I Calculs de réduction

Exercice 1 *[Solution]*
Diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes puis calculer leur puissance $n^{\text{ème}}$.

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\quad;\quad B=\begin{pmatrix}11&-5&5\\-5&3&-3\\5&-3&3\end{pmatrix}\quad;\quad C=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}\quad;\quad D=\begin{pmatrix}6&2&2\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Mines-Télécom PSI 2018) *[Solution]*
Diagonaliser $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

Exercice 3 (Mines-Télécom PSI 2023) *[Solution]*
Soit $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&4&-6\\4&8&-12\end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A.
2. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique.
3. Déterminer les éléments propres de A.
4. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 (CCINP PSI 2022) *[Solution]*
Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&1&-3\\-2&1&5\end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer u et v, deux vecteurs propres de A et w tel que (u,v,w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Trigonaliser A.

Exercice 5 (Mines-Télécom PSI 2023) *[Solution]*
Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}$. Trigonaliser A et calculer A^n.

Exercice 6 (Mines-Télécom PSI 2021) *[Solution]*
Soit $A=\begin{pmatrix}-1&1&3\\-2&2&2\\-2&1&4\end{pmatrix}$

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable
2. Déterminer les éléments propres de A.
3. Déterminer un vecteur propre u de A associé à la valeur propre 2 puis un vecteur v tel que $(A-2I_3)v=u$. En déduire une matrice P inversible et T triangulaire supérieure telles que $A=PTP^{-1}$
4. Calculer T^k puis A^k

Exercice 7 (CCINP PSI 2023) *[Solution]*
Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $M_\alpha=\begin{pmatrix}\alpha&0&1\\0&1&0\\1&0&\alpha\end{pmatrix}$

1. Déterminer $\mathcal{X}_{M_\alpha}$ et les valeurs propres de M_α
2. M_α est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer ses espaces propres, P inversible et D diagonale telles que $M_\alpha = PDP^{-1}$
3. M_α est-elle inversible ?
4. Lorsque M_α n'est pas inversible, déterminer des bases de $\ker(M_\alpha)$ et $\mathrm{Im}(M_\alpha)$.

Exercice 8 **(CCP PSI 2011)** *[Solution]*
Donner les rangs de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A - I_3$. A est-elle diagonalisable ? Trouver P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & b & \beta \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Exercice 9 **(CCP PSI 2009)** *[Solution]*
Déterminer l'ensemble Ω des réels a tels que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.
Pour $a \in \Omega$, trouver P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

Exercice 10 **(ENSAM PSI 2015)** *[Solution]*
Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$, la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 11 **(ENSAM PSI 2016)** *[Solution]*
A quelle condition nécessaire et suffisante, $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 12 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*
Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
indication : étudier les variations de $\mathcal{X}_A$ pour déterminer le nombre de valeurs propres de A.

Exercice 13 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

2. Exprimer A^n comme combinaison linéaire de I_3, A et A^2.

Exercice 14 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Exprimer A en fonction de J et J^2.

2. Calculer le polynôme caractéristique de J. La matrice J est-elle diagonalisable ?

3. Diagonaliser A.

Exercice 15 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeur propres de $M(a,b,c)$.

2. Déterminer le noyau de $M(a,0,a)$ et $M(a,b,a)$ (pour a et b non nuls)

3. Calculer $\det(M(a,b,c))$ et déterminer le noyau et l'image de $M(a,b,c)$ lorsqu'elle n'est pas inversible.

4. Justifier que $M(a,b,c)$ est diagonalisable et la diagonaliser (trouver P et P^{-1})

Exercice 16 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Montrer que M est diagonalisable.

2. Exprimer R en fonction de M et I_3. Montrer que R est diagonalisable.

3. On pose $u_n = \operatorname{Tr}(M^n)$. Montrer que (u_n) est à valeurs entières et que (u_n) diverge.

4. On pose $v_n = \operatorname{Tr}(R^n)$. Déterminer les valeurs de (a,b) pour lesquelles (v_n) converge.

Exercice 17 **(AADN PSI 2012)** *[Solution]*

CNS sur a pour que $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable. Dans ce cas, calculer M^n.

Exercice 18 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-n & n-2 & n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 19 **(ENSEA/ENSIIE PSI 2022)** *[Solution]*

Soit $m \in \mathbb{R}$; soit $A_m = \begin{pmatrix} -1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice A_m est-elle diagonalisable ?

Exercice 20 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

On définit : $\forall m \in \mathbb{N}$, $A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres et sous-espaces propres de A_m.
2. Donner si existence les valeurs de m telles que A_m soit diagonalisable. Même question pour l'inversibilité.
3. Si A_m est diagonalisable déterminer la matrice de passage P.

Exercice 21 **(CCP PSI 2021)** *[Solution]*

Soit $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On pose $D_n(\theta) = \mathcal{X}_{A_n}(2\cos\theta)$.

1. Trouver une relation entre D_{n+2}, D_{n+1} et D_n et en déduire que $D_n(\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
2. A_n est-elle diagonalisable ?

Exercice 22 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*

Soit $\theta \in \,]0, \pi[$. On note E l'ensemble des suites réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2\cos\theta\, u_{n+1} + u_n = 0$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En donner une base.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de θ existe-t-il une suite non nulle de E telle que $u_0 = u_{p+1} = 0$?
3. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, a_{i,j} = \delta_{|i-j|,1}$. Déterminer les éléments propres de A. Est-elle diagonalisable ?
   indication : résoudre le système $AX = 2\cos\theta X$ en posant $X = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$

Exercice 23 **(Mines-Ponts PSI 2014)** *[Solution]*

Soit f canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Trouver une CNS sur a, b et c pour que f soit diagonalisable.
2. Montrer que dans ce cas, on a $f^n \in \mathrm{Vect}\{id_E, f\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 24 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*

Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ On note P_n le polynôme caractéristique de A_n.

1. Justifier que A_n est diagonalisable
   indication : à faire après le cours sur les espaces euclidiens
2. Donner le spectre de A_2
3. Montrer que, pour $n \geqslant 3$, $P_n = (X - n + 1)P_{n-1} - X(X-1)\dots(X-n+2)$
4. Montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], (-1)^{n-k} P_n(k) > 0$ et en déduire que A_n possède une valeur propre dans chacun des intervalles $]0,1[,]1,2[, \dots,]n-2, n-1[$.
5. En déduire à nouveau que A_n est diagonalisable.

Exercice 25 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Solution]*

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $bc \neq 0$, $b \neq c$ et $M = \begin{pmatrix} a & & (c) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix}$

1. Calculer $\Delta(t) = \begin{vmatrix} a+t & & (c+t) \\ & \ddots & \\ (b+t) & & a+t \end{vmatrix}$ et en déduire $\mathcal{X}_M$.
   indication : montrer que $\Delta(t) \in \mathbb{R}_1[t]$ (sans chercher à le calculer complètement)
2. M est-elle diagonalisable ?

Exercice 26 **(ENTPE PSI 2007)** *[Solution]*

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i+j \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ Donner le rang de A, puis ses éléments propres. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 27 **(Mines-Ponts PSI 2011)** *[Solution]*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $a_{1,n} = \alpha_n$ et $a_{i,i-1} = \alpha_{i-1}$, les autres coefficients nuls. Donner une CNS sur les $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour que A soit diagonalisable et la diagonaliser.

Exercice 28 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*

Soient $a_1, \ldots, a_{n-1}$ des réels non nuls, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & b_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A. Montrer que $x_n \neq 0$.
2. Montrer que les sous-espaces propres de A sont des droites.
   indication : raisonner par l'absurde en introduisant deux vecteurs propres linéairement indépendants et utiliser la première question.
3. Déterminer $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(A))$
   indication : à faire après le cours sur les espaces euclidiens

Exercice 29 **(Centrale PSI 2022)** *[Solution]*

Si $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in (\mathbb{C}^*)^4$, pour $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on pose $\overline{M} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} & \overline{\delta} \end{pmatrix}$ et $M^* = \overline{M}^T$.

On pose $A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), M^* = -M \text{ et } \mathrm{Tr}(M) = 0\}$ et $B = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), MM^* = I_2 \text{ et } \det(M) = 1\}$

1. a) A est-il un $\mathbb{R}$ espace vectoriel ? De quelle dimension ?
   b) A est-il un $\mathbb{C}$ espace vectoriel ?
2. Déterminer $A \cap B$.
3. Les matrices de B sont-elles diagonalisables ?
   indication : commencer par $M \in B$ si et seulement si $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

II Matrices de rang 1 ou 2

Exercice 30 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, f une forme linéaire non nulle sur E et $a \neq 0$ un vecteur de E. On pose $u(x) = x + f(x)a$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E qui admet 1 pour valeur propre. Quelle est la dimension de $E_1(u)$?
2. Donner une CNS sur a et f pour que u soit diagonalisable.

Exercice 31 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, ℓ une forme linéaire non nulle sur E, $a \in E$ non nul et f définie par $f(x) = \ell(x)a - \ell(a)x$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E qui s'annule en a.

2. Justifier que si $\ell(a) \neq 0$ et $f(x) = 0$ alors $x \in \text{Vect}\{a\}$.

3. Calculer $f(x)$ si $\ell(x) = 0$

4. f est-il diagonalisable ?

5. Déterminer $\mathcal{X}_f$ et $\text{Tr}(f)$.

Exercice 32 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = X\,{}^tX$.

1. Déterminer $\text{rg}(A)$ et $\text{Sp}(A)$.

2. Déterminer $\mathcal{X}_A$.

3. Montrer que $\det(I_n + A) = 1 + {}^tXX$

Exercice 33 **(CCP PSI 2014)** *[Solution]*
Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ non nulles et $M = X\,{}^tY$.

1. Déterminer le rang de M.

2. Déterminer $\det(M - \lambda I_n)$ en fonction λ, X et Y.

3. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, $Y = {}^tA^{-1}X$ et $M = X\,{}^tY$.
En calculant $\det(M + I_n)$, montrer que $\dfrac{\det(X\,{}^tX + A)}{\det(A)} = 1 + {}^tXA^{-1}X$

Exercice 34 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{1,i} = a_{i,1} = i$, les autres coefficients nuls.

1. Déterminer le rang de A ; en déduire $\ker(A)$.

2. A est-elle diagonalisable ? Que dire de la multiplicité de la valeur propre 0 ?

3. Montrer que A possède 3 valeurs propres 0, λ et $1 - \lambda$.

4. Trouver un polynôme annulateur de degré 3.

Exercice 35 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\ a_{i,j} = ij^2$.

1. Déterminer le rang de A et déterminer ses valeurs propres sans calculer le polynôme caractéristique.

2. En déduire que A est diagonalisable.

3. Déterminer une base de vecteurs propres de A.

Exercice 36 **(Mines-Télécom PSI 2019)** *[Solution]*

Soient $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, avec $n \geqslant 2$, $a_i \in \mathbb{C}$, et $P_n = \mathcal{X}_{A_n}$.

1. Calculer P_2 et P_3.

2. Calculer $\text{rg}(A_n)$ et en déduire que X^{n-2} divise P_n.

3. Montrer que $P_n = X^{n-2}(X^2 - a_1X - b_n)$ avec $b_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k^2$.

4. A_n est-elle diagonalisable ?

Exercice 37 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soient $n \geqslant 2$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $a_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$

1. Montrer que a est diagonalisable si $\alpha \in \mathbb{R}$
indication : à faire après le cours sur les espaces euclidiens

2. Calculer le rang de A et en déduire ses valeurs propres.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 38 **(CCP MP 2015)** *[Solution]*
Soient a et b deux vecteurs unitaires et libres de E euclidien. Soit $u : x \mapsto (a|x)a + (b|x)b$. Déterminer $\ker(u)$ puis les éléments propres de u.

Exercice 39 **(ENTPE-EIVP PSI 2015)** *[Solution]*
Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$. Trouver les éléments propres de $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $s_{i,j} = \begin{cases} 1 - a_i^2 & \text{si } i = j \\ -a_i a_j & \text{sinon} \end{cases}$
indication : examiner $\text{rg}(S - I_n)$.

III Matrices semblables

Exercice 40 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 41 **(CCP PSI 2023)** *[Solution]*
Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possèdent le même spectre.

1. Montrer que si les valeurs propres sont deux à deux distinctes alors A et B sont semblables.

2. Donner deux matrices ayant le même spectre mais non semblables.

Exercice 42 **(Centrale PSI 2018)** *[Solution]*

1. a) Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

b) Monter que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ alors $\mathrm{Sp}(P(A)) = \{P(\lambda), \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$

2. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ semblables à leur carré.

3. Déterminer les matrices de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ semblables à leur inverse.

IV Sous-espaces stables

Exercice 43 *[Solution]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.

Exercice 44 **(Mines-Ponts PC 2015)** *[Solution]*
Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 45 **(Centrale PSI 2012)** *[Solution]*
Trouver les sous-espaces stables par l'endomorphisme associé à $A = \begin{pmatrix} -1 & k & -k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 46 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. A est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer les droites stables par a

3. Soient P un plan stable par a et a' l'endomorphisme de P induit par a

a) Montrer que $\mathcal{X}_{a'}$ divise $\mathcal{X}_a$

b) En déduire $P \subset \ker(a - 3id)^2$

c) Trouver les sous espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par a

Exercice 47 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, H un hyperplan de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que H est stable par u si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}(u - \lambda id) \subset H$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer les sous-espaces stables par A.

Exercice 48 **(Centrale PSI 2009)** *[Solution]*

1. $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? ${}^tA$ l'est-elle ?

2. Trouver les droites stables par l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ associé à A.

3. Montrer que si $P : ax + by + cz = 0$ est stable par u alors (a, b, c) est vecteur propre de ${}^tA$. En déduire tous les plans stables par u.

Exercice 49 **(Centrale PSI 2022)** *[Solution]*
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$

1. Montrer qu'il existe au moins deux sous espaces de E stables par f.
Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ n'ayant que 2 sous espaces stables.
2. On suppose $f \neq 0$ et non injectif. Montrer qu'il existe au moins 3 sous espaces de E stables par f.
Dans le cas où n est impair, montrer qu'il existe 4 sous espaces de E stables par f. (*indication : penser au théorème du rang*)
Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ n'ayant que 3 sous espaces stables.
3. On suppose f diagonalisable. Montrer que f admet un nombre fini de sous espaces stables si et seulement si f admet n valeurs propres distinctes.
indication : montrer qu'un sev est stable si et seulement si il est engendré par des vecteurs propres de f

V Commutant et équations matricielles

Exercice 50 **(Navale PSI 2019)** *[Solution]*

1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. Que dire de $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = A$? Donner ses éléments propres et trouver les matrices X solutions

Exercice 51 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\mathcal{X}_A = (X-1)(X+8)$; A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$; calculer P^{-1}
3. Trouver les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = B^3$

Exercice 52 **(CCP PSI 2016)** *[Solution]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Montrer que si M commute avec D, matrice diagonale semblable à A, alors M est diagonale.
3. Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^7 + M + I_3 = A$.

Exercice 53 *[Solution]*

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec A.

Exercice 54 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

1. u est-il diagonalisable ?
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec u

Exercice 55 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient E un espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres distinctes et $Z_u = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}$

1. Montrer que Z_u est un espace vectoriel
2. Montrer que si $v \in Z_u$ alors $E_\lambda(u)$ est stable par v
3. Donner $\dim(E_\lambda(u))$ et en déduire que les vecteurs propres de u sont aussi des vecteurs propres de v
4. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales puis déterminer $\dim(Z_u)$

Exercice 56 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable ; on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes et $m_1, \dots, m_r$ leurs ordres de multiplicités.

1. Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de A de degré r et que tout polynôme annulateur non nul de A est de degré $\geqslant r$.
2. On note $\mathbb{K}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{K}[X]\}$; montrer que $\dim(\mathbb{K}[A]) = r$.
3. On note $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA\}$; montrer que $\dim(C(A)) = \sum_{i=1}^{r} m_i^2$.
4. Montrer que $\dim(C(A)) = r \Leftrightarrow \dim(\mathbb{K}[A]) = n \Leftrightarrow n = r \Leftrightarrow C(A) = \mathbb{K}[A]$

Exercice 57 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Trouver les $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $g^3 + 2g = f$.

Exercice 58 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Solution]*

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B = A^3 + A + I_n$. Exprimer A comme un polynôme en B.
   indication : vérifier que B est aussi DZ et trouver les vp de B en fonction de celles de A.
2. Est ce toujours vrai dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 59 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ canoniquement associée à f. On suppose $f = g^2$.

1. Déterminer les éléments propres de A ; est-elle diagonalisable ?
2. soient e_1 et e_3 des vecteurs propres de f associés à 1 et 3 ; montrer que $g(e_1)$ et $g(e_3)$ sont aussi des vecteurs propres de f, associés à 1 et 3.
3. En déduire que e_1 et e_3 sont aussi des vecteurs propres de g ; quelles sont les valeurs propres associées ?
4. g est-il diagonalisable ?
5. Quelles sont les valeurs propres possibles de g ?

Exercice 60 **(CCP PC 2013)** *[Solution]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ associée à u.

