Correction du DM7

(d'après Centrale PC 2009 maths 1)

Partie I

1. a) Si $x > 0$ alors $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{xn!}$ donc $\sum f_n(x)$ converge. On en déduit que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\boxed{S \text{ est définie sur } \mathbb{R}^{+*}}$

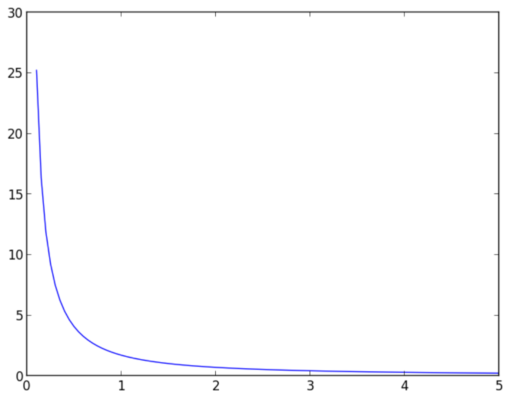
b) Si $x \geqslant a > 0$, on a $|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant f_n(a)$ donc $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant f_n(a)$; comme $a > 0$, $\sum f_n(a)$ converge et $\boxed{\sum f_n \text{ converge normalement sur } [a,+\infty[\text{ si } a > 0}$

c) On applique le théorème de continuité :
H1 : Pour $n \geqslant 0$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H2 : La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$ (car $[a,b] \subset [a,+\infty[$).
On en déduit que $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*}}$
Pour la limite en $+\infty$, on applique le théorème de double limite :
H1 : Pour $n \geqslant 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
H2 : La série $\sum f_n$ converge normalement sur $[1,+\infty[$.
On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0}$

d) Toutes les fonctions f_n sont décroissantes donc $\boxed{S \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^{+*}}$
Comme $f_n \geqslant 0$, on a $S(x) \geqslant f_0(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} S(x) = +\infty}$

e) Si $x > 0$, on a $xS(x) - S(x+1) = xf_0(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}$
et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+p)}$ en posant $p = n+1$, donc on obtient bien $\boxed{xS(x) - S(x+1) = xf_0(x) = 1 \text{ si } x > 0}$
Comme S est continue en 1, on a $\lim\limits_{x\to 0} xS(x) = 1+S(1)$ et $S(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)!} = e-1$. On a donc $\lim\limits_{x\to 0} xS(x) = e$ et $\boxed{S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{e}{x}}$ De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x+1) = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} xS(x) = 1$ et $\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}}$

f)




```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(n,x) :
    for k in range(1,n+1) :
        p *= (x+k)
    return 1/p

def S(n,x) :
    s = 0
    for k in range(n+1) :
        s += f(k,x)
    return s

X = np.linspace(0.1,5,100)
Y = [S(100,x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
```

2. a) θ_n est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,1[$ et $\theta_n \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{(1-t)^{1-x}}$ avec $1-x<1$ donc θ_n est intégrable sur $[0,1[$.

Par IPP : les fonctions $u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto -\dfrac{(1-t)^x}{x}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ et $\lim\limits_{t\to 1} u(t)v(t) = 0$ car $x > 0$ donc $I_n(x) = \left[t^n \times \dfrac{-(1-t)^x}{x}\right]_0^1 + \dfrac{n}{x}\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^x \,\mathrm{d}t = \dfrac{n}{x} I_{n-1}(x+1) = \cdots = \dfrac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} I_0(x+n)$ et $I_0(x+n) = \dfrac{1}{x+n}$ donc $\boxed{I_n(x) = n! f_n(x)}$

b) On va appliquer le TITT avec $F(t) = e^t(1-t)^{x-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n (1-t)^{x-1}$, pour tout $t \in [0,1[$; on pose $u_n(t) = \dfrac{1}{n!} t^n (1-t)^{x-1}$ et on vérifie :
H1 : $\sum u_n$ CVS sur $[0,1[$ vers F.
H2 : les fonctions u_n et la fonction F sont $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,1[$.
H3 : les fonctions u_n sont intégrables sur $[0,1[$ car $u_n = \dfrac{1}{n!}\theta_n$.
H4 : $\displaystyle\int_0^1 |u_n(t)| \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\int_0^1 \theta_n(t)\,\mathrm{d}t = f_n(x)$ et $\sum f_n(x)$ converge puisque $x > 0$.
On en déduit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} I_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ donc $\boxed{S(x) = \displaystyle\int_0^1 e^t (1-t)^{x-1}\,\mathrm{d}t \text{ pour } x > 0}$

