre un rayon r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$).

4.1.9 Calculer numériquement les résistances thermiques des 4 coques, $R_{th,12}$, $R_{th,23}$, $R_{th,34}$ et $R_{th,45}$.

4.1.10 En déduire les températures aux interfaces T_1 , T_2 , T_3 et T_4 si la température extérieure T_5 vaut 1300 K.

Solution :

4.1.1) Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad}T$ avec T (en K) ; j_Q (en $W.m^{-2}$) et λ (en $W.m^{-1}.K^{-1}$).

4.1.2) $\frac{du}{dt} = -\text{div}(\vec{j}_Q) + \sigma_Q$ représente l'équation de la chaleur pour le cœur ; c'est une équation locale : en effet u représente l'énergie interne volumique, et son augmentation au cours du temps est la différence entre l'énergie thermique produite par le matériau fossile (σ_Q) et ce qui est perdu par conduction ($\text{div}(\vec{j}_Q)$).

4.1.3) En régime stationnaire elle devient : $\text{div}(\vec{j}_Q) = \sigma_Q$.

4.1.4) En remplaçant \vec{j}_Q , donné par la loi de Fourier, dans l'équation précédente, on obtient :

$$-\lambda_1 \text{div}(\text{grad}T) = \sigma_Q \text{ et comme } \text{div}(\text{grad}T) = \Delta T \text{ cela donne : } \Delta T(r) = -\frac{\sigma_Q}{\lambda_1}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT(r)}{dr} \right) = -\frac{\sigma_Q}{\lambda_1} \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT(r)}{dr} \right) = -\frac{\sigma_Q}{\lambda_1} r^2 \Rightarrow r^2 \frac{dT(r)}{dr} = -\frac{\sigma_Q}{3\lambda_1} r^3 + C \Rightarrow$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{\sigma_Q}{3\lambda_1} r + \frac{C}{r^2} \Rightarrow T(r) = -\frac{\sigma_Q}{6\lambda_1} r^2 - \frac{C}{r} + K.$$

En $r = 0$ on a $T = T_0$ donc $C = 0$ (sinon $T(0) \rightarrow +\infty$) et $K = T_0$, d'où $T(r) = -\frac{\sigma_Q}{6\lambda_1} r^2 + T_0$.

4.1.5) $T(r_1) - T_0 = -4,34 \text{ K}$.

$$4.1.6) R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{th}}$$

4.1.7) Le flux en coordonnées sphériques est le flux de \vec{j}_Q à travers une sphère de rayon r , compté dans le sens réel du transfert, donc selon l'axe décroissant de T :

$$\Phi_{th} = |\vec{j}_Q| 4\pi r^2 = \left| -\lambda_1 \frac{dT}{dr} \right| 4\pi r^2 = 4\pi \lambda_1 \left| \frac{dT}{d\left(\frac{1}{r}\right)} \times \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} \right| r^2 = 4\pi \lambda_1 \left| \frac{dT}{d\left(\frac{1}{r}\right)} \times \left(-\frac{1}{r^2}\right) \right| r^2 = 4\pi \lambda_1 \left| \frac{dT}{d\left(\frac{1}{r}\right)} \right| \text{ Comme } \frac{dT}{d\left(\frac{1}{r}\right)} > 0$$

($T \downarrow$ quand $r \uparrow$) alors $B = 4\pi \lambda_1$.

4.1.8) En régime stationnaire Φ_{th} est le même à travers n'importe quelle surface sphérique, il est donc uniforme :

$$\Phi_{th} \left| d\left(\frac{1}{r}\right) \right| = 4\pi \lambda_1 |dT| \text{ soit } \Phi_{th} \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 4\pi \lambda_1 \Delta T \text{ et } R_{th} = \frac{\Delta T}{\Phi_{th}} = \frac{\Delta\left(\frac{1}{r}\right)}{4\pi \lambda_1}$$

$$\text{On trouve donc : } R_{th,12} = \frac{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}{4\pi \lambda_2} = \frac{(r_2 - r_1)}{4\pi \lambda_2 r_1 r_2}.$$

4.1.9) A.N: $R_{th,12} = 175,30 \text{ K.W}^{-1}$ // $R_{th,23} = 5,99 \text{ K.W}^{-1}$ // $R_{th,34} = 0,86 \text{ K.W}^{-1}$ // $R_{th,45} = 4,12 \text{ K.W}^{-1}$

4.1.10) On peut écrire pour chaque couche : $R_{th,12} \times \Phi_{th} = T_1 - T_2$ // $R_{th,23} \times \Phi_{th} = T_2 - T_3$ // $R_{th,34} \times \Phi_{th} = T_3 - T_4$ // $R_{th,45} \times \Phi_{th} = T_4 - T_5$.

De plus Φ_{th} est le même pour toutes les couches et c'est aussi le flux de \vec{j}_Q à travers la sphère de rayon r_1 :

$$\Phi_{th} = \lambda_1 \left| \left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=r_1} \right| 4\pi r_1^2 = \lambda_1 4\pi r_1^2 \left| -\frac{\sigma_Q}{3\lambda_1} r_1 \right| \Rightarrow \Phi_{th} = \frac{4\pi r_1^3}{3} \sigma_Q : \text{ logique, c'est la puissance fournie par le matériau fossile (puissance volumique } \times \text{ volume).}$$

On calcule alors Φ_{th} ; on trouve $\Phi_{th} = 0,327 \text{ W}$ et connaissant T_5 on en déduit :

$$T_4 = T_5 - R_{th,45} \times \Phi_{th} = 1301,3 \text{ K} \text{ et ainsi de suite :}$$

$$T_3 = 1301,6 \text{ K} // T_2 = 1303,6 \text{ K} // T_1 = 1361,0 \text{ K}$$