1. Montrer que $E = \ker(u - 2id) \oplus \ker(u - id)^2$.
2. Soit v de matrice X telle que $X^n = A$. Montrer que $\ker(u - 2id)$ et $\ker(u - id)^2$ sont stables pas v.
3. En déduire que $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ puis trouver X.

Exercice 61 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et f un endomorphisme de E dont la matrice dans une base $\mathcal{B}$ est A.

1. Montrer que $E = \ker(f^2) \oplus \ker(f - 2id)$.
2. Trouver un vecteur de $\ker(f^2)$ qui n'appartient pas à $\ker(f)$.
3. Trouver une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. Soit g un endomorphisme de E tel que $f = g^2$. Montrer que $\ker(f^2)$ est stable par g.
   Que peut-on en déduire ?

Exercice 62 **(IMT PSI 2019)** *[Solution]*
Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Exercice 63 **(ENSAM PSI 2017)** *[Solution]*
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Trigonaliser A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si M vérifie $M^2 = A$ alors $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1, 0, 1\}$ et $0 \in \mathrm{Sp}(M)$.
3. Estimer les dimensions des différents sous espaces propres et résoudre $M^2 = A$.

Exercice 64 **(Centrale PSI 2007)** *[Solution]*
Montrer que les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ sont des polynômes en A de degré au plus 2.

Exercice 65 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(A)$ soit triangulaire à coefficients diagonaux 2 à 2 distincts. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 66 **(Mines-Ponts PSI 2012)** *[Solution]*
Trouver un polynôme annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+1 \\ -1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ Donner la dimension de $\mathbb{C}[A]$.

Exercice 67 **(Mines-Télécom PSI 2018)** *[Solution]*
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ admettant 3 valeurs propres distinctes et $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), u \circ v = v \circ u\}$ le commutant de u.
1. Justifier que u est diagonalisable.
2. Déterminer $C(u)$ lorsque u est canoniquement associé à $\mathrm{diag}(1, 2, 3)$.
3. Montrer que $C(u) = \mathrm{Vect}\{id, u, u^2\}$

Exercice 68 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soient E un espace de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.
1. Montrer que $\varphi : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $g \in C(f)$. Montrer que les vecteurs propres de f sont aussi des vecteurs propres de g.
3. En déduire qu'il existe une base de vecteurs propres communs à f et g puis que g est un polynôme en f
4. En déduire la dimension de $C(f)$.

Exercice 69 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que $AB = BA$; on suppose que A possède n valeurs propres distinctes.
1. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$, $B = PD'P^{-1}$ avec D et D' diagonales.
2. On note d_i et d'_i les coefficients diagonaux de D et D'. Montrer que $\exists Q \in \mathbb{C}_{n-1}, \forall i \in [\![1, n]\!], Q(d_i) = d'_i$.
3. Montrer que B est un polynôme en A. Que peut-on en déduire sur le commutant de A ?
4. Est-ce encore vrai si les valeurs propres de A ne sont plus simples ?

Exercice 70 **(Centrale PSI 2016)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on cherche la dimension de E, où $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AMA = 0\}$
1. On suppose A diagonalisable. Montrer que $\dim(E) = \dim\{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), DND = 0\}$, où D est diagonale à expliciter ; en déduire $\dim(E)$ en fonction de n et de $\mathrm{rg}(A)$.
2. Est-ce encore vrai si A n'est pas diagonalisable ?
indication : par blocs avec $A = PJ_rQ^{-1}$.

Exercice 71 **(Centrale PSI 2018)** *[Solution]*
1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \in \mathbb{R}^n$ non nul ; montrer que E_X, ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont X est un vecteur propre, est un espace vectoriel.
2. Déterminer E_X et sa dimension.

Exercice 72 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Montrer que A est un polynôme en B ou B est un polynôme en A.
Qu'en est-il si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 3$ ou si A et B sont dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
indication : discuter sur le nombre de valeurs propres distinctes de A et sur sa diagonalisabilité.

VI Polynômes annulateurs

Exercice 73 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $(A + I_n)^2$.
3. Montrer que si P annule A alors les valeurs propres de A sont des racines de P. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A.
4. Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 74 **(CCP PSI 2008)** *[Solution]*

Trouver les valeurs propres possibles de M telle que $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis déterminer toutes les matrices M à l'aide de polynômes annulateurs appropriés.

Exercice 75 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Solution]*
Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = J$

1. Trouver un polynôme annulateur de J et diagonaliser J.
2. Trouver un polynôme annulateur de M et montrer que M est diagonalisable.
3. Montrer que les vecteurs propres de M sont aussi des vecteurs propres de J.
4. Déterminer M.

Exercice 76 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E de dimension finie tel que $u^3 = u$. Montrer que u^2 est un projecteur ; que dire de u si $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{Tr}(u)$?

Exercice 77 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$?
indication : calculer $(BA)^3$ puis distinguer $n \leqslant 2$ et $n \geqslant 3$.

Exercice 78 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$

1. Étudier $\ker(u) \cap \ker(u^2 + u + id)$
2. Montrer que $\ker(u^2 + u + id) = \mathrm{Im}(u)$ et $\mathbb{R}^n = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
3. Soit v l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(u)$ induit par u ; que représente le degré du polynôme caractéristique de v ?
4. Montrer que $0 \notin \mathrm{Sp}(v)$ et que $\mathrm{rg}(u)$ est pair.

Exercice 79 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$

1. Montrer que les valeurs propres de A sont racines de $X^3 - X^2 + X - 1$
2. Calculer $\det(A)$
3. Que dire de $\mathrm{Tr}(A)$?

Exercice 80 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A - 5I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$

Exercice 81 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 82 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + 9A = 0$, $n \geqslant 3$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$
2. A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$?
3. Montrer que si n est impair alors A n'est pas inversible.
4. Montrer que si A est symétrique réelle et non nulle alors A ne peut pas vérifier $A^3 + 9A = 0$

Exercice 83 **(Navale PSI 2022)** *[Solution]*
Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\mathrm{Tr}(M) = n$

Exercice 84 **(CCP MP 2010)** *[Solution]*
Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de trace 7 telles que $A^3 - 5A^2 + 6A = 0$.

Exercice 85 **(CCP PSI 2013)** *[Solution]*
Déterminer $\mathcal{X}_A$ pour $A \in \mathcal{GL}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = 8$.

Exercice 86 **(CCP PSI 2012)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = 10$, $\mathrm{Tr}(A) = -6$ et $A - I_3 \notin \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$. Exprimer A^{-1} comme un polynôme en A.

Exercice 87 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*
Soit A réelle, carrée, de trace nulle telle que $A^3 - 4A^2 + 4A = 0$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont racines de $X^3 - 4X^2 + 4X$.

2. Déterminer toutes les matrices A possibles

Exercice 88 **(TPE-EIVP PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $n \geqslant 2$; trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 - A^3 - A + I_n = 0$ et $A^2 - 3A + 2I_n = 0$

Exercice 89 **(ENSAM PSI 2016)** *[Solution]*

1. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = -I_n$ alors n est pair.

2. Montrer que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $B^2 - B + I_n = 0$ alors n est pair.

3. Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $C^3 - C^2 + C = 0$ alors $\mathrm{rg}(C)$ est pair.
indication : montrer que $\ker(C)$ *et* $\mathrm{Im}(C)$ *sont supplémentaires.*

Exercice 90 **(CCP PSI 2012)** *[Solution]*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_n = 0$.

1. M est-elle diagonalisable ? inversible ?

2. Donner $\mathrm{Tr}(M)$ et $\det(M)$ et montrer que n est pair.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = M$; A est-elle diagonalisable ?
On suppose que $n/2$ est impair. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{Z}$ et est impaire.

Exercice 91 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

1. Factoriser $P = X^5 - 4X^4 + 2X^3 + 8X^2 - 8X$

2. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P(M) = 0$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$

Exercice 92 **(Centrale PSI 2018)** *[Solution]*

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de A, matrice réelle de taille n, les valeurs propres de A sont racine sde P ; la réciproque est-elle vraie ?

2. Montrer que si $P = (X+3)(X^2+X+1)$ annule A, alors $\mathrm{Tr}(A)$ est un entier négatif.

3. Montrer que l'on peut trouver un polynôme de degré 3 tel que si P est annulateur de A, alors $\mathrm{rg}(A)$ est pair.

Exercice 93 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

1. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ dont $a = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est racine. En déduire la valeur de a et celle de $b = \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.
indication : vérifier que $z = e^{2i\pi/5}$ *est solution de* $z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} = 0$ *et réécrire cette équation en faisant apparaître la variable* $z' = z + z^{-1}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$ et telle que $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{Q}$. Montrer que n est un multiple de 4.

Exercice 94 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Déterminer le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(M) = 0$ et $2M^3 - M^2 - 13M + 5I_n = 0$.
indication : $P = (2X+5)\left(X - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

Exercice 95 **(CCP PC 2010)** *[Solution]*
Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + A + 4I_n = 0$ n'a pas de valeur propre réelle. En déduire que n est pair. Calculer $\det(A)$ et $\mathrm{Tr}(A)$.

Exercice 96 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M + M^{-1} = I_n$

1. Calculer $M^k + M^{-k}$ pour $k \in \{3, 5, 7\}$

2. Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donner une matrice diagonale semblable à M

3. Déterminer $M^k + M^{-k}$ pour tout entier k

Exercice 97 **(CCP PSI 2012)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^2 = {}^tA$. Déterminer un polynôme annulateur de A.
Montrer que si 0 est valeur propre de A alors A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 98 **(CCP PSI 2023)** *[Solution]*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P annulateur de A ; montrer que les valeurs propres de A sont des racines de P.

2. Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $A^2 + A^T = I_3$?
indication : trouver $\mathrm{Sp}(A)$ *puis vérifier A inversible et $A - I_3$ non inversible pour aboutir à une contradiction.*

Exercice 99 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$

1. Montrer que les valeurs propres de M sont racines de tout polynôme annulateur de M.

2. On suppose M symétrique ; montrer que M est diagonalisable et que $\det(M) \times \mathrm{Tr}(M) \neq 0$

3. Montrer que M est diagonalisable, même si M n'est pas symétrique.

4. Montrer que M est inversible si et seulement si $1 \notin \mathrm{Sp}(M)$

Exercice 100 **(CCP PSI 2007)** *[Solution]*
Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A(A-I_n)^2 = 0$ avec $(A-I_n)^2 \neq 0$ et $A(A-I_n) \neq 0$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 101 **(ENSEA PSI 2016)** *[Solution]*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, tel que $(f - id)^3 \circ (f - 2id) = 0$ et $(f - id)^2 \circ (f - 2id) \neq 0$. f est-il diagonalisable ?

Exercice 102 **(ENSAM PSI 2011)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\exists p \in \mathbb{N}^*, A^p = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.
indication : montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Tr}(A) = 2\cos\theta$.

Exercice 103 **(CCP PC 2011)** *[Solution]*
Soit $(M_j)_{1 \leqslant j \leqslant p} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^p$ telle que $M_j^2 = -I_n$ et, pour $j \neq k$, $M_j M_k = -M_k M_j$.

1. Trouver un polynôme annulateur de M_j, prouver qu'elle est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(M_j) \subset \{i, -i\}$.

2. Montrer que n est pair, que $\mathrm{Sp}(M_j) = \{i, -i\}$ et $\dim(E_i(M_j)) = \dim(E_{-i}(M_j))$.

3. Calculer $\det(M_j)$.

4. Déterminer une telle famille pour $n = 2$ et $n = 4$.

Exercice 104 **(CCP PSI 2012)** *[Solution]*
Soient A, B et C trois matrices carrées complexes d'ordre n telles que $A = B + C$, $A^2 = 3B + C$ et $A^3 = 5B + 6C$. Trouver un polynôme annulateur de A et montrer que ces matrices sont diagonalisables.

Exercice 105 **(Navale PSI 2023)** *[Solution]*
Soient $f, u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tels que : $f = \lambda u + \mu v$, $f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v$, $f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v$. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 106 **(Mines-Ponts PSI 2012)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$ et $A^2 - 2A$ soit diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable.
indication : polynôme annulateur et vérifier que -1 n'est pas valeur propre de $A^2 - 2A$.

Exercice 107 **(Mines-Ponts PC 2011)** *[Solution]*
Soit $A = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = 1$ si $i = j$, ou $j = i + 1$ ou $(i, j) = (1, n)$ et 0 sinon. Montrer que A est inversible si n est impair et que son inverse est un polynôme en A.

Exercice 108 **(Centrale PSI 2017)** *[Solution]*
Soit u endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie n.

1. Donner une relation entre $m_\lambda(u)$ et $\dim(E_\lambda(u))$, définir $\mathcal{X}_u$ et énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

2. Montrer que si $\mathcal{X}_u'(0) \neq 0$ alors $\ker(u) = \ker(u^2)$.

VII Polynôme caractéristique et autres polynômes

Exercice 109 **(Petites Mines PSI 2021)** *[Solution]*

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de la forme $P = X^n \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, on associe sa matrice compagnon :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

1. Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$
2. Déterminer le polynôme caractéristique de C_P.
3. Montrer que les espaces propres de C_P sont de dimension 1
4. Montrer que C_P est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples

Exercice 110 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*
Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent $1, 2, \dots, n$, tous les autres étant égaux à 1. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - i} = 1$.
En déduire que A admet n valeurs propres distinctes.

Exercice 111 **(ENSIIE PSI 2011)** *[Solution]*
Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p ($N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$) et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant avec N.

1. Donner le spectre et le polynôme caractéristique de N.
2. On suppose A inversible. Montrer que $A^{-1}N$ est nilpotente et en déduire $\det(A+N) = \det(A)$.
3. On ne suppose plus A inversible. Montrer $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = (A+N)^p$ et en déduire $\det(A+N) = \det(A)$.

Exercice 112 **(Mines-Ponts PSI 2014)** *[Solution]*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et (P) la propriété : $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{C}, \det(M + \lambda A) \neq 0$

1. Montrer que (P) est vraie si $A \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$; on pourra introduire le rang de A.
2. Montrer que (P) est fausse si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 113 **(Mines-Ponts PSI 2010)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Trouver les polynômes P tels que $P(A)$ soit nilpotente.
indication : trigonaliser et chercher une CNS sur les valeurs propres de $P(A)$ pour qu'elle soit nilpotente.

Exercice 114 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Montrer que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = P(M)$.

Exercice 115 **(Mines-Ponts PSI 2016)** *[Solution]*
On donne $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts, u, v_1, …,v_p des endomorphismes ($v_i \neq 0$) d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E tels que $\forall k \in [\![0, p]\!]\,, u^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k v_i$.

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) v_i$. En déduire que u est diagonalisable.
2. Montrer que $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de u et déterminer les polynômes annulateurs de u.
3. Montrer que v_i est le projecteur sur $E_{\lambda_i}(u)$ parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(u)$.

VIII Réduction simultanée

Exercice 116 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice A est la même dans toutes les bases.

1. Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $AP = PA$.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $B - \lambda I_n$ soit inversible. En déduire $AB = BA$.
3. Déterminer A. Comment appelle-t-on un tel endomorphisme f ?

Exercice 117 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*
Soit E un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour lequel on a $\forall A \in E, A \neq 0 \Rightarrow A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$

1. Soit A, B inversibles

a) Montrer que $x \mapsto \det(xA - B)$ est polynômiale et déterminer son degré

b) montrer qu'il existe un complexe k tel que $kA - B$ ne soit pas inversible

2. En déduire $\dim(E) \leqslant 1$

3. Trouver E

Exercice 118 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*
Soit G une partie de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ stable par produit et telle que $\forall A \in G, A^2 = I_n$ et $\forall (A,B) \in G^2, AB = BA$

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall A \in G, P^{-1}AP$ soit diagonale.
indication : raisonner par récurrence (forte) sur n on commençant par introduire les sous-espaces propres d'une des matrices de G.

2. En déduire que G est fini et $\mathrm{Card}(G) \leqslant 2^n$.

Exercice 119 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), BM = MA\}$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel

2. Déterminer les espaces propres de B. B est-elle diagonalisable ?

3. a) Montrer que B et A^T ont une valeur propre commune

b) En déduire $M \neq 0$ dans $\mathcal{E}$

c) Montrer que $\dim(\mathcal{E}) \geqslant 2$

4. Calculer $\dim(\mathcal{E})$.
indication : montrer $P(B)M = MP(A)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$

Exercice 120 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soient $A, B, U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $U \neq 0$ et $AU = UB$

1. Soit P annulateur de A ; montrer que les valeurs propres de A sont des racines de P

2. Montrer que $P(A)U = UP(B)$

3. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset$

Exercice 121 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$

1. Montrer que, si P annule A, alors les valeurs propres de A sont des racines de P.

2. Montrer que $\mathcal{X}_A(B)$ est inversible.

3. Montrer, pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AX = XB \Leftrightarrow X = 0$.

4. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = M$.

Exercice 122 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*
Soient f et g deux endomorphismes de E, espace vectoriel de dimension finie, qui vérifient $f^2 = g^2 = id$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. Montrer que f et g sont des automorphismes, $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(g) = \{-1, 1\}$ et que f est diagonalisable.

