Notations

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou C, et H une partie de $\mathbb{K}$. On utilise les notations suivantes :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$,
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$,
- $\mathcal{D}_n(H)$: l'ensemble des matrices diagonales dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients diagonaux dans H,
- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$: l'ensemble des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- I_n : la matrice identité d'ordre n.

Définitions

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note :

$$E_\lambda(A,B) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda BX\}.$$

- On dit que λ est une **valeur propre** du couple (A,B) si $E_\lambda(A,B) \neq \{0\}$, c'est-à-dire si $A - \lambda B$ n'est pas inversible.
- Le polynôme caractéristique du couple (A,B) est donné par :

$$\mathcal{X}_{A,B}(\lambda) = \det(\lambda B - A).$$

- L'ensemble des valeurs propres du couple (A,B) est défini par : $\mathrm{Sp}(A,B) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \mathcal{X}_{A,B}(\lambda) = 0\}$.

Dans le cas particulier où $B = I_n$, on remarquera que ces définitions correspondent aux notions de valeur propre, d'espace propre et de polynôme caractéristique de A.
Ainsi, $E_\lambda(A, I_n)$ et $\mathcal{X}_{A,I_n}$ sont notés plus simplement $E_\lambda(A) =$ et $\mathcal{X}_A$.

Partie I : Diagonalisabilité dans un cas particulier

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 12 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note également :

$$\mathcal{F} = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad \text{avec} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Montrer que B n'est pas inversible.

b) Montrer que A est inversible.

c) Vérifier que $C = A^{-1}B$.

2. a) Montrer que $\mathcal{X}_{A,B}(\lambda) = (2\lambda - 1)^2$.

b) En déduire $\mathrm{Sp}(A,B)$.

c) Déterminer une base de $E_{\frac{1}{2}}(A,B)$ et en déduire que $\dim E_{\frac{1}{2}}(A,B) = 2$.

3. a) Calculer $\mathcal{X}_{B,A}$ et en déduire que $\mathrm{Sp}(B,A) = \{0, 2\}$

b) Établir les identités suivantes :

$$E_0(B,A) = \mathrm{Vect}\{u_1\} = E_0(C) \quad \text{et} \quad E_2(B,A) = E_{1/2}(A,B) = \mathrm{Vect}\{u_2, u_3\} = E_2(C)$$

c) En déduire que $\dim(E_0(B,A)) + \dim(E_2(B,A)) = 3$

4. a) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de C.

b) Déterminer explicitement une matrice $R \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $C = RDR^{-1}$

c) Montrer que $B = ARDR^{-1}$

d) Justifier qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PI_3Q$ et $B = PDQ$

Partie II : Régularité et diagonalisabilité

Définitions : Soit $(A, B, A', B') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$.

- On dit que le couple (A, B) est **régulier** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\mathcal{X}_{A,B}(\lambda) \neq 0$.
- On dit que le couple (A, B) est **équivalent** au couple (A', B') et on note $(A, B) \sim (A', B')$ si :

$$\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) | A = PA'Q \text{ et } B = PB'Q.$$

- On dit que le couple (A, B) est **diagonalisable** si :

$$\exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \exists D' \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), (A, B) \sim (D, D').$$

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) On suppose dans cette question que B est inversible. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, exprimer $\mathcal{X}_{A,B}(\lambda)$ en fonction de $\mathcal{X}_{B^{-1}A}(\lambda)$ et en déduire que $\mathcal{X}_{A,B}$ est une fonction polynomiale dont on précisera le degré.

b) On suppose dans cette question que $n = 2$. Donner un exemple de couple $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour lequel $\mathcal{X}_{A,B}$ est la fonction nulle alors que ni A ni B n'est la matrice nulle.

c) Montrer que $\chi_{A,B}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

2. a) Montrer que :

$$(A, B) \sim (A', B') \implies \forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\ \lambda \in \mathbb{K},\ A - \lambda B = P(A' - \lambda B')Q.$$

b) Établir que si (A, B) est équivalent à (A', B'), alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$, non nul, tel que :

$$\mathcal{X}_{A,B} = \alpha \mathcal{X}_{A',B'}, \quad \text{et que } \operatorname{Sp}(A, B) = \operatorname{Sp}(A', B').$$

3. On suppose dans cette question que (A, B) est régulier.

a) Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\},\ \mathcal{X}_{A,B}(\lambda) = (-1)^n \lambda^n \mathcal{X}_{B,A}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

b) Montrer que (B, A) est régulier.

c) On suppose dans cette question que r et s sont deux entiers tels que $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant n$ et $a_r, a_{r+1}, \ldots, a_s$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a_r \neq 0$ et $a_s \neq 0$. On suppose également que $\mathcal{X}_{B,A}$ s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{X}_{B,A}(\lambda) = \sum_{k=r}^{s} a_k \lambda^k.$$

Montrer que 0 est une racine de $\mathcal{X}_{B,A}$ d'ordre de multiplicité r et que $\mathcal{X}_{A,B}$ est de degré $n - r$.

d) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i) B est inversible ;

ii) $\mathcal{X}_{A,B}$ est de degré n ;

iii) $0 \notin \operatorname{Sp}(B, A)$.