Partie II

1. a) On a $\dfrac{w_{n+1}(x)}{w_n(x)} = \dfrac{(n+1)(n+2)^x}{(x+n+1)(n+1)^x}$ donc $\ln\dfrac{w_{n+1}(x)}{w_n(x)} = -\ln\left(1 + \dfrac{x}{n+1}\right) + x\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{x}{n+1} + \dfrac{x}{n+1} + O\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\boxed{\sum \ln\dfrac{w_{n+1}(x)}{w_n(x)} \text{ est absolument convergente}}$

b) La série $\sum[\ln(w_{n+1}(x)) - \ln(w_n(x))]$ converge donc la suite $(\ln(w_n(x))$ converge vers un réel $c(x)$ et par continuité de l'exponentielle, $\boxed{\text{la suite } (w_n(x)) \text{ converge vers } l(x) = e^{c(x)} > 0}$

2. On a donc $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} l(x) v_n(x)$ puis $|a_n u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} l(x)|a_n v_n(x)|$ (positives) donc par le théorème de comparaison sur les séries, comme $l(x) \neq 0$, on a $\boxed{\sum a_n u_n(x) \text{ est ACV si et seulement si } \sum a_n v_n(x) \text{ est ACV}}$

3. a) On applique le théorème de continuité des séries de fonctions :
H1 : pour $n \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto a_n u_n(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$ (c'est une fraction rationnelle).
H2 : Si $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, ie $0 < a < b$, et $x \in [a,b]$, on a $|a_n u_n(x)| \leqslant |a_n| u_n(a)$ car u_n est une fonction positive et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. On a donc $\|a_n u_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant |a_n| u_n(a)$ donc la convergence absolue de $\sum a_n u_n(a)$ donne la convergence normale de $\sum a_n u_n$ sur le segment $[a,b]$.
La série de fonctions $\sum a_n u_n$ converge donc normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.
On en déduit que $\boxed{f_a \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*}}$

b) On applique cette fois le théorème de double limite :
H1 : on a $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n u_n(x) = 0$ car $x(x+1)\dots(x+n) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
H2 : si $x \geqslant 1$, on a $|a_n u_n(x)| \leqslant |a_n| u_n(1)$ donc $\|a_n u_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leqslant |a_n| u_n(1)$, donc, comme à la question précédente, on obtient $\sum a_n u_n$ converge normalement sur $[1,+\infty[$.
On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} a_n u_n(x)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = 0}$

4. a) D'après la première partie, la suite (a_n) définie par $\boxed{a_n = \dfrac{1}{n!}}$ est une suite de $\mathcal{A}$.

b) D'après **II.2**, une suite de $\mathcal{A}$ est donc une suite telle que $\sum \dfrac{a_n}{(n+1)^x}$ est ACV pour tout $x > 0$; si on choisit $\boxed{a_n = 1}$ alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^x}$ ne converge (absolument) que pour $x > 1$ (donc pas pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$) donc $(a_n) \notin \mathcal{A}$.

5. a) Comme $\alpha > 0$, on a $\ln(n) = o\left((n+1)^{\alpha/2}\right)$ puis $a_n\dfrac{\ln(n)}{(n+1)^\alpha} = o\left(\dfrac{|a_n|}{(n+1)^{\alpha/2}}\right)$. On en déduit, par le théorème de comparaison, que $\boxed{\sum a_n \dfrac{\ln(n)}{(n+1)^\alpha} \text{ est ACV}}$ puisque $\sum \dfrac{|a_n|}{(n+1)^{\alpha/2}}$ converge d'après **II.2**, car $\dfrac{\alpha}{2} > 0$.

b) Comme u_n est une fraction rationnelle, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition donc sur $\mathbb{R}^{+*}$. On a $\ln(u_n(x)) = \ln(n!) - \sum_{n=0}^{n} \ln(x+k)$ donc, en dérivant, on obtient $\dfrac{u_n'(x)}{u_n(x)} = -\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x+k} = -\dfrac{1}{x} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x+k}$.