2. Montrer que g induit un isomorphisme de $\ker(f - id)$ sur $\ker(f + id)$ et en déduire que $\dim(E) = 2n$ est paire.

3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 123 **(Centrale PSI 2023)** *[Solution]*
Notons $E = \mathbb{C}^4$. Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ telles que $u \circ v = -v \circ u$ et $u^2 = v^2 = id_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(v) = 0$.
indication : montrer que u et v sont bijectifs.

2. Montrer que u et v sont diagonalisables et que leurs valeurs propres sont 1 et -1 de multiplicité 2.

3. Soit (x, y) une base de $E_1(u)$, montrer que $(v(x), v(y))$ est une base de $E_{-1}(u)$.

4. Soit $\mathcal{B} = (x, y, v(x), v(y))$, Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

5. Montrer de $u \circ v$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses sous espaces propres en fonction de x et y.

Exercice 124 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables. Montrer que $AB = BA$ si et seulement si $\exists C \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), \exists (P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2, A = P(C)$ et $B = Q(C)$.

Exercice 125 **(Centrale PSI 2013)** *[Solution]*
Soient A, B et C 3 matrices complexes de taille n telles que $AC = CB$.

1. Montrer qu'il existe P et Q inversibles telles que $C = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$ où $r = \mathrm{rg}(C)$.
2. Montrer que A et B ont au moins r valeurs propres communes comptées avec multiplicité.

Exercice 126 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $A^2 = B^2$ et $A^3 = B^3$.

1. Montrer que $A = B$.
   indication : introduire une base de vecteurs propres de A et montrer que ce sont aussi des vecteurs propres de B en distinguant si la vp de A associée est nulle ou pas.
2. Est-ce toujours vrai même si A et B non diagonalisables ?

Exercice 127 **(Centrale PSI 2015)** *[Solution]*
Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun. (distinguer les cas $\mathrm{Sp}(B) \neq \{0\}$ et $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$)
En déduire que A et B sont cotrigonalisables ($\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures).
Généraliser au cas où $AB \in \mathrm{Vect}\{A,B\}$.

IX Exercices théoriques

Exercice 128 **(Mines-Télécom PSI 2017)** *[Solution]*
Soient u et v deux endomorphismes de E un espace vectoriel.

1. Montrer que si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de $v \circ u$, alors λ est aussi valeur propre de $u \circ v$.
2. Supposons maintenant que E soit de dimension finie, montrer alors la proposition précédente pour $\lambda = 0$.
3. Pour $E = \mathbb{R}[X]$, on pose $u(P) = P'$ et $v(P)$ la primitive de P nulle en zéro. Calculer $\ker(u \circ v)$ et $\ker(v \circ u)$.

Exercice 129 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ avec $n \geqslant 1$

1. Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable
2. Montrer que la réciproque est fausse
3. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, montrer $\ker(u^2 - \lambda^2 id) = \ker(u - \lambda id) \oplus \ker(u + \lambda id)$
4. Montrer que la réciproque de a) est vraie si u est bijectif ou si $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Exercice 130 **(Mines-Télécom PSI 2018)** *[Solution]*

1. Soient A et B deux matrices réelles. Montrer que si l'une des deux est inversible alors $A + tB$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.
   indication : relier $\det(A+tB)$ avec $\mathcal{X}_{A^{-1}B}$ ou $\mathcal{X}_{AB^{-1}}$
2. On se donne $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux familles de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si l'une des deux est libre alors la famille $(a_1 + tb_1, \ldots, a_n + tb_n)$ l'est aussi sauf pour un nombre fini de valeurs de t.

Exercice 131 **(TPE-EIVP PSI 2018)** *[Solution]*
Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$.

1. On suppose $p = q$ et A inversible ; montrer que $\mathcal{X}_{AB} = \mathcal{X}_{BA}$.
   On admettra que ce résultat reste valable si A n'est pas inversible.
2. Si $p < q$, montrer que $\mathcal{X}_{BA} = X^{q-p}\mathcal{X}_{AB}$; on pourra justifier qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_q(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} A' & 0 \end{pmatrix} P$ avec $A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
   indication : écrire $B = P^{-1}B'$ en décomposant B' par blocs pour pouvoir faire les produits.
3. Si $p = 2$, $q = 3$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer AB.
   indication : calculer $(BA)^2$ puis déterminer $\ker(B)$ et $\mathrm{Im}(A)$

Exercice 132 **(AADN PSI 2012)** *[Solution]*

1. Montrer que si B et C sont deux matrices complexes semblables alors $xI_n - B$ et $xI_n - C$ sont aussi semblables.
   En est-il de même pour $(xI_n - B)^{-1}$ et $(xI_n - C)^{-1}$ (si elles existent) ?

2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $P_A(x) = \det(xI_n - A)$ et P_A' son polynôme dérivé. Montrer que si x n'est pas une valeur propre de A alors $\mathrm{Tr}\left((xI_n - A)^{-1}\right) = \dfrac{P_A'(x)}{P_A(x)}$.
indication : décomposer la fraction en élément simples et trigonaliser A.

Exercice 133 **(CCP PSI 2012)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall k \in [\![1, n]\!]\,, \mathrm{Tr}(A^k) = 0$.

1. En calculant $\mathrm{Tr}(\mathcal{X}_A(A))$, montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ et que A est semblable à A' dont la dernière colonne est nulle.

2. On note B la matrice extraite de A' en enlevant la dernière ligne et la dernière colonne. Montrer que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]\,, \mathrm{Tr}(B^k) = 0$ et en déduire que $A^n = 0$.

Exercice 134 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite à diagonale propre si $\mathcal{X}_A = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - a_{k,k})$. On note E_n l'ensemble des matrices réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

1. Soit pour $M \in E_n$ antisymétrique.

a) Calculer χ_M. Que vaut M^n ?

b) Montrer que M^2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que $M^2 = 0$.

c) Calculer $\mathrm{Tr}(M^2)$ en fonction des coefficients de M. En déduire que $M = 0$.

2. Soit un sous-espace F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $F \subset E_n$. Montrer que $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 135 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} > 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]\,, \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.

Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, X un vecteur propre associé et k tel que $|x_k| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.

1. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$ et $|a_{k,k} - \lambda| \leqslant \displaystyle\sum_{j\neq k} a_{k,j}$.
indication : commencer par la deuxième inégalité

2. On suppose $|\lambda| = 1$, trouver λ.

Exercice 136 **(Centrale PSI 2010)** *[Solution]*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]\,, |a_{i,i}| > \displaystyle\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.
indication : regarder le système $AX = 0$ et une ligne bien choisie.

2. Montrer que $|\det(A)| \geqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left[|a_{i,i}| - \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\right]$

X Matrices par blocs

Exercice 137 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B l'est et déterminer les valeurs propres de B en fonction de celles de A.

Exercice 138 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Montrer que, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0)\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

2. Déterminer $\mathrm{rg}(B)$ en fonction de $\mathrm{rg}(A)$.

3. On suppose A diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable.
indication : distinguer les cas $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

4. Étudier la réciproque.

Exercice 139 **(Centrale PSI 2014)** *[Solution]*

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$ (*indication : diagonaliser* $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.)

2. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Exercice 140 **(ENSAM PSI 2011)** *[Solution]*

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} M & M \\ M & M \end{pmatrix}$. Montrer que $A \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et que A est diagonalisable si et seulement si M l'est.

Exercice 141 **(Mines-Ponts PSI 2011)** *[Solution]*

A quelle condition sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 142 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*

1. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton

2. Montrer que si A et B sont semblables alors $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$; calculer M^k, pour $k \in \mathbb{N}$.

4. Calculer $P(M)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$, en fonction de $P(A)$ et $P'(A)$

5. Montrer que si M est diagonalisable alors A l'est aussi.

6. Montrer que si M est diagonalisable alors A est nulle

Exercice 143 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*

1. Montrer que si U et V sont semblables alors $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables, si $R \in \mathbb{R}[X]$.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$; calculer $P(M)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$, en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B

3. Montrer que si A est diagonalisable et $B = 0$ alors M est diagonalisable.

4. Montrer que si M est diagonalisable alors A est diagonalisable et B est nulle

Exercice 144 **(Centrale PSI 2018)** *[Solution]*

1. Soit F définie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ par $F(A,B) = \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix}$ si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que $F(A_1A_2, B_1B_2) = F(A_1, B_1)F(A_2, B_2)$

2. Donner $\operatorname{Tr} F(A,B)$, $\det F(A,B)$ et $\operatorname{rg} F(A,B)$ en fonction de $\operatorname{Tr}(A)$, $\operatorname{Tr}(B)$, $\det(A)$, $\det(B)$, $\operatorname{rg}(A)$ et $\operatorname{rg}(B)$.

3. Donner une condition suffisante sur A et B pour que $F(A,B)$ soit diagonalisable.

Exercice 145 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de B en fonction du rang de A. En déduire que A est inversible si et seulement si B est inversible.

2. Déterminer $\mathcal{X}_B$ en fonction de $\mathcal{X}_A$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A et B ?
indication : calculer $\mathcal{X}_B(\lambda)$ en supposant $\lambda \neq 0$ pour commencer et faire des manipulations par blocs sur le déterminant.

3. Montrer que si A est inversible et admet n valeurs propres distinctes alors B est diagonalisable.

4. B est-elle diagonalisable si A n'est plus supposée inversible ?

5. Si B est diagonalisable, montrer que A l'est aussi.

6. Si A est diagonalisable, montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est inversible.

Exercice 146 **(Centrale PSI 2023)** *[Solution]*

Soit $A \in \}_n(\mathbb{R})$ et B la matrice par blocs définie par : $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer $\mathcal{X}_B$ en fonction de $\mathcal{X}_A$.

2. Montrer que si A diagonalisable alors B est diagonalisable.

Exercice 147 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$. On suppose B diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable et $A - I_n$ est inversible.
Étudier la réciproque.
indication : elle est vraie : on peut construire une base de vecteurs propres de B à partir d'une base de vecteurs propres de A.

Exercice 148 **(ENSAM PSI 2009)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Exprimer le rang de $M = \begin{pmatrix} A & -I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$ en fonction de celui de A. M est-elle diagonalisable ?

Exercice 149 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ où $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; calculer M^2.
2. Montrer que si $P(M) = 0$ alors les valeurs propres de M sont des racines de P.
3. On suppose $B = A^{-1}$; justifier que M est diagonalisable et préciser les dimensions des espaces propres de M.
4. On suppose $A = I_n = -B$; justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et préciser les dimensions des espaces propres de M

Exercice 150 **(CCP PSI 2017)** *[Solution]*

1. Soient $(A, B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})^2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que N est inversible et déterminer N^{-1}.
2. Calculer N^2 et $P(N^2)$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$.
3. Si N est diagonalisable, AB l'est-elle ? Étudier la réciproque.
4. (*Complément :*) montrer que $M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si M^2 l'est et $\ker(M) = \ker(M^2)$.

Exercice 151 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables.

1. Pour $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, trouver l'inverse de $P = \begin{pmatrix} I_n & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$
2. On suppose $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$; montrer que $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire $C = DB - AD$ avec $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et en déduire que $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
3. Montrer la réciproque.
indication : commencer par le faire lorsque A et B sont diagonales en trouvant C telle que $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A - \lambda I_n & C \\ 0 & B - \lambda I_n \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} A - \lambda I_n & 0 \\ 0 & B - \lambda I_n \end{pmatrix}$ *soient différents, avec $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B)$.*

Exercice 152 **(ENSEA PSI 2014)** *[Solution]*
Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix}$

1. Montrer que si A est semblable à D alors M est semblable à $\begin{pmatrix} D & I_n \\ I_n & D \end{pmatrix}$.
2. Déterminer les éléments propres de M en fonction de ceux de A. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 153 **(Centrale PSI 2012)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$; $B = \begin{pmatrix} A & A^3 \\ A^{-1} & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? (commencer par $n = 1$)
indication : en diagonalisant B dans le cas $n = 1$, trouver une matrice diagonale par blocs semblable à A.

Exercice 154 **(Mines-Ponts PSI 2011)** *[Solution]*
Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on pose $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{X}_C = \mathcal{X}_{A+B} \times \mathcal{X}_{A-B}$.

Exercice 155 **(Centrale PSI 2014)** *[Solution]*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{rg}(B)$ en fonction de $\mathrm{rg}(A)$ puis étudier la diagonalisabilité de B en fonction de celle de A.

XI Endomorphismes matriciels

Exercice 156 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*

1. Montrer que f qui à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe $\begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$ est un endomorphisme et déterminer ses éléments propres.
2. f est-il diagonalisable ? Inversible ?

Exercice 157 **(CCP PSI 2013)** *[Solution]*
Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(M) = M + 2\,{}^tM$. Est-il diagonalisable ? Calculer sa trace et son déterminant.

Exercice 158 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose : $\forall M \in E, u(M) = aM + bM^T$.

1. Montrer que u est un endomorphisme.
2. Montrer que u est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
3. Calculer $\operatorname{Tr} u$ et $\det u$.

Exercice 159 **(CCP PSI 2017)** *[Solution]*
Donner les éléments propres de $f : M \mapsto M + \operatorname{Tr}(M)I_n$. Est-il diagonalisable ? Bijectif ? Si oui, calculer f^{-1}.

Exercice 160 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, non nulles, et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto M + \operatorname{Tr}(AM)B$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer $\dim(\ker(\varphi))$ et $\dim(\operatorname{Im}(\varphi))$.
3. Montrer que si M est un vecteur propre de φ associé à $\lambda \neq 1$, alors M est colinéaire à B.
4. Déterminer les valeurs propres de φ ; φ est-il diagonalisable ?

Exercice 161 **(Mines-Ponts PSI 2010)** *[Solution]*
Montrer que f_A défini par $f_A(M) = \operatorname{Tr}(A)M - \operatorname{Tr}(M)A$, où A est une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace non nulle, est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quel est son noyau, son image ? f_A est-il diagonalisable ? Donner ses éléments propres.

Exercice 162 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ et $\varphi : X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mapsto AXA$

1. Donner les valeurs propres de A, A est-elle diagonalisable ?
2. Donner les valeurs propres de φ, φ est-il diagonalisable ?
3. Déterminer $\operatorname{Im}(\varphi)$.
   indication : écrire $A = CC^T$ avec C une colonne

Exercice 163 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*

1. Donner une CNS pour qu'une matrice soit diagonalisable.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 5A + 6I_n = 0$; montrer que A est diagonalisable ; que dire de ses valeurs propres ?
3. Soient D diagonale semblable à A et $f : M \mapsto DM + MD$; montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable (on pourra décomposer les matrices par blocs).
4. Montrer que $g : M \mapsto AM + MA$ est diagonalisable.

Exercice 164 **(Centrale PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $S = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que S est semblable à une matrice diagonale à préciser et à une matrice de diagonale nulle
2. Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{diag}(1,2)M - M\operatorname{diag}(1,2)$. Déterminer $\operatorname{Im}\phi$ et en déduire $\exists (C, D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), S = CD - DC$
3. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 25 & 11 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs possibles de x et y.
   indication : Calculer $\operatorname{Tr}(AB)$, $\operatorname{Tr}(BA)$, $\det(AB)$ *et* $\det(BA)$. *Vérifier que pour les valeurs de x, y trouvées, AB et BA sont semblables à la même matrice diagonale et construire A et B à partir des matrices de passage et de la matrice diagonale.*

Exercice 165 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$

1. Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $A^2 = A$ alors f_A est un projecteur.
3. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable
4. Construire une matrice propre de f_A à partir d'un vecteur propre de A.
5. Faire de même dans le sens inverse et conclure $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f_A)$
   indication : introduire les colonnes d'un vecteur propre de f_A.

Exercice 166 **(ENSAM PSI 2014)** *[Solution]*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables et $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AX - XB$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que ${}^tB$ est diagonalisable.
3. Soient $(U_1, \ldots, U_n)$ et $(V_1, \ldots, V_n)$ des bases de vecteurs propres de A et ${}^tB$. On pose $M_{i,j} = U_i\,{}^tV_j$.
   Calculer $f(M_{i,j})$ et en déduire que f est diagonalisable.

Exercice 167 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $A = AB - BA$ et $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto XB - BX$

1. Montrer que f est un endomorphisme
2. Calculer $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(A^k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$
3. Montrer que $f(A^k) = kA^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$
4. En déduire que A est nilpotente.
   indication : raisonner par l'absurde et s'intéresser à $\mathrm{Sp}(f)$

Exercice 168 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit s une symétrie de E. Soit $\phi : u \in \mathcal{L}(E) \longmapsto \phi(u) = \dfrac{1}{2}(u \circ s + s \circ u)$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer un polynôme annulateur de ϕ.
3. ϕ est-il diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

Exercice 169 **(Mines-Ponts PSI 2012)** *[Solution]*
Soit f défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $f(M) = (C_1 + C_2, C_2 + C_3, \ldots, C_{n-1} + C_n, C_n + C_1)$, où $C_n, \ldots, C_n$ sont les colonnes de M.
f est-il diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

XII Endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$

Exercice 170 **(CCP PSI 2013)** *[Solution]*
Déterminer les éléments propres de $\phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto 2XP - (X^2 - 1)P'$.
indication : commencer par chercher le degré des éventuels vecteurs propres.

