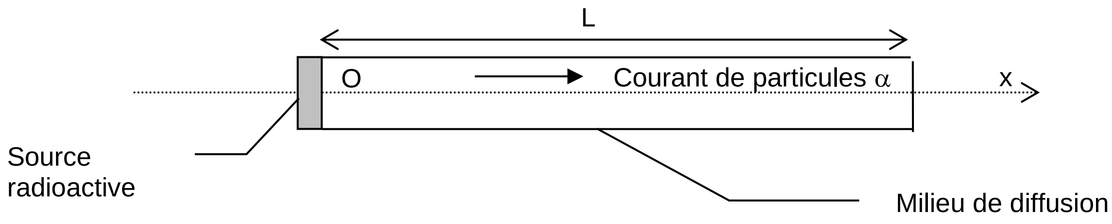
On s'intéresse à la diffusion de particules α dans un milieu non absorbant supposé unidimensionnel. Les particules α sont émises par une source radioactive placée en x = 0. La densité volumique de particules α au niveau de la source décroît dans le temps suivant une loi exponentielle :

$$n(x=0,t) = n_o e^{-t/\tau}$$

On note n(x,t) la densité volumique de particules α. On note D le coefficient de diffusion des particules α dans le milieu de diffusion. On note L la longueur du milieu.



1/ Déterminer l'équation de diffusion vérifiée par n(x,t) pour ce problème à une dimension.

2/ Résoudre cette équation en cherchant des solutions du type $n(x,t) = f(x)exp(-t/\tau)$ et en utilisant les conditions aux limites en $x = 0$ et en $x = L$.

3/ A quelle condition portant sur la longueur L ce type de solution peut-il être réaliste ?

<u>Proposition de solution :</u>

1)Cf cours : $\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$.

2)On reporte la solution proposée dans l'EDP ci-dessus et on obtient :

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0 \quad avec\ k = \frac{1}{\sqrt{\tau D}}$$

On reconnaît une équation d'oscillateur harmonique dont on peut écrire la solution sous plusieurs formes par exemple λcos(kx)+μsin(kx). Mais ici, ce n'est pas la meilleure.
On pose : f(x)=A.cos(kx-φ) avec A>0 et φ un angle compris entre -π et +π.
On a d'autre part come contrainte que la fonction f doit rester à valeurs positives.

La condition aux limites f(0)=n_o conduit à n_o=Acos(φ) donc φ compris entre -π/2 et +π/2.

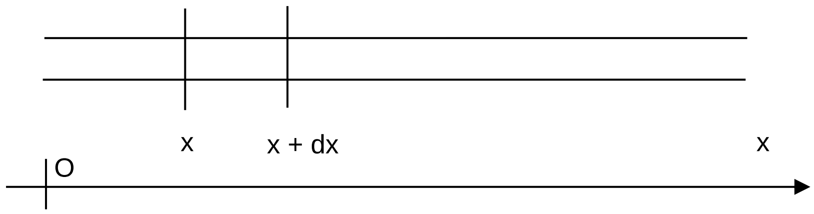
Au bout du tube, les particules α peuvent partir dans toutes les directions donc se dispersent et on a alors n(L,t)=O soit f(L)=0. Soit donc cos(kL-φ)=0 et être positif pour x<L.
La seule solution est kL-φ=π/2.
On obtient finalement :

$$f(x) = \frac{n_o}{sin(kL)} \cdot sin[k(L-x)]$$

3)La contrainte $f(x) \geq 0$ dans l'intervalle [0 L] conduisent à kL<π/2. Si cette contrainte n'est pas respectée, la solution ne peut pas avoir la forme proposée au début de l'énoncé.

Diffusion de particules dans un tuyau poreux:

On considère la diffusion de particules A suivant un axe Ox, le long d'un tube cylindrique de rayon R. La concentration en particules A en x = 0 vaut n_o.



Les particules diffusent le long de l'axe Ox du tuyau. Cependant celui-ci est poreux. On admet que la densité volumique de courant de particules associée aux pertes latérales est radiale et donnée par la relation $\vec{j}_{lat} = K_{lat}(n(x,t) - n_{ext})\vec{u}_r$ avec des conventions culturelles simples.
K_{lat} est une constante. n_{ext} est la concentration particulaire en A à l'extérieur du tuyau.

1/ Commenter cette relation concernant les tertes latérales.

2/ Etablir dans ce cas l'équation de diffusion des particules A.

3/ Résoudre cette équation en régime permanent dans le cas d'un tuyau supposé de longueur infinie.

Proposition de solution :

1)On a pris tout simplement une relation linéaire respectant les contraintes de diffusion : les particules se dirigent selon les concentrations décroissantes comme dans la loi de Fick. On remarquera que le vecteur $\vec{u}_r$ n'a pas été défini.

2)On isole une portion dx du tube entre les abscisses x et x+dx. La section droite est s=πR^2 et la surface latérale est $dS_{lat}=2\pi Rdx$. A un instant donné, le nombre de particules présentes dans la portion de tube est n(x,t)sdx
Pendant l'intervalle de temps dt , avec les notations habituelles :
il rentre en x : j(x,t)sdt
il sort en x+dx : j(x+dx,t)sdt
il sort par la surface latérale : $K[n(x,t)-n_{ext}]dS_{lat}dt$

Bilan de matière : $n(x,t+dt)sdx - n(x,t)sdx = j(x,t)sdt - j(x+dx,t)sdt - K[n(x,t)-n_{ext}]dS_{lat}dt$

On divise par dxdt, on fait tendre dx et dt vers 0 pour faire apparaître les dérivées partielles et on utilise la loi de Fick et on obtient :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{2K}{R}[n - n_{ext}]$$

3)En régime stationnaire, n=n(x) et l'EDP précédente devient :

$$n''(x) + k^2[n(x) - n_{ext}] = 0 \quad avec \quad k = \sqrt{\frac{2K}{DR}}$$

Dont la soluion générale est : $n(x) - n_{ext} = Ae^{-kx} + Be^{+kx}$
Pour éviter une divergence à l'infini, on doit prendre B=0 ce qui conduit à $A=n_o-n_{ext}$ avec la CL au début du tuyau. D'où :

$$n(x) = n_{ext} + (n_o - n_{ext})e^{-kx}$$