4. On suppose dans cette question que B est inversible. Montrer que si $B^{-1}A$ est diagonalisable, alors (A, B) est diagonalisable.

Partie III : Un critère de diagonalisabilité

Définitions : Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ un couple régulier.

- Pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(A, B)$, on note $m_\lambda(A, B)$ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de $\mathcal{X}_{A,B}$.
- Si B est inversible, on note :

$$\operatorname{Sp}_\infty(A, B) = \operatorname{Sp}(A, B), \quad m_\infty(A, B) = 0, \quad \text{et } E_\infty(A, B) = \{0\}.$$

- Si B n'est pas inversible, on note :

$$\operatorname{Sp}_\infty(A, B) = \operatorname{Sp}(A, B) \cup \{\infty\}, \quad m_\infty(A, B) = m_0(B, A),$$

où $m_0(B, A)$ désigne l'ordre de multiplicité de 0 en tant que racine de $\mathcal{X}_{B,A}$, et $E_\infty(A, B) = E_0(B, A)$.

- On dit que le couple (A, B) vérifie la propriété $\mathcal{H}$ si :

$$\forall \lambda \in \operatorname{Sp}_\infty(A, B),\ \dim E_\lambda(A, B) = m_\lambda(A, B).$$

Dans toute cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$ un couple régulier. Il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $A - \lambda_0 B$ soit inversible.
Pour simplifier les notations, on suppose dans toute cette partie que $\lambda_0 = 0$, si bien que A est inversible.
On note d le degré de $\mathcal{X}_{A,B}$ et $C = A^{-1}B$.
Dans les questions suivantes, on pourra être amené à distinguer le cas où B est inversible du cas où B n'est pas inversible.

1. a) Montrer que :
$$E_0(C) = E_0(B, A) = E_\infty(A, B).$$

b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors :
$$E_\lambda(C) = E_{1/\lambda}(A, B).$$

c) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des éléments distincts de $\mathbb{C}$. Justifier que si :
$$\mathrm{Sp}(C) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\},$$
alors :
$$\mathrm{Sp}_\infty(A, B) = \{1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_k\},$$
où $1/0$ est considéré comme ∞.

2. Vérifier que $m_\infty(A, B) = n - d$, puis que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} m_\lambda(A, B) = n$.

3. On suppose dans toute la suite de cette partie que (A, B) vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

a) Montrer que :
$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} \dim E_\lambda(A, B) = n.$$

b) Montrer que C est diagonalisable.

c) En déduire que le couple (A, B) est diagonalisable.

Dans toute la suite du problème, on admet que si (A, B) est régulier et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors (A, B) est diagonalisable si et seulement si il vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

Partie IV : Exemple de non-diagonalisabilité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ défini par :
$$f(e_1) = 0 \quad \text{et, si } n \geq 2 \text{ et } i \in \{2, \dots, n\},\ f(e_i) = e_{i-1}.$$

On note A_n la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et $B_n = A_n^T$.
On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est B_n. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{X}_{A_n,B_n}(\lambda)$ par $c_n(\lambda)$, et on pose $c_0(\lambda) = 1$.

1. Donner la forme explicite des matrices A_n et B_n.

2. Vérifier que la matrice de $f - \lambda g$ dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -\lambda & 0 & 1 & (0) & \\ & -\lambda & 0 & \ddots & \\ & (0) & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

3. a) Calculer $c_1(\lambda)$, $c_2(\lambda)$, $c_3(\lambda)$ et $c_4(\lambda)$.

b) Montrer que, pour $n \geq 2$, $c_n(\lambda) = \lambda c_{n-2}(\lambda)$.

c) En déduire, pour $k \in \mathbb{N}$, les expressions de $c_{2k}(\lambda)$ et $c_{2k+1}(\lambda)$.

d) Donner une condition sur $n \in \mathbb{N}$ pour que (A_n, B_n) soit régulier.

4. a) Déterminer $\dim E_0(A_4, B_4)$ et $\dim E_\infty(A_4, B_4)$.

b) Calculer $m_0(A_4, B_4)$ et $m_\infty(A_4, B_4)$.

c) Le couple (A_4, B_4) est-il diagonalisable ?