Exercice 171 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $f : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto (X + 1)P'(X) - (bX^2 + X - 1)P(0)$, $b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique.
2. Montrer que le polynôme caractéristique de f induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3. f est-il diagonalisable ?

Exercice 172 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f(P) = (X - a)P' + P - P(a)$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer le noyau, l'image et les éléments propres de f.

Exercice 173 **(Centrale PC 2015)** *[Solution]*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients juste au dessus de la diagonale sont $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}$, ceux juste en dessous $\dfrac{n-1}{n}, \ldots, \dfrac{2}{n}\dfrac{1}{n}$, les autres étant nuls. En considérant l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ canoniquement associé à M, dire si M est diagonalisable.

Exercice 174 **(ENTPE-EIVP PSI 2015)** *[Solution]*
Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver les éléments propres de $\phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto (X - a)P'$.
Quels sont les polynômes divisibles par leur dérivée ?

Exercice 175 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par X^4-1.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$
2. Montrer que φ est diagonalisable et donner ses éléments propres
3. Calculer $\mathrm{Tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

Exercice 176 **(TPE-EIVP PSI 2019)** *[Solution]*
Soient $E=\mathbb{C}_{n-1}[X]$, F et G de degrés n avec G scindé à racines simples $a_1,\dots,a_n$.

1. Montrer que φ qui à $P\in E$ associe le reste de la division euclidienne de FP par G est un endomorphisme de E.
2. On pose $L_i=\displaystyle\prod_{j\neq i}\frac{X-a_j}{a_i-a_j}$. Montrer que $(L_1,\dots,L_n)$ est une base de E.
3. φ est-il diagonalisable ?

Exercice 177 **(ENSEA-ENSIIE PSI 2013)** *[Solution]*
Soit ϕ défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P)=\dfrac{1}{2^{n/2}}(1+X)^nP\left(\dfrac{1-X}{1+X}\right)$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Résoudre l'équation $\phi(P)=Q$. Montrer que ϕ est un automorphisme et déterminer ϕ^{-1}.
3. En déduire que ϕ est diagonalisable.

Exercice 178 **(ENSAM PSI 2007)** *[Solution]*
Soit u défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P)(x)=e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t}P(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que u est un endomorphisme et donner sa matrice dans la base canonique. u est-il diagonalisable ?

Exercice 179 **(Centrale PSI 2013)** *[Solution]*
Soit $A\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t\neq 0$ et $u:P\mapsto A\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t-P\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que u définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$; u est-il diagonalisable ?

Exercice 180 **(Mines-Ponts PSI 2013)** *[Solution]*

1. Donner les éléments propres de $\phi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ défini par $\phi(P)=P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)$. On pourra utiliser $(X+a)^k$.
2. Idem pour $\phi\in\mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ défini par $\phi(f)(x)=f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$. On pourra utiliser la suite $u_0=x$, $u_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{2}$.

Exercice 181 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*
Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$: $P\mapsto(P(0),P'(0),P(-1),P'(-1))$.

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Déterminer $\ker\phi$. L'application est-elle bijective ?
3. Exprimer M, matrice de ϕ dans la base canonique.
4. a) Montrer que M est diagonalisable.
   b) Donner un polynôme annulateur de M.
   c) M est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
5. a) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que $\phi(Q)=(0,1,0,1)$.
   b) Déterminer Q.
   c) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^n k^2$.
   indication : comparer X^2 et $Q(X)-Q(X-1)$

XIII Endomorphismes sur les espaces de fonctions

Exercice 182 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $\pm\infty$. Déterminer les éléments propres de T qui, à $f\in E$ associe $T(f)$, définie par $T(f)(x)=f(x+1)$.

Exercice 183 **(Mines-Ponts PSI 2016)** *[Solution]*
Soit $D(f):x\mapsto xf'(x)$. Montrer que D est un endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$; trouver son noyau et ses éléments propres.

Exercice 184 **(CCP PSI 2015)** *[Solution]*
Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et ϕ défini sur E par $\phi(f)(x) = f'(x) - xf(x)$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer ses éléments propres puis $\ker(\phi^2)$.

Exercice 185 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et φ définie sur E par $\varphi(f) : x \in [0,1] \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \in]0,1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
   indication : DL de f avec Taylor-Young
2. Montrer que $0 \notin \mathrm{Sp}(\varphi)$
3. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ et déterminer $E_1(\varphi)$.
   indication : montrer qu'un vecteur propre est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$
4. Déterminer les autres valeurs propres et sous-espaces propres de φ.

Exercice 186 **(Mines-Ponts PSI 2014)** *[Solution]*
Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $f \in E$. On pose $T(f) : x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t)$.
Montrer que T est un endomorphisme de E. Trouver ses éléments propres.

Exercice 187 **(CCP PSI 2007)** *[Solution]*
Montrer que u défini par $u(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Calculer $u(f)(0)$. Trouver les fonctions f telles que $u(f)$ soit constant.
Déterminer les valeurs propres de u.

XIV Applications et autres

Exercice 188 **(CCP PSI 2012)** *[Solution]*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Déterminer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$ et en déduire u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et n.

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16^n \end{pmatrix} P^{-1}$,
$C^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n - 1 \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & n4^{n-1} \\ 0 & 4^n & n4^{n-1} \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1}$.

Exercice 2 *[sujet]* $A = P\mathrm{diag}(-1,-1,2)P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 *[sujet]* **1.** $C_2 = 2C_1$ et $C_3 = -3C_1 \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(A) = 1$

2. $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $m_0(A) \geqslant \dim(\ker(A)) = 2$. Comme $\mathrm{Tr}(A) = -7$, on a $\mathcal{X}_A = X^2(X+7)$

3. $E_0(A) = \mathrm{Vect}\{(2,-1,0),(3,0,1)\}$ et $E_{-7}(A) = \mathrm{Vect}\{(1,2,4)\}$

4. DZ

Exercice 4 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_A = (X-2)^3$

2. Non car sinon elle serait semblable à $2I_3$ et $P2I_3P^{-1} = 2I_3 \neq A$.

3. $u = (1,2,0)$, $v = (0,3,-1)$ et $w = (0,0,1)$ par ex

4. $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ si $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5 *[sujet]* $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n - 1 \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

Exercice 6 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_A = (X-1)(X-2)^2$ et $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 2$

2. $E_2(A) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1)\}$ et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\{(1,-1,1)\}$

3. $u = (1,0,1)$ et $v = (0,1,0)$ puis $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$ et $A^k = PT^kP^{-1}$

Exercice 7 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_M = (X-1)(X^2 - 2\alpha X + \alpha^2 - 1)$ donc $\mathrm{Sp}(M) = \{1, \alpha - 1, \alpha + 1\}$

2. M_α est sym réelle. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(1, \alpha+1, \alpha-1)$ (distinguer $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$ pour les dimensions des espaces propres)

3. $\det(M_\alpha) = \alpha^2 - 1$

4. $\ker(M_1) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1)\}$ et $\mathrm{Im}(M_1) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,0)\}$. Puis $\ker(M_{-1}) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1)\}$ et $\mathrm{Im}(M_{-1}) = \mathrm{Vect}\{(-1,0,1),(0,1,0)\}$

Exercice 8 *[sujet]* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A - I_3) = 2$ donc $\{0,1\} \subset \mathrm{Sp}(A)$; comme $\mathrm{Tr}(A) = 1$, $\mathcal{X}_A = X^2(X-1)$ donc A n'est pas DZ puisque $\dim(E_0(A)) = 1$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Exercice 9 *[sujet]* $\mathcal{X}_A = X(X-1)(X-a)$; si $a \notin \{0,1\}$ $\mathcal{X}_A$ est SARS donc A est DZ, pour $a = 0$ $\mathrm{rg}(A) = 2$ donc pas DZ et pour $a = 1$, $\mathrm{rg}(A - I_3) = 1$ donc pas DZ : $\Omega = \{0,1\}$.
Pour $a = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ et pour $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

Exercice 10 *[sujet]* On a $\mathcal{X}_M = (X-1)[(X-1)^2 + z]$ SARS si $z \neq 0$ donc M est DZ. Pour $z = 0$ la seule vp est 1 donc si M était DZ, on aurait $M = PI_3P^{-1} = I_3$, absurde. M est DZ si et seulement si $z \neq 0$.

Exercice 11 *[sujet]* On a $\mathcal{X}_A = (X+a)(X+b)(X-a-b)$; si $a \neq b$ et $-a \neq a+b$ et $-b \neq a+b$ alors $\mathcal{X}_A$ est SARS donc A est DZ. Si $a = b \neq 0$, on vérifie $\mathrm{rg}(A + aI_3) = 1$ donc A est DZ. Si $2a + b = 0$ et $a \neq 0$ on vérifie $\mathrm{rg}(A + aI_3) = 2$ donc A n'est pas DZ (idem si $a + 2b = 0$ et $b \neq 0$). Enfin, si $a = b = 0$ A est nulle.

Exercice 12 *[sujet]* $\mathcal{X}_A = X^3 - aX - a$ donc $\mathcal{X}'_A = 3X^2 - a$. Si $a < 0$ alors $\mathcal{X}_A$ est strictement croissant sur $\mathbb{R}$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$ et A ne peut pas être DZ car sinon on aurait $A = \lambda I_3$. Si $a = 0$ alors $\mathcal{X}_A = X^3$ donc A ne peut pas non plus être DZ. Si $a > 0$, $\mathcal{X}_A\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) < 0$ et $\mathcal{X}_A\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = a\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - 1\right)$ donc $\mathcal{X}_A$ est SARS si et seulement si $a > \frac{27}{4}$; on en déduit A DZ si $a > \frac{27}{4}$, par contre si $0 < a \leqslant \frac{27}{4}$, $\mathcal{X}_A$ n'est pas SARS et comme $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) \geqslant 2$ donc $\dim(E_\lambda(A)) \leqslant 1$ et A ne peut pas être DZ. Ainsi, A est DZ si et seulement si $a > \frac{27}{4}$.

Exercice 13 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_A = (X-1)(X-2)(X-3)$

2. $A^n = \left(\frac{3^n+1}{2} - 2^n\right)A^2 + \left(2^{n+2} - \frac{3^{n+1}+5}{2}\right)A + (3^n - 3\times 2^n + 3)\, I_3$

Exercice 14 *[sujet]* **1.** $A = aI_3 + cJ + bJ^2$

2. $\mathcal{X}_J = X^3 - 1$ est SARS

3. $J = P\mathrm{diag}(1, j, j^2)$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ donc $A = P\mathrm{diag}(a+b+c, a+cj+bj^2, a+cj^2+bj)P^{-1}$

Exercice 15 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_M = (X-b)(X-a-c)(X-a+c)$

2. $\ker(M(a,0,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ et $\ker(M(a,b,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1)\}$

3. $det(M(a,b,c)) = b(a-c)(a+c)$. Si $b = 0$ et $|a| \neq |c|$ $\ker(M(a,0,c)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1)\}$ et $\mathrm{Im}(M(a,b,c)) = \mathrm{Vect}\{(a,0,c),(c,0,a)\}$. Si $b = 0$ et $a = c$, $\ker(M(a,0,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ et $\mathrm{Im}(M(a,0,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1)\}$. Si $b = 0$ et $a = -c$, $\ker(M(a,0,-a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ et $\mathrm{Im}(M(a,0,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1)\}$. Si $b \neq 0$ et $a = c$, $\ker(M(a,b,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1)\}$ et $\mathrm{Im}(M(a,b,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,0)\}$. Si $b \neq 0$ et $a = -c$, $\ker(M(a,b,-a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1)\}$ et $\mathrm{Im}(M(a,b,a)) = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$.

4. $M(a,b,c)$ est DZ car symétrique réelle et $M(a,b,c) = P\mathrm{diag}(b, a+c, a-c)P^{-1}$ avec $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ donc $P^{-1} = {}^tP$

Exercice 16 *[sujet]* **1.** M est symétrique réelle

2. $R = aI_3 + bM = P(aI_3 + bD)P^{-1}$ si $M = MDP^{-1}$ donc R est DZ

3. $\mathrm{rg}(M + I_3) = 1$ donc $m_1(M) \overset{\mathrm{DZ}}{=} \dim(E_1(M)) = 2$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$ donc $\mathcal{X}_M = (X-1)^2(X-2)$. En DZ, on trouve $u_n = 2\times 1^n + 1\times 2^n \in \mathbb{N}$ et $\lim u_n = +\infty$.

4. $v_n = 2\times(a-b)^n + 1\times(a+2b)^n$ donc (v_n) CV si et seulement si $\left\{\begin{array}{c} |a-b| < 1 \text{ ou } a-b = 1 \\ \text{et} \\ |a+2b| < 1 \text{ ou } a+2b = 1 \end{array}\right.$

Exercice 17 *[sujet]* $\mathcal{X}_A = (X-1)^2(X-2)$ donc A est DZ si et seulement si $\mathrm{rg}(A - I_3) = 1$ ce qui est vrai si et seulement si $a = 0$. Dans ce cas $(X-1)(X-2)$ annule A donc $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$.

Exercice 18 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_A = (X-1)(X-2)(X-n)$

2. Si $n \notin \{1,2\}$ A est DZ ; si $n = 1$, $\mathrm{rg}(A - I_3) = 2$ donc non DZ ; si $n = 2$, $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 1$ donc DZ

Exercice 19 *[sujet]* $\mathcal{X}_A = (X+1)^3$ et $A \neq I_3$ donc A_m n'est pas DZ.

Exercice 20 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_A = (X-1)(X+m-1)^2$. Si $m = 0$ alors $\mathrm{Sp}(A_0) = \{1\}$ et $E_1(A_0) = \mathrm{Vect}\{(0,1,0),(1,0,1)\}$. Sinon, $\mathrm{Sp}(A_m) = \{1, 1-m\}$; $E_1(A_m) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$ et $E_{1-m}(A_m) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1)\}$ sauf pour $m = 2$ où $E_{-3}(A_2) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(1,1,0)\}$

2. A_m est DZ si et seulement si $m = 2$ et inversible si et seulement si $m \neq 1$

3. Pour $m = 2$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 21 *[sujet]* **1.** En développant directement le déterminant par la première colonne, on trouve $D_{n+2} = 2\cos\theta D_{n+1} - D_n$ puis le résultat donné par récurrence sur n (double)

2. Si $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ alors $2\cos\theta_k$ est une vp de A_n ; ces vp sont distinctes puisque $\theta_k \in]0,\pi[$ sur lequel cos est strictement décroissante donc bijective. A_n possède n vp distinctes donc est DZ.

Exercice 22 *[sujet]* **1.** $u_n = \alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)$ donc $E = \mathrm{Vect}\{(\sin(n\theta)), (\cos(n\theta))\}$ est de dimension 2

2. $u_0 = u_{p+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta\cos((p+1)\theta) = 0 \end{cases}$ donc il existe une telle suite si et seulement si $\theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{2(p+1)}$ avec $k \in [\![0,p]\!]$

3. On vérifie que si on pose $X = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ alors la suite (u_n) est dans E et doit vérifier $u_0 = u_{p+1} = 0$ donc on a une solution non nulle si et seulement si $\lambda = 2\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2(p+1)}$ avec $k \in [\![1,p]\!]$ ce qui donne p valeur propres distinctes (car cos est strictement décroissante sur $]0,\pi[$). On en déduit que $\mathcal{X}_A$ est SARS donc A est DZ et que ses espaces propres sont des droites (engendrées pas les suites (u_n) de E avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ pour les différentes valeurs de θ précédentes)

Exercice 23 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_f = (X-1)^2(X-2)^2$ donc f est DZ si et seulement si $\mathrm{rg}(f - id) = \mathrm{rg}(f - 2id) = 2$ ce qui est le cas si et seulement si $a = b + c$.

2. Dans ce cas, $P = (X-1)(X-2)$ annule f et on aura $f^n = \alpha f + \beta id$ si $R = \alpha X + \beta$ est le reste de la division euclidienne de X^n par P.

Exercice 24 *[sujet]* **1.** symétrique réelle

2. $\mathrm{Sp}(A_2) = \left\{\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

3. Successivement : $C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour $j \geqslant 2$ puis développer par rapport à C_n ; le deuxième déterminant se ramène à un déterminant diagonal après dvt par rapport à la dernière ligne

4. $(-1)^{n-k}P_n(k) = (n-k-1)(-1)^{n-1-k}P_{n-1}(k)$ si $k \in [\![0,n-2]\!]$ donne le résultat par récurrence si $k \in [\![0,n-2]\!]$ et $P_n(n-1) = -(n-1)! < 0$. Cela veut dire que P_n change de signe sur tout intervalle de la forme $]k,k+1[$ pour $k \in [\![0,n-2]\!]$ donc (TVI) s'annule au moins une fois sur ces $n-1$ intervalle.