Il suffit donc de prouver que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x+k} \leqslant \ln\left(1+\dfrac{n}{x}\right)$: on a, pour $x>0$ et $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{x+k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \dfrac{\mathrm{d}t}{x+t}$ donc $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x+k} \leqslant \int_0^n \dfrac{\mathrm{d}t}{x+t} = \Big[\ln(x+t)\Big]_0^n = \ln\dfrac{x+n}{x}$ donc on a bien $\boxed{\left|\dfrac{u_n'(x)}{u_n(x)}\right| \leqslant \dfrac{1}{x} + \ln\left(1+\dfrac{n}{x}\right)}$

c) On applique le théorème de dérivation :
H1 : les fonction $a_n u_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H2 : la série de fonctions $\sum a_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.
H3 : si $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, ie $0<a<b$, et $x \in [a,b]$, on a $|a_n u_n'(x)| \leqslant |a_n| u_n(a) \left(\dfrac{1}{a} + \ln\left(1+\dfrac{n}{a}\right)\right)$ donc $\|a_n u_n'\|_{\infty,[a,b]} \leqslant |a_n| u_n(a) \left(\dfrac{1}{a} + \ln\left(1+\dfrac{n}{a}\right)\right) = \alpha_n$. Puis $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_n| u_n(a) \ln\left(1+\dfrac{n}{a}\right) \sim |a_n| u_n(a) \ln(n)$ car $\ln\left(1+\dfrac{n}{a}\right) = \ln(n) + \ln\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{n}\right) = \ln(n) + o(\ln(n))$. D'après **II.2** et le théorème de comparaison, $\sum \alpha_n$ converge si et seulement si $\sum |a_n| \dfrac{\ln(n)}{(n+1)^a}$ converge, ce qui est le cas d'après **II.5.a** puisque $a>0$. On en déduit donc que la série $\sum a_n u_n'$ converge normalement sur $[a,b]$ donc sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.

On a donc $\boxed{f_a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}) \text{ et } f_a'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n'(x) \text{ si } x>0}$

Partie III

1. D'après **II.2**, la série $\sum \dfrac{a_n}{(n+1)^2}$ est ACV et comme, pour $x \in [0,1[$, on a $a_n x^n = o\left(\dfrac{a_n}{(n+1)^2}\right)$, le théorème de comparaison donne $\boxed{\sum a_n x^n \text{ est ACV pour } x \in [0,1[}$

2. On utilise le théorème de continuité des séries de fonctions :
H1 : les fonctions $h_n : x \mapsto a_n x^n$ sont continues sur $[0,1[$.
H2 : la série de fonctions $\sum h_n$ CVNTS de $[0,1[$ car $\|h_n\|_{\infty,[\alpha,\beta]} = |a_n| \beta^b$ et $\sum a_n \beta^n$ est ACV si $[\alpha,\beta] \subset [0,1[$, donc $\beta \in [0,1[$, d'après la question précédente.
On en déduit que $\boxed{\phi_a \text{ est continue sur } [0,1[}$

3. On utilise le TITT en posant $g_n(y) = a_n(1-y)^{1-x} y^n$, pour $x>0$ fixé :
H1 : Si $y \in [0,1[$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(y) = (1-y)^{x-1}\Phi_a(y)$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ CVS sur $[0,1[$ vers $y \mapsto (1-y)^{x-1}\Phi_a(y)$.
H2 : Les fonctions g_n et la fonction $y \mapsto (1-y)^{x-1}\Phi_a(y)$ sont continue sur $[0,1[$ car Φ_a est continue sur $[0,1[$.
H3 : Les fonctions g_n sont intégrables sur $[0,1[$ d'après **I.6.a**
H4 : On a $\int_0^1 |g_n(y)|\,\mathrm{d}y = |a_n| \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n\,\mathrm{d}y = |a_n| u_n(x)$ (**I.6.a**) et comme $(a_n) \in \mathcal{A}$, la série $\sum a_n u_n(x)$ est absolument convergente donc $\sum \int_0^1 |g_n(y)|\,\mathrm{d}y$ converge.

On en déduit que $y \mapsto (1-y)^{x-1}\Phi_a(y)$ est intégrable sur $[0,1[$ si $x>0$ donc $\int_0^1 (1-y)^{x-1}\Phi_a(y)\,\mathrm{d}y$ existe si $x>0$ et $\boxed{\int_0^1 (1-y)^{x-1}\Phi_a(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x) = f_a(x) \text{ pour tout } x>0}$