5. De plus $P_n(n-1) < 0$ et $P_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc P_n s'annule aussi une fois sur $]n-1,+\infty[$. P_n est de degré n et possède au moins n racines distinctes donc est SARS

Exercice 25 *[sujet]* **1.** On effectue $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \geqslant 2$ (il n'y aura plus de t dans les autres lignes que L_1) et si on développe par rapport à L_1, Δ est affine. Il existe α, β tels que $\Delta(t) = \alpha t + \beta$; on a $\Delta(-c) = (a-c)^n$ et $\Delta(-b) = (a-b)^n$ donc $\begin{cases} -\alpha c + \beta = (a-c)^n \\ -\alpha b + \beta = (a-b)^n \end{cases}$ on trouve alors $\alpha = \dfrac{(a-b)^n - (a-c)^n}{b-c}$ et $\beta = \dfrac{b(a-c)^n - c(a-c)^n}{b-c}$ puis on en déduit $\mathcal{X}_M = \dfrac{-b(X-a+c)^n + c(X-a+b)^n}{-b+c}$

2. $\mathcal{X}_M(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\lambda - a + b}{\lambda - a + c}\right)^n = \dfrac{b}{c}$, soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^n = \dfrac{b}{c}$; on trouve alors $\lambda = \dfrac{a - b + (c-a)\delta_k}{1 - \delta_k}$ avec $\delta_k = \delta e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 1$ car $\delta_k^n = \dfrac{b}{c} \neq 1$. On vérifie que ces valeurs de λ (pour $k \in [\![0,n-1]\!]$) sont 2 à 2 distinctes donc $\mathcal{X}_M$ est SARS et M est DZ

Exercice 26 *[sujet]* On vérifie $\mathrm{rg}(A) = 2$ et $E_0(A) = \mathrm{Vect}\{E_{2i+1} - E_1, E_{2i+2} - E_2, 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$ puis $AX = nX$ si $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_{2i}$ ou $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_{2i-1}$ donc A est bien DZ.

Exercice 27 *[sujet]* On vérifie $\mathcal{X}_A = X^n - \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \alpha_i$. S'il existe i tel que $\alpha_i = 0$ alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ donc si A est DZ si et seulement si $A = 0$. Sinon $\mathcal{X}_A$ est SARS sur $\mathbb{C}$ et les vp de A sont les racines $n^{\text{ème}}$ de $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \alpha_i$. Un vecteur propre associé à un tel λ est $\left(1, \dfrac{\alpha_1}{\lambda}, \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\lambda^2}, \ldots, \dfrac{\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}}{\lambda^{n-1}}\right)$.

Exercice 28 *[sujet]* **1.** Si $x_n = 0$ alors la dernière ligne du système $AX = \lambda X$ donne $a_{n-1}x_{n-1} = 0$ donc $x_{n-1} = 0$ puis $x_i = 0$ par récurrence descendante

2. Si $\dim(E_\lambda(A)) \geqslant 2$, on prend deux vecteurs propres X, Y linéairement indépendants ; le $x_nY - y_nX$ est alors un vecteur propre dont la dernière coordonnée est nulle, ce qui est absurde avec Q1

3. A est sym réelle donc DZ, $m_\lambda(A) = \dim(E_\lambda(A)) = 1$ donc $\mathcal{X}_A$ est SARS

Exercice 29 *[sujet]* **1.** a) $M \in A \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & -\alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ donc on vérifie (par $\mathbb{R}$-linéarité de la conjugaison) que A est un $\mathbb{R}$-ev puis (avec $\beta = a + ib$), on trouve $A = \text{Vect}_\mathbb{R}\{E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2} - E_{2,1}, iE1, 2 + iE_{2,1}\}$ donc $\dim_\mathbb{R}(A) = 3$

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in A$ mais $iM = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \notin A$

2. $M \in A \cap B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + |\beta|^2 = 1 \\ \alpha\overline{\beta} = 0 \\ -\alpha^2 + |\beta|^2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha = 0$ et $\beta = e^{i\theta}$ donc $A \cap B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ -e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

3. On vérifie $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \\ \alpha\overline{\gamma} + \beta\overline{\delta} = 0 \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta = \overline{\alpha} \\ \gamma = -\overline{\beta} \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \end{array} \right.$ On a donc $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. On a alors $\mathcal{X}_M = X^2 - 2X\,\text{Re}(\alpha) + 1$, $\Delta = 4(\text{Re}(\alpha)^2 - 1)$ et comme $\text{Re}(\alpha)^2 \leqslant |\alpha|^2 = 1 - |\beta|^2$, si $\beta \neq 0$, on a $\Delta \neq 0$ donc M est DZ. Reste les cas $\beta = 0$ qui sont évidents car M est déjà diagonale.

Exercice 30 *[sujet]* **1.** Comme $a \neq 0$, $\ker(u - id) = \ker(f)$ est un hyperplan donc $\dim(E_1(u)) = n - 1$.

2. u est donc DZ si et seulement si u admet une autre vp λ ; si $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \neq 1$ alors $x \in \text{Vect}\{a\}$ donc u est DZ si et seulement si a est vecteur propre de u pour une valeur propre autre que 1 donc si et seulement si $f(a) \neq 0$.

Exercice 31 *[sujet]* **1.** Facile

2. on a $x = \dfrac{\ell(x)}{\ell(a)} a$ car $\ell(a) \in \mathbb{R}^*$.

3. $f(x) = -\ell(a)x$ (donc vp si $x \neq 0$)

4. $f^2(x) = -\ell(a)f(x)$ donc $X(X + \ell(a))$ annule f. Si $\ell(a) \neq 0$, il est SARS et si $\ell(a) = 0$ alors $f^2 = 0$ donc non DZ (0 est la seule valeur propre possible et $f \neq 0$)

5. si $\ell(a) = 0$ alors $\mathcal{X}_f = X^n$; sinon $E_0(f) = \text{Vect}\{a\}$ et $E_{-\ell(a)}(f) = \ker(\ell)$ est un hyperplan donc $\mathcal{X}_f = X(X + \ell(a))^{n-1}$. Dans tous les cas, $\text{Tr}(f) = -(n-1)\ell(a)$.

Exercice 32 *[sujet]* **1.** $\text{rg}(A) = 1$ si $X \neq 0$ (et $A = 0$ si $X = 0$) ; donc $m_0(A) \geqslant n - 1$ et $\text{Sp}(A) = \{0, \text{Tr}(A)\}$ (et $\text{Tr}(A) = {}^tXX$)

2. $\mathcal{X}_A = X^{n-1}(X - \text{Tr}(A)) = X^{n-1}(X - {}^tXX)$

3. $\det(A + I_n) = (-1)^n \mathcal{X}_A(-1)$

Exercice 33 *[sujet]* **1.** $\text{rg}(M) = 1$

2. $\det(M - \lambda I_n) = (-1)^n \mathcal{X}_M(\lambda) = (-1)^n X^{n-1}(X - \text{Tr}(M))$ (matrice de rang 1) et $\text{Tr}(M) = {}^tYX$.

3. $\det(X\,{}^tX + A) = \det(A)\det(M + I_n) = \det(A)(-1)^n(-1)^{n-1}(-1 - {}^tXA^{-1}X)$.

Exercice 34 *[sujet]* **1.** (C_1, C_2) est libre puis $C_j = \dfrac{j}{2} C_2$ donc $\text{rg}(A) = 2$ et $\ker(A) = \text{Vect}\{je_2 - 2e_j\}$

2. A est symétrique réelle donc DZ (à voir plus tard ; on ne va pas s'en servir pour la suite) ; on a $m_0(A) \geqslant \dim(\ker(A)) = n - 2$ (si on sait déjà A DZ, c'est même $= n - 2$).

3. Si on note $\mathcal{X}_n$ le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en dvant par la dernière colonne puis la dernière ligne, on a $\mathcal{X}_n(\lambda) = \lambda\mathcal{X}_{n-1}\lambda - n^2$; on en déduit $\chi_A(\lambda) = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - \lambda - s)$ avec $s = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} i^2$ comme $\Delta = 1 + 4s^2 > 0$ et que $s \neq 0$, on a bien $\text{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$ (car $Tr(A) = 1$). On peut alors retrouver A DZ puisque $m_0(A) = n - 2 = \dim(\ker(A))$.

4. $X(X^2 - X - s) = X(X - \lambda)(X - 1 + \lambda)$ convient puisque A est DZ

Exercice 35 *[sujet]* **1.** $L_i = iL_1 \neq 0$ donc $\text{rg}(A) = 1$; on a donc $0 \in \text{Sp}(A)$ et $m_0(A) \geqslant \dim(E_0(A)) = n - 1$. Comme $\text{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, on a $\mathcal{X}_A = X^{n-1}\left(X - \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}\right)$ et A est DZ car $m_0(A) = n - 1 = \dim(E_0(A))$

2. fait

3. $j^2 C_1 = C_j$ donc on trouve $E_0(A) = \text{Vect}\{j^2 e_j - e_1, j \in [\![2, n]\!]\}$ et $E_{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}(A) = \text{Vect}\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ie_i\right\}$

Exercice 36 *[sujet]* **1.** Facile

2. $\text{rg}(a_n) = 2$ s'il existe $i \geqslant 2$ tel que $a_i \neq 0$ (ce que l'on supposera par la suite car sinon A_n est déjà diagonale), $\text{rg}(a_n) = 1$ sinon et si $a_1 \neq 0$ et $A_n = 0$ si tous les a_i sont nuls. On en déduit $0 \in \text{Sp}(A_n)$ et $m_0(A_n) \geqslant \dim(E_0(A_n)) = n-2$.
3. Facile (rec par exemple)
4. $\Delta = a_1^2 - 4b_n$; si $\Delta \neq 0$ et $b_n \neq 0$ (possible dans $\mathbb{C}$) alors A_n possède trois valeurs propres, deux simples et 0 d'ordre $n-2$ avec $\dim(E_0(A_n)) = n-2$ donc A_n est DZ. Si $\Delta \neq 0$ et $b_n = 0$ alors $P_n = X^{n-1}(X - a_1)$ donc $m_0(A_n) = n-1 \neq \dim(E_0(A_n))$ et A_n n'est pas DZ. Enfin, si $\Delta = 0$ et $b_n \neq 0$ alors $P_n = X^{n-2}\left(X - \dfrac{a_1}{2}\right)^2$; $\text{rg}\left(A_n - \dfrac{a_1}{2}I_n\right) \geqslant n-1$ car $a_1 \neq 0$ donc les colonnes $C_2, \dots, C_n$ sont linéairement indépendantes et A_n n'est pas DZ.

Exercice 37 *[sujet]* **1.** sym réelle

2. $C_k = \alpha^{k-1}C_1$ et $C_1 \neq 0$ donc $\text{rg}(A) = 1$ puis (fait en cours) $\mathcal{X}_A = X^{n-1}(X - \text{Tr}(A))$
3. Comme $\dim(E_0(A)) = n-1$, A est DZ si et seulement si $\text{Tr}(A) \neq 0$ et $\text{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-2} \alpha^{2k} = \frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}$ (pour $\alpha^2 \neq 1$, déjà vu : cas réel) donc A est DZ si et seulement si α n'est pas une racine non réelle $2n^{\text{ème}}$ de l'unité

Exercice 38 *[sujet]* Comme (a,b) est libre $u(x) = 0 \Leftrightarrow (a|x) = (b|x) = 0$ donc $\ker(u) = P = \text{Vect}\{a,b\}^\perp$. Si $(e_3,\dots,e_n)$ est une base de P, dans $\mathcal{B} = (a,b,e_3,\dots,e_n)$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & (a|b) \\ (a|b) & 1 \end{pmatrix}$ donc u est DZ si et seulement si A est DZ. Comme $\mathcal{X}_A = X^2 - 2X + 1 - (a|b)^2$ et $\Delta = 4(1-(a|b)^2) > 0$ d'après Cauchy-Schwarz, $\mathcal{X}_A$ est SARS donc A est DZ

Exercice 39 *[sujet]* Si $A = S - I_n$, on a $\text{rg}(A) = 1$ donc $\mathcal{X}_A = X^{n-1}(X - \text{Tr}(A)) = X^{n-1}(X+1)$; on en déduit $\mathcal{X}_S = (X-1)^{n-1}(X)$ puis $E_1(S) = E_0(A) = \text{Vect}\{a_1e_1 - a_ie_i, i \geqslant 2\}$ et $E_0(S) = E_{-1}(A) = \text{Vect}\{a_1e_1 + \cdots + a_ne_n\}$

Exercice 40 *[sujet]* $\text{rg}(A - 2I_3) \neq \text{rg}(B - 2I_3)$ donc A et B ne sont pas semblables (A n'est pas DZ alors que B l'est)

Exercice 41 *[sujet]* **1.** A et B sont alors DZ et semblables à la même matrice diagonale donc semblables entre elles

2. $A = 0$ et $B = E_{1,2}$ ne sont pas semblables mais $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B) = \{0\}$.

Exercice 42 *[sujet]* **1.** a) Cours

b) Fait en cours (trigonaliser)

2. On a $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1,\lambda_2\} = \text{Sp}(A^2) = \{\lambda_1^2,\lambda_2^2\}$, on a donc deux cas :
   — $\lambda_1 = \lambda_1^2$ et $\lambda_2 = \lambda_2^2$, ce qui donne $\text{Sp}(A) \subset \{0,1\}$: si $\text{Sp}(A) = \{0\}$ alors $\mathcal{X}_A = X^2$ puis (C-Ham) $A^2 = 0$ donc $A = 0$ aussi (récip OK), si $\text{Sp}(A) = \{0,1\}$ alors $\mathcal{X}_A = X(X-1)$ donc (C-Ham) $A^2 = A$ (récip OK), ou bien $\text{Sp}(A) = \{1\}$ et dans ce cas A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et comme $T^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la réciproque est OK.
   — $\lambda_1 = \lambda_2^2$ et $\lambda_2 = \lambda_1^2$ ce qui donne $\text{Sp}(A) = \{0\}$ puis $A = 0$ (OK), ou $\text{Sp}(A) = \{1\}$ (donc OK) ou enfin $\text{Sp}(A) = \{j, j^2\}$ et A est semblable à $D = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$ et comme $D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c'est OK aussi.

   Les solutions sont donc les matrices de projections, celles dont le spectre est $\{1\}$ et celles qui sont semblables à D.
3. Si $\lambda \neq \pm 1$ est vp de A alors $\text{Sp}(A) = \{\lambda, \lambda^{-1}\}$; A et A^{-1} sont DZ et semblables à $\text{diag}(\lambda,\lambda^{-1})$ donc semblables entre elles. Si 1 est vp simple de A alors -1 est l'autre vp, A et A^{-1} sont semblables à $\text{diag}(1,-1)$ donc OK. Si 1 est vp double alors soit A est DZ et $A = I_2$ (donc OK) soit A est TZ, semblable à $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$. A^{-1} est alors semblable à $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ donc OK aussi (idem pour -1).

Exercice 43 *[sujet]* $\mathcal{X}_A = X(X-2)(X+2)$ donc on a 3 droites stables : $E_0(A) = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$, $E_2(A) = \text{Vect}\{(1,-1,1)\}$ et $E_{-2}(A) = \text{Vect}\{(0,1,1)\}$.
Si P est un plan stable et v l'endomorphisme induit par A sur P alors v est DZ et $\mathcal{X}_v | \mathcal{X}_A$. On a donc $\mathcal{X}_v = X(X-2)$ et dans ce cas $P = \ker(v \circ (v - 2id))$ (C-H) donc $P \subset \ker(A^2 - 2A) = \{(x,y,z), x = z\}$ qui est un plan stable ; avec $\mathcal{X}_v = X(X+2)$ on trouve $P_2 = \{(x,y,z), y = z\}$ et avec $\mathcal{X}_v = (X-2)(X+2)$, $P_3 = \{(x,y,z), 2x + y - z = 0\}$

Exercice 44 *[sujet]* $\mathcal{X}_M = (X-2)(X-1-i)(X-1+i)$ donc dans $\mathbb{R}^3$, une droite stable $E_2(M) = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$. Si P est un plan stable et v l'endomorphisme induit par M sur P alors $\mathcal{X}_v$ est réel et divise $\mathcal{X}_M$ donc $\mathcal{X}_v = X^2 - 2X + 2$ puis pas C-H, $P \subset \ker(M^2 - 2M + 2I_3) = \{(x,y,z), y + z = 0\}$ qui est bien un plan stable.

Exercice 45 *[sujet]* $\mathcal{X}_A = (X+1)^3$ et $\text{rg}(A+I_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$
Si $k=0$ toute droite incluse dans $E_{-1}(A) = \{(x,y,z), x=0\}$ est stable; si $k \neq 0$, une droite stable $E_{-1}(A) = \text{Vect}\{(0,1,1)\}$. Si P est un plan stable et v l'endomorphisme induit sur P alors $\mathcal{X}_v = (X+1)^2$ donc (C-H) $P = \ker(v+id)^2 \subset \ker(A+I_3)^2$; si $k \neq 0$ alors $\ker(A+I_3)^2 = \{(x,y,z), y-z=0\}$ est un plan stable alors que si $k=0$, $(A+I_3)^2 = 0$ donc son noyau est $\mathbb{R}^3$ donc pas un plan (et $P \subset \mathbb{R}^3$ n'apporte pas grand chose). Si $k=0$, $\ker(A+I_3) = \text{Vect}\{e_2, e_3\}$ est un plan stable; si P est un autre plan stable, il existe $x_0 \in P$ tel que $(A+I_3)x_0 \in \text{Im}(A+I_3) \setminus \{0\}$ et comme $\text{Im}(A+I_3) = \text{Vect}\{(0,1,1)\}$, $(0,1,1) \in P$ On a donc $P = \text{Vect}\{x_0, (0,1,1)\}$ avec $x_0 \notin \ker(A+I_3)$, on vérifie alors que tous ces plans sont stables.

Exercice 46 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_A = (X-3)^3$ et $\dim(E_3(A)) = 1$

2. Une seule droite stable : $E_3(A)$

3. a) cours

b) $\deg(\mathcal{X}_{a'}) = \dim(P) = 2$ donc $\mathcal{X}_{a'} = (X-3)^2$ et avec C-Ham, $P = \ker(a'-3id)^2 \subset \ker(a-3id)^2$

c) On vérifie que $\ker(a-3id)^2$ est bien un plan (donc $= P$) et c'est le seul plan stable.

Exercice 47 *[sujet]* **1.** Si $x \in H$ et $\text{Im}(u-\lambda id) \subset H$ alors $u(x) = (u-\lambda id)x + \lambda x \in H$ donc H est stable; si H est un hyperplan stable alors $E = H \oplus \text{Vect}\{e\}$ donc $u(e) = x_H + \lambda e$ et on vérifie que $\text{Im}(u-\lambda id) \subset H$.

2. $\mathcal{X}_A = X^3$ donc 1 droite stable $E_0(A) = \text{Vect}\{(1,-1,-1)\}$; si P est un plan (donc hyperplan) stable par A alors $\text{Im}(A-\lambda I_3) \subset P$ donc $A-\lambda I_3$ n'est pas inversible, ie $\lambda \in \text{Sp}(A) = \{0\}$, puis $\text{Im}(A) \subset P$ donc $P = \text{Im}(A)$ car $\text{rg}(A) = 2$. On vérifie ensuite que $\text{Im}(A)$ est bien un plan stable.

Exercice 48 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_A = (X+4)^2(X+2)$ et $\text{rg}(A+4I_3) = 2$ donc A et ${}^tA$ ne sont pas DZ.

2. Deux droites stables $E_{-2}(A)$ et $E_{-4}(A)$.

3. Si R^3 est muni du produit scalaire canonique $(X|Y) = {}^tXY$ alors $P = N^\perp$ si $n = (a,b,c)$; si P est stable par A alors pour $X \in P$, on a $AX \in P$ donc $(AX|N) = 0$ et on vérifie $(AX|N) = (X|{}^tAN)$ donc ${}^tAN \perp X$ pour tout $X \in P$, ce qui signifie que ${}^tAN \in P^\perp = \text{Vect}\{N\}$ puis ${}^tAN = \lambda N$ donc N est un vecteur propre de ${}^tA$ (car $N \neq 0$). On a donc deux plans stables $E_{-4}({}^tA)^\perp$ et $E_{-2}({}^tA)$ (pour lesquels on vérifie que ce sont bien des plans stables vu que le début de la question ne faisait pas prouver l'équivalence, qui est pourtant vraie).

Exercice 49 *[sujet]* **1.** $\{0\}$ et E sont stables. Si f est une rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\pi/2$, alors f n'a pas de valeur propre donc il n'existe pas de droite stable et $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$ sont les seuls sev stables

2. $\ker(f) \neq \{0\}$ et $\ker(f) \neq E$ (car $f \neq 0$) est aussi un sev stable.
Si n est impair alors f admet 4 espaces stables : $\{0\}$, $\ker(f)$, $\text{Im}(f)$ et E. $\ker(f) = \text{Im}(f)$ est impossible en dimension impaire avec le th du rang.
f associé à $E_{1,2}$ (nilpotent) possède 3 espaces stables : $\{0\}$, $\ker(f) = \text{Im}(f) = \text{Vect}\{e_1\}$ et $\mathbb{R}^2$.

3. Si $\mathcal{X}_f$ est SARS, on vérifie qu'un sev est stable si et seulement si il est engendré par une famille de vecteurs propres de f : si F est stable alors g induit par f sur F est DZ donc $F = \text{Vect}\{u_i\}$ avec u_i des vp de g, ie des vp de f qui appartiennent à F (récip facile). On a donc $\binom{n}{k}$ sev de dimension k stables par f.
Si λ est vp multiple de f alors toute droite incluse dans $E_\lambda(f)$ (il y en a une infinité) est stable par f.

Exercice 50 *[sujet]* **1.** $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(0,2)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. X commute avec A donc, comme les vp de A sont simples, on a $X = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \text{diag}(\alpha, \beta)$ telle que $\begin{cases} \alpha^2+\alpha = 0 \\ \beta^2+\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \{0,-1\} \\ \beta \in \{1,-2\} \end{cases}$ On a donc 4 solutions : $X = P\text{diag}(0,1)P^{-1} = \frac{1}{2}A$, $X = P\text{diag}(-1,1)P^{-1} = A - I_2$, $X = P\text{diag}(0,-2)P^{-1} = -A$ et $X = P\text{diag}(-1,-2)P^{-1} = \frac{1}{2}A - I_2$

Exercice 51 *[sujet]* **1.** facile puis $\mathcal{X}_A$ est SARS

2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(1,-8)$ et $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $B^3 = A$ si et seulement si $\Delta^3 = D$ avec $\Delta = P^{-1}BP$ donc une seule solution $\Delta = \text{diag}(1,-2)$ et $B = P\Delta P^{-1}$

Exercice 52 *[sujet]* **1.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$

2. Facile (grâce aux coefficients diagonaux de D qui sont distincts 2 à 2)

3. On pose $M = PNP^{-1}$ puis $M^7 + M + I_3 = A$ si et seulement si $N^7 + N + I_3 = D$, N commute avec D donc est diagonale; $N = \mathrm{diag}(a, b, c)$ est solution si et seulement si $\begin{cases} a^7 + a + 1 = -1 \\ b^7 + b + 1 = 1 \\ c^7 + c + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$ (la fonction $x \mapsto x^7 + x + 1$ est bijective donc il n'y a à chaque fois qu'une solution). La seule solution est donc $M = P\mathrm{diag}(1, 0, -1)P^{-1}$.

Exercice 53 *[sujet]* On a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc si A est semblable à B e_2 et e_3 sont des vecteurs de $\ker(A^2 + I_3)$. On vérifie que $\ker(A^2 + I_3) \neq \{0\}$: sinon, comme $(A^2 + I_3)A = 0$, on aurait $\mathrm{Im}(A) \subset \ker(A^2 + I_3)$ donc $A = 0$. On choisit $e_2 \in \ker(A + I_3)$ non nul, on pose $e_3 = Ae_2$ et on choisit $e_1 \in \ker(A)$ non nul, ce qui est possible car si $\ker(A) = \{0\}$, A est inversible donc $A^2 + I_3 = 0$ puis $\det(A)^2 = \det(-I_3) = -1$ ce qui est absurde avec une matrice réelle. Reste à vérifier que (e_1, e_2, e_3) est libre : si $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma Ae_2 = 0$ alors (en composant par A), $\beta Ae_2 - \gamma e_2 = 0$ puis $-\beta e_2 - \gamma Ae_2 = 0$ donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Exercice 54 *[sujet]* 1. $\mathcal{X}_A = (X - 1)(X + 1)^2$ et $\dim(E_{-1}(A)) = 1$ donc pas DZ

2. on prend e_1 vp ass à 1, e_2 vp ass à -1 et e_3 tel que $u(e_3) + e_3 = e_2$ donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

3. u commute avec v si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

Exercice 55 *[sujet]* 1. facile

2. cours

3. $E_\lambda(u)$ est une droite. Si e est un vp de u alors $D = \mathrm{Vect}\{e\}$ est une droite stable par v donc e est aussi un vp de v

4. toute base de vp de u convient; Z_u est donc isomorphe (se placer dans une telle base) à l'ensemble des matrices diagonales donc $\dim(Z_u) = n$

Exercice 56 *[sujet]* 1. $P_0 = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$ convient (cours) et si $P(A) = 0$ alors $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont r racines distinctes de P donc $\deg(P) \geqslant r$.

2. Si $B = P(A)$ alors on écrit $P = P_0Q + R$ avec $\deg(R) \leqslant r - 1$ et on a $B = R(A)$ car $P_0(A) = 0$. On a donc $B \in \mathrm{Vect}\{I_n, A, \ldots, A^{r-1}\}$; l'inclusion réciproque est évidente donc $\mathbb{K}[A] = \mathrm{Vect}\{I_n, A, \ldots, A^{r-1}\}$ puis on vérifie que $(I_n, A, \ldots, A^{r-1})$ est libre car si $\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{r-1}A^{r-1} = 0$ alors $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{r-1}X^{r-1}$ annule A et est de degré $< r$ donc est nul, ie $\alpha_i = 0$.

3. Si B commute avec A alors les espaces propres de A sont stables par B donc si $A = P\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \ldots, \lambda_r I_{m_r})P^{-1}$ alors $B = P\mathrm{diag}(B_1, \ldots, B_r)P^{-1}$ (diag par blocs); le réciproque étant évidente, on en déduit que $(B_1, \ldots, B_r) \mapsto P\mathrm{diag}(B_1, \ldots, B_r)P^{-1}$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{m_1}(\mathbb{K}) \times \cdots \times \mathcal{M}_{m_r}(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{C}(A)$, ce qui donne $\dim(C(A)) = \sum_{i=1}^{r} \dim(\mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})) = \sum_{i=1}^{r} m_i^2$.

4. $\dim(C(A)) = r \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} m_i^2 = r$ ce qui arrive si et seulement si $m_i = 1$ et comme $n = \sum_{i=1}^{r} m_i$, ceci équivaut à $n = r$ (A possède n vp simples); les autres équivalences sont évidentes avec ce qui précède, en particulier car $\mathbb{K}[A] \subset C(A)$ donc $\mathbb{K}[A] = C(A)$ si et seulement si $\dim(\mathbb{K}[A]) = \dim(C(A))$.

Exercice 57 *[sujet]* On vérifie $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(0, 3, -3)$, on vérifie que si $M^3 + 2M = A$ alors $AM = MA = M^4 + 2M^2$ donc $P^{-1}MP$ commute avec D. Comme les coefficients diagonaux de D sont 2 à 2 distincts, on en déduit $P^{-1}MP$ est diagonale. On pose alors $M = P\mathrm{diag}(a, b, c)P^{-1}$, M est alors solution si et seulement si $\begin{cases} a^3 + 2a = 0 \\ b^3 + 2b = 3 \\ c^3 + 2c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$ (car a, b, c sont réels). Il existe donc une seule solution $M = P\mathrm{diag}(0, 1, -1)P^{-1} = \dfrac{1}{3}A$.

Exercice 58 *[sujet]* 1. Si $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(a_i I_{n_i})$ (vp distinctes) alors $B = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = D^3 + D + I_n = \mathrm{diag}(b_i I_{n_i})$ et $b_i = a_i^3 + a_i + 1$. On aura $A = Q(B)$ si et seulement si $D = Q(\Delta)$ donc si et seulement si $a_i = Q(b_i)$ pour tout i (c'est donc un problème d'interpolation). Comme $x \mapsto x^3 + x + 1$ est injective sur $\mathbb{R}$ (car strictement croissante), les b_i sont deux à deux distinctes donc un tel polynôme Q existe.

2. Le problème est que dans $\mathbb{C}$, $x \mapsto x^3 + x + 1$ n'est plus injective ; si on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, on a $B = 0$ et il est impossible de trouver Q tel que $A = Q(B)$

Exercice 59 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_A = (X-1)^2(X-3)$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\{(2,-1,1)\}$ et $E_3(A) = \mathrm{Vect}\{(0,1,1)\}$ donc A n'est pas DZ

2. si $f(e_i) = \lambda_i e_i$ alors $f(g(e_i)) = g^3(e_i) = g(f(e_i)) = \lambda_i g(e_i)$ et $g(e_i) \neq 0$ car g est bijective ($\det(g)^2 = \det(f) = 3$)

3. Comme $E_1(f)$ et $E_3(f)$ sont deux droites, engendrées par e_1 et e_3, on a $g(e_i) \in \mathrm{Vect}\{e_i\}$ donc $g(e_i) = \mu_i e_i$ puis $f(e_i) = mu_i^2 e_i$ donc e_1 est associé à ± 1 et e_3 à ± 3.

4. Si g était DZ, $f = g^2$ le serait aussi

5. g possède donc deux valeurs propres distinctes (avec 3 g serait DZ) on a donc $\mathcal{X}_g = (X \pm 1)^2(X \pm \sqrt{3})$ ou $\mathcal{X}_g = (X \pm 1)(X \pm \sqrt{3})^2$. Dans le second cas, on aurait (en TZ g) $\mathcal{X}_f = (X-1)(X-3)^2$ ce qui est faux. On a donc $\mathcal{X}_g = (X \pm 1)^2(X \pm \sqrt{3})$

Exercice 60 *[sujet]* **1.** $\ker(u - 2id) = \mathrm{Vect}\{e_1\}$ et $\ker(u - id)^2 = \mathrm{Vect}\{e_2, e_3\}$

2. v commute avec u donc avec $(u - 2 - i)$ et $(u - id)^2$.

3. X est diagonale par blocs car les 2 espaces sont stables. On vérifie que Y commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si et seulement si $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$; on a alors $Y^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ donc les solutions sont $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha^n = 2$ (une racine $n^{\text{ème}}$ de 2), $\beta^n = 1$ et $n\beta^{n-1}\gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = \dfrac{\alpha}{n}$.

Exercice 61 *[sujet]* **1.** $\ker(f^2) = \{xe_1 + ye_2 + ze_3, x + y - z = 0\}$ et $\ker(f - 2id) = \mathrm{Vect}\{e_1 + e_2\}$

2. $e_1 - e_2$

3. $P = P(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. g commute avec f^2 ; on a $h^4 = 0$ donc h est nilpotent puis $\mathcal{X}_h = X^2$ donc $h^2 = 0$ ce qui donnerait $\ker(f) = \ker(f^2)$.

Exercice 62 *[sujet]* Si B existe, on a $B^6 = 0$ donc B est nilpotente, donc $B^3 = 0$ (C-Ham). On en déduit $\mathrm{Im}(B^2) \subset \ker(B)$ ce qui est absurde car $\mathrm{rg}(B^2) = 2$ donc $\mathrm{rg}(B) \geqslant 2$ et $\dim(\ker(B)) \geqslant 2$ qui contredit le th du rg

Exercice 63 *[sujet]* **1.** $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\mathcal{X}_A = X(X-1)^2$ donc $M^2(M^2 - I_3)^2 = 0$, $X^2(X^2-1)^2$ annule M donc $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1, 0, 1\}$. $\det(M)^2 = \det(A) = 0$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(M)$.

3. Si $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 0, 1\}$ alors M est DZ et A le serait aussi donc $\mathrm{Sp}(M) \neq \{-1, 0, 1\}$. Si $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ ce qui est faux. On a donc $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 1\}$ ou $\mathrm{Sp}(M) = \{0, -1\}$. Les deux espaces propres de M sont forcément des droites (sinon M serait DZ), on a donc $E_0(M) = E_0(A)$ et $E_{\pm 1}(M) = E_1(A)$ ce qui donne $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \pm 1 & \beta \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = T'$. On trouve deux solutions opposées $T' = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 64 *[sujet]* $\mathcal{X}_A = (X-1)(X-2)(X-3)$ donc $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(1, 2, 3)$. $AM = MA$ si et seulement si $DN = ND$ avec $M = PNP^{-1}$; on vérifie que $ND = DN$ si et seulement si N est diagonale (car les vp de A sont distinctes) donc la dimension du commutant de D est 3, celle du commutant de A est 3 aussi (car $N \mapsto PNP^{-1}$ est un isomorphisme du commutant de D sur celui de A). Comme I_3, A et A^2 sont 3 matrices libres qui commutent avec A, elles forment une base du commutant de A qui est donc $\mathbb{R}_2[A]$.

Exercice 65 *[sujet]* $P(A)$ est DZ et ses espaces propres sont des droites ; comme A et $P(A)$ commutent, toutes ces droites sont stables par A. Toute base de vecteurs propres de $P(A)$ est aussi une base de vecteurs propres de A donc A est DZ (et on peut vérifier aussi que les valeurs propres de A sont elles aussi deux à deux distinctes puisque P est une application donc $P(\lambda) \neq P(\mu) \Rightarrow \lambda \neq \mu$).

Exercice 66 *[sujet]* On vérifie que $\mathcal{X}_A = X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$ donc les vp de A sont les racines $n + 1^{\text{ème}}$ de 1 autres que 1 donc n vp distinctes. Tout polynôme annulateur de A est donc divisible par $\mathcal{X}_A$ (puisque $\mathrm{Sp}(A)$ est inclus dans les racines d'un tel polynôme) on en déduit que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ sont libres et comme A possède un polynôme annulateur de degré n, $\dim \mathbb{C}[A] \leqslant n$ donc $\dim(C[A]) = n$.

Exercice 67 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_u$ est SARS

2. On vérifie $M\text{diag}(1,2,3) = \text{diag}(1,2,3)M$ si et seulement si M est diagonale
3. Comme les vp sont 2 à 2 distinctes, on vérifie comme à la question précédente que $\dim(C(u)) = 3$, (id, u, u^2) sont dans $C(u)$ et libres (car sinon on aurait un polynôme annulateur de degré $\leqslant 2$, ce qui absurde car les 3 vp doivent être racines de ce polynôme) donc c'est une base de $C(u)$

Exercice 68 *[sujet]* Tout est fait en cours ; on trouve $\dim(C(f)) = n$ car $C(f) = \mathbb{R}[f]$ et f admet un polynôme annulateur de de degré n ($\mathcal{X}_f$) mais pas de degré $n-1$ non nul (car les n vp seraient racines de ce polynôme) donc $\mathbb{R}[f] = \text{Vect}\{id, f, \ldots, f^{n-1}\}$.

Exercice 69 *[sujet]* **1.** Les espaces propres de A sont des droites stables par B donc engendrées par des vecteurs propres de B ; toute base de vecteurs propres de A est donc aussi une base de vecteurs propres de B.

2. Polynôme interpolateur de Lagrange
3. On a $Q(D) = D'$ donc $Q(A) = B$.
4. C'est faux : si $A = I_2$ alors A commute avec toute matrice B mais toute matrice n'est pas un polynôme en I_2 (les polynômes en I_2 sont des matrices scalaires donc forcément diagonales).

Exercice 70 *[sujet]* **1.** Si $A = PDP^{-1}$ alors $AMA = 0 \Leftrightarrow DND = 0$ avec $N = P^{-1}MP$ et comme $N \mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme on a l'égalité des dimension annoncée. On a $(DND)_{i,j} = \lambda_i d_{i,j} \lambda_j$ donc $\dim(E) = n^2 - \text{rg}(D)^2 = n^2 - \text{rg}(A)^2$

2. Rien ne change : $M \mapsto Q^{-1}MP$ reste un isomorphisme.

Exercice 71 *[sujet]* **1.** X est vecteur propre de la matrice nulle et si $AX = \lambda X$, $BX = \mu X$ alors $(\alpha A + \beta B)X = (\alpha\lambda + \beta\mu)X$.

2. On complète X en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et on note la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à cette base $\mathcal{B}$; on a $M \in E_X$ si et seulement si $M = PNP^{-1}$ où N est une matrice dont la première colonne est $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme $M \mapsto PMP^{-1}$ est un isomorphisme, on en déduit que $\dim(E_X) = 1 + n(n-1)$ car $\{E_{1,1}\} \cup \{E_{i,j}, i \geqslant 1, j \geqslant 2\}$ est une base de $P^{-1}E_X P$ (ensemble des matrices N).

Exercice 72 *[sujet]* Si A est DZ avec des vp distinctes alors comme les espaces propres de A sont des droites stables par B, ils sont engendrés par des vecteurs propres de B donc toute base de vecteurs propres de A est aussi une base de vecteurs propres de B. Il existe P tel que $D = P^{-1}AP$ et $D' = P^{-1}BP$ sont diagonales puis il existe $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $Q(D) = D'$ donc $B = Q(A)$ est un polynôme en A.
Si B est DZ avec des vp distinctes, c'est A qui est un polynôme en B.
Reste donc à étudier les cas où A et B n'ont qu'une seule valeur propre. Si A est DZ alors A est semblable à λI_2 donc $A = \lambda I_2 = \lambda B^0$ est un polynôme en B.
Reste le cas où A et B ne sont que trigonalisables : l'espace propre de A est une droite stable par B donc est engendrée par un vecteur propre de B et il existe P telle que $T = P^{-1}AP$ et $T' = P^{-1}BP$ sont toutes deux triangulaires supérieures. $T = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ et $T' = \begin{pmatrix} \beta & \beta' \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha' \neq 0$; on vérifie alors $T' = \beta I_2 + \dfrac{\beta'}{\beta}(T - \alpha I_2)$ donc B est un polynôme en A.
Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, cela devient faux : si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on vérifie $AB = BA = 0$ mais $A^2 = 0$ donc B n'est pas un polynôme en A et $B^2 = 0$ donc A n'est pas non plus un polynôme en B.
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la démonstration précédente reste valable sauf dans le cas où $\mathcal{X}_A$ et $\mathcal{X}_B$ ne seraient pas scindés dans $\mathbb{R}$, il y a alors 2 vp complexes conjuguées pour A et B donc A et B sont DZ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (on est donc dans le premier cas traité au dessus), on peut trouver un polynôme réel tel que $P(D) = D'$ donc B est encore un polynôme en A : si $D = \text{diag}(\alpha, \overline{\alpha})$ et $D' = \text{diag}(\beta, \overline{\beta})$, il suffit de prendre $P = \lambda(X - \alpha) + \beta$ avec $\lambda = \text{Im}(\beta)/\,\text{Im}(\alpha)$.

Exercice 73 *[sujet]* **1.** Symétrique réelle ou P SARS qui suit

2. $(A + I_n)^2 = n(A + I_n)$
3. $P = (X+1)(X+1-n)$ annule A donc $\text{Sp}(A) \subset \{1, 1-n\}$
4. $\text{Tr}(A) = 0$ donc les deux valeurs propres possibles sont effectivement des valeurs propres ; $\text{rg}(A + I_n) = 1$ donc $m_1(A) \overset{\text{DZ}}{=} \dim(E_1(A)) = n - 1$; la deuxième est donc simple

Exercice 74 *[sujet]* Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\det(M)\det(M + I_2) = \det(A) = 0$ donc $0 \in \text{Sp}(M)$ ou $-1 \in \text{Sp}(M)$; de même $\det(M - I_2)\det(M + 2I_2) = \det(A - 2I_2) = 0$ donc $1 \in \text{Sp}(M)$ ou $-2 \in \text{Sp}(M)$. On a donc 4 possibilité pour $\text{Sp}(M)$:

— si $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 1\}$ alors $\mathcal{X}_M = X(X-1)$ et (C-H) $M^2 = M$ donc $M = \dfrac{1}{2}A$ qui est bien une solution.
— si $\mathrm{Sp}(M) = \{0, -2\}$ alors $M^2 = -2M$ donc $M = -A$ qui est solution.
— si $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 1\}$ alors $M^2 = I_2$ donc $M = A - I_2$ qui est solution.
— si $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, -2\}$ alors $M^2 = -3M - 2I_2$ donc $M = \dfrac{1}{2}A - I_2$ qui est solution.

Exercice 75 *[sujet]* **1.** $J^2 = nJ$ puis $\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\}$, $E_0(J) = \mathrm{Vect}\{e_1 - e_i, i \geqslant 2\}$ (hyperplan) et $E_n(J) = \mathrm{Vect}\{(1, \dots, 1)\}$ $(= E_0(J)^\perp$ par th spectral si besoin)

2. $P = (X^2 + X)^2 - n(X^2 + X) = X(X+1)(X^2 + X - n)$ est SARS

3. $MX = \lambda X \Rightarrow JX = (\lambda^2 + \lambda)X$

4. On a $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, -1, \lambda_1, \lambda_2\}$ avec $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4n}}{2}$. $MJ = JM = M^3 + M^2$ donc les espaces propres de J sont stables par M ; si $J = P\mathrm{diag}(0I_{n-1}, n)P^{-1}$ alors $M = P\mathrm{diag}(N, \mu)P^{-1}$ (matrices diagonales par blocs) puis $N^2 + N = 0$ et $\mu^2 + \mu = n$ donc $\mu = \lambda_{1,2}$; les solutions sont donc $M = P\mathrm{diag}(N, \lambda_{1,2})P^{-1}$ où $N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est DZ avec $\mathrm{Sp}(N) \subset \{-1, 0\}$.

Exercice 76 *[sujet]* $u^4 = u^3 \circ u = u^2$. On a $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0, 1, -1\}$, $\mathrm{Tr}(u) = m_1(u) - m_{-1}(u)$ et $\mathrm{rg}(u) = m_1(u) + m_{-1}(u)$ donc si $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{Tr}(u)$, on a $m_{-1}(u) = 0$ puis $u + id \in \mathcal{GL}(E)$ donc $0 = u^3 - u = (u + id) \circ (u^2 - u)$ puis $u^2 - u = 0$; u est un projecteur (récip OK).

Exercice 77 *[sujet]* On a $(BA)^3 = 0$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(BA) = \{0\}$ (car non vide) donc $\mathcal{X}_{BA} = X^n$. Si $n \geqslant 2$, on a (C-Ham) $(BA)^2 = 0$. Par contre, si $n \geqslant 3$, on prend $A = E_{1,2} + E_{2,3}$ et $B = E_{1,1} + E_{1,2}$, on vérifie $(AB)^2 = E_{1,2}^2 = 0$ alors que $(BA)^2 = (E_{1,2} + E_{2,3})^2 = E_{1,3} \neq 0$.

Exercice 78 *[sujet]* **1.** Si $u(x) = 0$ alors $u^2(x) + u(x) + x = 0$ donc $\ker(u) \cap \ker(u^2 + u + id) = \{0\}$

2. Si $x \in \ker(u^2 + u + id)$ alors $x = -u(x) - u^2(x) \in \mathrm{Im}(u)$ et $(u^2 + u + id) \circ u = 0$ donc $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u^2 + u + id)$

3. On a prouver $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$ et le th du rg permet de conclure

4. $\deg(\mathcal{X}_v) = \dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(u)$

5. $X^2 + X + 1$ annule v donc $0 \notin \mathrm{Sp}(v)$; On en déduit aussi que v ne possède pas de vp (réelle) donc $\mathrm{rg}(u) = \deg(\mathcal{X}_v)$ est pair

Exercice 79 *[sujet]* **1.** cours

2. $X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{1, i, -i\}$ avec (A réelle) $m_i(A) = m_{-i}(A)$ donc $\det(A) = 1^{m_1} \times |i|^{2m_i} = 1$

3. $\mathrm{Tr}(A) = m_1 + m_i(i - i) = m_1 = n - 2m_i$ donc, en particulier, $\mathrm{Tr}(A) \in [\![0, n]\!]$

Exercice 80 *[sujet]* $X^3 - 3X - 5 = (X - r)(X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$ avec $r > 1$ (étudier la fonction polynômiale) et A est réelle donc $\det(A) = r^{n_1}|\lambda|^{2n_2} > 0$

Exercice 81 *[sujet]* $P = X^3 - X - 1$ annule A donc les vp de A font partie des racines de P ; on vérifie (étude de fct) que P admet une seule racine réelle r et qu'elle est > 0. Comme A est réelle ses valeurs propres complexes sont conjuguées avec les mêmes ordre de multiplicité donc si $P = (X - r)(X - s)(X - \overline{s})$ alors $\mathcal{X}_A = (X - r)^\alpha (X - s)^\beta (X - \overline{s})^\beta$ (avec α et β nuls éventuellement). On a donc $\det(A) = r^\alpha |s|^\beta > 0$.

Exercice 82 *[sujet]* **1.** $P = X(X - 3i)(X + 3i)$ annule A

2. Si A est DZ sur $\mathbb{R}$ alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, A est semblable à 0 donc $A = 0$. Sur $\mathbb{C}$ oui car P est SARS

3. $m_{3i}(A) = m_{-3i}(A)$ donc $m_0(A) = n - 2m_{3i}(A)$ ne peut pas être nul si n est impair

4. A est DZ donc cf **1.b**

Exercice 83 *[sujet]* $X^5 - X^2 = X^2(X-1)(X-j)(X-j^2)$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{0, 1, j, j^2\}$; A est réelle donc $m_j = m_{j^2}$ puis $\mathrm{Tr}(M) = m_1 + m_j(j + j^2) - m_1 - m_j$ donc $m_1 = n$, $m_0 = m_j = 0$ (ie $\chi_M = (X-1)^n$). On a ensuite $M^2(M - jI_n)(M - j^2 I_n)(M - I_n) = 0$ et M, $M_j I_n$, $M - j^2 I_n$ sont inversibles donc $M = I_n$ (récip évidente)

Exercice 84 *[sujet]* $P = X(X-2)(X-3)$ annule A donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 2, 3\}$, A possède 3 vp (en les répétant) dont la somme est 7 ; la seule possibilité est $2, 2, 3$ donc $\mathcal{X}_A = (X-2)^2(X-3)$. De plus P est SARS donc A est DZ. Les solutions sont donc toutes les matrices semblables à $\mathrm{diag}(2, 2, 3)$.

Exercice 85 *[sujet]* A est inversible donc $A^2 - 3A + 2I_5 = 0$; $P = (X-1)(X-2)$ annule A donc les vp possibles de A sont 1 et 2 (et A en possède 5), leur somme est 8 donc $\mathcal{X}_A = (X-1)^2(X-2)^3$

Exercice 86 *[sujet]* $A - I_3 \notin \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ donc $1 \in \mathrm{Sp}(A)$, si α et β sont les deux autres vp complexes de A, on a $1 + \alpha + \beta = \mathrm{Tr}(A) = -6$ et $1 \times \alpha \times \beta = \det(A) = 10$ donc $\{\alpha, \beta\} = \{2, 5\}$ puis $\mathcal{X}_A = (X-1)(X+2)(X+5) = X^3 + 6X^2 + 3X - 10$ et par C-H, on a un polynôme annulateur permettant de calculer $A^{-1} = \dfrac{1}{10}(A^2 + 6A + 3I_3)$.

Exercice 87 *[sujet]* **1.** Cours

2. $P = X(X-2)^2$ annule A donc les vp possibles de A sont 0 et 2 ; comme $\mathrm{Tr}(A) = 2m_2(A) = 0$, la seule vp possible est 0. La matrice $A - 2I_n$ est donc inversible et $A(A-2I_n)^2 = 0 \Leftarrow A = 0$ (récip évidente).

Exercice 88 *[sujet]* $X^2-3X+2 = (X-1)(X-2)$ SARS donc A est DZ (dans $\mathbb{R}$) et $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1,2\}$ puis $X^4-X^3-X+1 = (X-1)^2(X^2+X+1)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$ et comme A est DZ, on a $A = I_n$ (récip OK)

Exercice 89 *[sujet]* **1.** $\det(A)^2 = \det(-I_n) = (-1)^n \geqslant 0$ car A est réelle donc n est pair.

2. $X^2 - X + 1 = (X+j)(X+j^2)$ annule B donc les vp possibles de B sont $-j$ et $-j^2$; comme B est réelle, $-j$ et $-j^2$ sont effectivement vp avec le même ordre de multiplicité α et $n = 2\alpha$ est pair.

3. Si $X \in \ker(C) \cap \mathrm{Im}(C)$ alors $CX = 0$ et $X = CY$ donc $C^3Y - C^2Y + CY = 0$ qui donne $X = 0$; le théorème du rang assure alors $R^n = \ker(C) \oplus \mathrm{Im}(C)$. $\mathrm{Im}(C)$ est un sev stable par C sur lequel l'endomorphisme induit est bijectif donc vérifie $v^2 - v + id = 0$ donc $\mathrm{rg}(C)$ est pair d'après la question précédente.

Exercice 90 *[sujet]* **1.** $P = X^2+X+1 = (X-j)(X-j^2)$ annule M donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$ donc M n'est pas DZ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; par contre P est SARS dans $\mathbb{C}$ donc M est DZ dans $\mathbb{C}$. $M^{-1} = -(M+I_n)$

2. M est réelle donc j et j^2 sont vp de M avec le même ordre de multiplicité α. On a $n = 2\alpha$ pair, $\mathrm{Tr}(M) = \alpha(j+j^2) = -\alpha = -\dfrac{n}{2}$ et $\det(M) = j^\alpha j^{2\alpha} = 1$

3. A est annulée par X^4+X^2+1 SARS dans $\mathbb{C}$ donc A est DZ dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$ sinon M le serait aussi. Les vp possibles de A sont $\pm j$ et $\pm j^2$ avec les même ordres de multiplicité pour j et j^2 et pour $-j$ et $-j^2$ donc $\mathrm{Tr}(A) = a(j+j^2) - b(j+j^2) = b - a \in \mathbb{Z}$; de plus $\dfrac{n}{2} = a + b$ est l'ordre de multiplicité de j comme vp de M (diagonaliser A dans $\mathbb{C}$ et calculer A^2) donc $a+b$ est impair et $b - a = (a+b) - 2a$ sera impair aussi.

Exercice 91 *[sujet]* **1.** $P = X(X-2)^2(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$

2. $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, 2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ et $\mathrm{Tr}(M) = 2m_2 + m_3\sqrt{2} - m_4\sqrt{2}$ donc, comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, on a $m_3 = m_4$ puis $\mathrm{Tr}(M) = 2m_2$ donc $m_2 = 0$. Comme $2 \notin \mathrm{Sp}(M)$, $M - 2I_n$ est inversible puis $X(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ est SARS et annule M. On en déduit M DZ et semblable à $D = \mathrm{diag}(0I_{m_1}, \sqrt{2}I_{m_3}, -\sqrt{2}I_{m_3})$; on vérifie réciproquement que toute matrice de la forme PDP^{-1} convient

Exercice 92 *[sujet]* **1.** Cours

2. $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-3, j, j^2\}$ et $\mathrm{Tr}(A) = -3m_{-3}(A) + m_j(A)(j+j^2)$ car A est réelle donc $m_j(A) = m_{j^2}(A)$ puis $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{Z}^-$ car $j + j^2 = -1$.

3. $P = X(X^2+1)$ convient : on a alors $\mathrm{rg}(A) = m_i(A) + m_{-i}(A) = 2m_i(A)$ si A est réelle

Exercice 93 *[sujet]* **1.** $e^{2i\pi/5}$ est racine de $X^5 - 1 = (X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1)$ donc de $X^4+X^3+X^2+X+1 = X^2\left[\left(X+\dfrac{1}{X}\right)^2 + \left(X+\dfrac{1}{X}\right) - 1\right]$; on en déduit que $e^{2i\pi/5} + e^{-2i\pi/5} = 2a$ est racine de X^2+X-1 et a est racine de $4X^2+2X-1$. Comme $a \geqslant 0$, on a $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $b = 2a^2 - 1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

2. On a $\mathrm{Sp}(A) \subset \left\{e^{2ik\pi}/5, k \in [\![1,4]\!]\right\}$ et A est réelle donc $\mathrm{Tr}(A) = m_1\left(e^{2i\pi/5} + e^{-2i\pi/5}\right) + m_2\left(e^{4i\pi/5} + e^{-4i\pi/5}\right) = m_1 a + m_2 b = -\dfrac{1}{4}(m_1+m_2) + \dfrac{\sqrt{5}}{4}(m_1 - m_2)$. Comme $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, on a $m_1 - m_2 = 0$. Enfin, $n = 2m_1 + m_2 = 4m_1$ (la somme des ordres de multiplicité est égal à n).

Exercice 94 *[sujet]* Il faut sans doute dire qu'on a besoin de la factorisation de P pour localiser les valeurs propres (et on peut penser que l'examinateur donne alors cette factorisation, ou une racine « évidente ») ; M est forcément DZ car P est SARS et M possède au plus 3 valeurs propres. Une seule est impossible pour avoir $\mathrm{Tr}(M) = 0$, deux aussi car $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ donc $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ (dans l'ordre de la factorisation de P) ; on doit avoir $n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + n_3\lambda_3 = 0$ donc $n_2 = n_3$ (car $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$) et $-5n_1 + 3(n_2+n_3) = 0$ ie $5n_1 = 6n_2$. On a donc au minimum $n_1 = 6$, $n_2 = n_3 = 5$ puis $n = n_1 + n_2 + n_3 \geqslant 16$. Réciproquement $M = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_6, \lambda_2 I_5, \lambda_3 I_5)$ convient.

Exercice 95 *[sujet]* $P = X^2 + X + 4$ n'a pas de racine réelle donc A possède 2 racines complexes conjuguée avec le même ordre de multiplicité α ; $n = 2\alpha$ est pair, $\det(A) = (r_1 r_2)^\alpha = 4^{n/2} = 2^n$ (produit des racines de P) et $\mathrm{Tr}(A) = \alpha(r_1 + r_2) = -\alpha = -\dfrac{n}{2}$ (somme des racines de P).

Exercice 96 *[sujet]* **1.** Utiliser le binôme pour $(M + M^{-1})^k$ car M et M^{-1} commutent ; résultats cf c)

2. On a $M^2 + I_n = M$ et $X^2 - X + 1$ est SARS dans $\mathbb{C}$, M est réelle donc semblable à $D = \mathrm{diag}(-jI_p, -j^2I_p)$ avec $n = 2p$ (forcément pair)

3. $M^k+M^{-k}=P(D^k+D^{-k})P^{-1}$ puis $(-j)^k+(-j^2)^k=(-1)^k\left(e^{\frac{2ik\pi}{3}}+e^{-\frac{2ik\pi}{3}}\right)=(-1)^k 2\cos\dfrac{2ik\pi}{3}$ donc $M^k+M^{-k}=(-1)^k 2\cos\dfrac{2ik\pi}{3}I_n$

Exercice 97 *[sujet]* $A={}^t(A^2)=({}^tA)^2=A^4$ donc $P=X(X^3-1)$ annule A ; les racines de P sont $0,1,j,j^2$; si 0 est vp alors j et j^2 ne peuvent plus l'être (car A est réelle et possède au plus 2 vp). On a donc $\det(A^2+A+I_2)=\det(A-jI_2)\det(A-j^2I_2)\neq 0$ puis, en simplifiant la relation initiale $A(A-I_2)=0$. Si 1 n'est pas vp de A alors $A-I_2$ est aussi inversible et on arrive à $A=0$ donc $\mathrm{Sp}(A)=\{0,1\}$, A est DZ donc semblable à $E_{2,2}$.

Exercice 98 *[sujet]* **1.** cours

2. On a $(A^T)^2=(I_3-A)$ et $(A^2)^T=(I_3-A^2)^2$ donc $P=X(X-1)(X^2+X-1)=X(X-1)\left(X-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ annule A ; $0=\mathrm{Tr}(A)=m_1(A)+m_\lambda(A)\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}+m_{\lambda'}(A)\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ donc $(2m_1-m_\lambda-m_{\lambda'})+\sqrt{5}(m_\lambda-m_{\lambda'})=0$. Comme $\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$, on doit avoir $m_\lambda=m_{\lambda'}$ et $2m_1=m_\lambda+m_{\lambda'}$ et $m_1+m_\lambda+m_{\lambda'}=3-m_0\leqslant 3$ donc $m_0=0$, $m_1=m_\lambda=m_{\lambda'}=1$. Mais comme $1\in\mathrm{Sp}(A)$, on aurait $A-I_3$ non inversible alors que $A-I_3=(A^T)^2$ qui serait inversible car $0\notin\mathrm{Sp}(A)$ donc absurde

Exercice 99 *[sujet]* **1.** Cours

2. On a $M^2+M-I_n=0$ donc $X^2+X-1=\left(X-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ est SARS et annule M donc M est DZ. On a $\det(M)=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-k}\neq 0$ et $\mathrm{Tr}(M)=k\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+(n-k)\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ donc, comme $\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$, on a $\mathrm{Tr}(M)=0\Rightarrow n=0$ ce qui est absurde.

3. ${}^tM=I_n-M^2$ donc ${}^tM^2=(I_n-M^2)^2$ et ${}^tM^2={}^t(I_n-{}^tM)=I_n-M$ donc $X(X-1)(X^2+X-1)$ annule M et est SARS

4. $\det(M^2)=\det(I_n-{}^tM)=\det(I_n-M)$ et $\det(M^2)=\det(M)^2$.

Exercice 100 *[sujet]* $X(X-1)^2$ annule A donc $\mathrm{Sp}(A)\subset\{0,1\}$; $(A-I_n)^2\neq 0$ donc A n'est pas inversible et $0\in\mathrm{Sp}(A)$; de même $A(A-I_n)\neq 0$ donc $A-I_n\notin\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(A)=\{0,1\}$. Comme $X(X-1)$ n'annule pas A, A n'est pas DZ.

Exercice 101 *[sujet]* $(X-1)^3(X-2)$ annule f donc $\mathrm{Sp}(f)\subset\{1,2\}$ puis f serait DZ si $(X-1)(X-2)$ annulait f, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 102 *[sujet]* X^p-1 annule A donc les vp de A sont des racines $p^{\text{ème}}$ de 1, conjuguées si elles sont complexes puisque A est réelle. P est SARS dans $\mathbb{C}$ donc A est DZ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{Sp}(A)=\{1\}$ alors $A=I_2$ et $A^{12}=I_2$; si $\mathrm{Sp}(A)=\{-1\}$ (donc p pair) alors $A=-I_2$ donc $A^{12}=I_2$ et si $\mathrm{Sp}(A)=\{-1,1\}$ alors $A^2=I_2$ donc $A^{12}=I_2$. Reste les cas où $\mathrm{Sp}(A)=\{z,\overline{z}\}$ avec $z=e^{i\frac{2k\pi}{p}}$, on a $\mathrm{Tr}(A)=z+\overline{z}=2\cos\dfrac{2k\pi}{p}\in\mathbb{Z}\cap]-2,2[$ donc $\mathrm{Tr}(A)\in\{-1,0,1\}$; on a alors (C-H) $A^2=\mathrm{Tr}(A)A-I_2$ (car $\det(A)=|z|^2=1$) qui donne $A^{12}=I_2$ dans les 3 cas.

Exercice 103 *[sujet]* **1.** X^2+1 annule M_i

2. Si $p\geqslant 2$, $\det(M_1M_2)=(-1)^n\det(M_2M_1)=(-1)^n\det(M_1M_2)$ donne n pair puisque $\det(M_1M_2)\neq 0$; on vérifie que $X\mapsto M_jX$ est un isomorphisme de $E_i(M_k)$ sur $E_{-i}(M_k)$ pour $k\neq j$ donc $\dim(E_i(M_j))=\dim(E_{-i}(M_j))$.

3. $\det(M_j)=|i|^n=1$

4. pour $n=2$, il existe $P\in\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}M_1P=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$ puis $M_1M_k=-M_kM_1$ et $M_k^2=-I_2$ donne $P^{-1}M_kP=\begin{pmatrix} 0 & b_k\\ c_k & 0\end{pmatrix}$ avec $b_kc_k=-1$ puis on vérifie que M_2 étant définie, on a $M_3=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ et qu'il est impossible de trouver une $4^{\text{ème}}$ matrice donc $p\leqslant 3$. On trouve un exemple avec $p=3$ si $M_1=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$ et $M_2=\begin{pmatrix} 0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$ et $M_3=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

Pour $n=4$ $P^{-1}M_1P=\begin{pmatrix} iI_2 & 0\\ 0 & -iI_2\end{pmatrix}$ puis $M_i=P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & A_i\\ B_i & 0\end{pmatrix}$ pour $i\geqslant 2$ avec $A_iB_i=-I_2$ puis en remplaçant P par $Q=P\begin{pmatrix} I_2 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$ d'inverse $Q=\begin{pmatrix} I_2 & 0\\ 0 & -B_2\end{pmatrix}P^{-1}$, on trouve $Q^{-1}M_1Q=\begin{pmatrix} iI_2 & 0\\ 0 & -iI_2\end{pmatrix}$, $Q^{-1}M_2Q=\begin{pmatrix} 0 & -I_2\\ I_2 & 0\end{pmatrix}$ puis $Q^{-1}M_kQ=\begin{pmatrix} 0 & M'_k\\ M'_k & 0\end{pmatrix}$ pour $k\geqslant 3$ avec M'_k qui vérifient les conditions pour $n=2$; on en déduit $p\leqslant 5$ et on trouve un exemple pour $p=5$ avec $M_1=\begin{pmatrix} iI_2 & 0\\ 0 & -iI_2\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix} 0 & -I_2\\ I_2 & 0\end{pmatrix}$ et $M_3=M_k=\begin{pmatrix} 0 & M'_k\\ M'_k & 0\end{pmatrix}$ en prenant pour M_3 une des trois matrices du cas $n=2$.

Exercice 104 *[sujet]* On a $A^2 - A = 2B$ et $A^3 - 6A = -B$ donc $2X^3 + X^2 + 13X$ annule A, SARS dans $\mathbb{C}$ donc A est DZ; $B = 6A - A^3$ est aussi DZ, de même pour C.

Exercice 105 *[sujet]* $X(X-\lambda)(X-\mu)$ annule f donc f est DZ si $\lambda \neq \mu$ sont non nuls. Reste les cas particuliers : si $\lambda = \mu \neq 0$ alors $X(X-\lambda)$ annule f donc DZ; si $\lambda \neq \mu = 0$ alors $X(X-\lambda)$ annule f; et si $\lambda = \mu = 0$ alors $f = 0$.

Exercice 106 *[sujet]* $A^2 - 2A$ est DZ donc $P = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ avec $\mathrm{Sp}(A^2 - 2A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ annule $A^2 - 2A$ alors $Q(X) = P(X^2 - 2X) = \prod_{i=1}^{p}(X^2 - 2X - \lambda_i)$ annule A; en trigonalisant A, on vérifie que si 1 n'est pas vp de A alors -1 n'est pas vp de $A^2 - 2A$ (car la seule solution de $X^2 - 2X = -1$ est $X = 1$) donc $\lambda_i \neq -1$ et $\Delta_i = 4(1 + \lambda_i) \neq 0$. Le polynôme Q est donc SARS et A est DZ.

Exercice 107 *[sujet]* On a $\mathcal{X}_A = (X-1)^n - 1$ donc A est inversible si et seulement si n est impair et le théorème de C-H fournit un polynôme annulateur permettant de calculer A^{-1} (classique)

Exercice 108 *[sujet]*

1. Cours
2. Si u est bijectif alors $\ker(u) = \ker(u^2) = \{0\}$. On suppose $\det(u) = 0$; on a donc $\mathcal{X}_u = X^n + \cdots + \alpha X$ avec $\alpha = \mathcal{X}_u'(0) \neq 0$. Si $x \in \ker(u^2)$ alors le théorème de C-H donne $\alpha u(x) = 0$ donc $x \in \ker(u)$; l'inclusion inverse est évidente.

Exercice 109 *[sujet]*

1. $\det(C_P) = (-1)^n a_0 = (-1)^{n+1} P(0)$
2. $\mathcal{X}_{C_P} = P$
3. $\mathrm{rg}(C_P - \lambda I_n) \geqslant n-1$ car les $n-1$ premières colonnes sont libres
4. si C_P est DZ alors comme les espaces propres sont des droites, il doit y avoir n telles droites donc n vp distinctes et P est SARS. Récip évidente puisque $\mathcal{X}_{C_P} = P$

Exercice 110 *[sujet]* On a $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j - \lambda x_1 = 0 \\ (i - 1 - \lambda)x_i = -\lambda x_1 \quad \text{si } i \geqslant 2 \end{cases}$ S'il existe $i \geqslant 2$ tel que $\lambda = i - 1$ alors $x_1 = 0$ puis $x_j = 0$ pour $j \neq i$ et la première ligne donne $x_i = 0$; X est donc nul donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$. On poursuit donc la résolution en reportant x_i dans la première ligne et on obtient $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{1}{\lambda - i} - 1\right) x_1 = 0 \\ x_i = \dfrac{\lambda}{\lambda - i + 1} x_1 \quad \text{si } i \geqslant 2 \end{cases}$ Si $\lambda = 0$ alors $x_i = 0$ pour $i \geqslant 2$ et la première ligne donne aussi $x_1 = 0$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$. Pour finir, ce système admet donc une solution non nulle si et seulement si $\sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{1}{\lambda - i} = 1$.

En dessinant le tableau de variations de $\phi : \lambda \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{1}{\lambda - i}$ (continue sur $\mathbb{R} \setminus [\![0, n-1]\!]$ et strictement décroissante sur tout intervalle où elle est continue), on vérifie que $\phi(\lambda) = 1$ admet une solution sur chaque intervalle $]i, i+1[$ pour $i \in [\![0, n-2]\!]$ et une sur $]n-1, +\infty[$ ce qui donne n vp distinctes donc A est DZ.

Exercice 111 *[sujet]*

1. X^p annule N donc $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$ (il est non vide puisque c'est le spectre complexe). On a donc $\mathcal{X}_N = X^n$.
2. Par C-H, on a $N^n = 0$ puis $AN = NA \Rightarrow A^{-1}N = NA^{-1}$ donc $(A^{-1}N)^n = (A^{-1})^n N^n = 0$. On a $\det(A + N) = \det(A)\mathcal{X}_{-A^{-1}N}(1) = \det(A)$ car $\mathcal{X}_{-A^{-1}N} = X^n$.
3. Par la formule du binôme, on a $(A + N)^p = AM$ avec $M = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} N^k A^{p-k-1}$ car $N^p = 0$. On se contente de traiter le cas où $\det(A) = 0$: on a $(\det(A + N))^p = \det(A)\det(M) = 0$ donc $\det(A + N) = 0 = \det(A)$.

Exercice 112 *[sujet]*

1. On écrit $A = PJ_rQ^{-1}$ avec $r \leqslant n-1$ et on choisit $M = PBQ^{-1}$ avec $b_{i,j} = 1$ si $i = j+1$ ou $(i,j) = (1,n)$ et 0 sinon. On a $\det(M + \lambda A) = (-1)^{n+1}\det(PQ^{-1})$
2. $\det(M + \lambda A) = \det(A)\mathcal{X}_{-A^{-1}M}(\lambda)$ s'annule toujours dans $\mathbb{C}$ puisque c'est un polynôme non constant.

Exercice 113 *[sujet]* En trigonalisant A, on trouve que si les vp de A sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ alors celles de $P(A)$ sont $P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)$. On vérifie $P(A)$ nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(P(A)) = \{0\}$ donc $P(A)$ est nilpotente si et seulement si $P(\lambda_i) = 0$ pour tout i.

Exercice 114 *[sujet]* Si A est DZ, alors $A = Q\text{diag}(\alpha, \beta)Q^{-1}$; le polynôme $P - \alpha$ est non constant donc admet une racine complexe z_1, ie $P(z_1) = \alpha$; de même il existe z_2 tel que $P(z_2) = \beta$. On pose alors $M = Q\text{diag}(z_1, z_2)Q^{-1}$ et on a $A = P(M)$.
Si A n'est pas DZ alors $\mathcal{X}_A = (X - \alpha)^2$ et on peut donc écrire $A = \alpha I_2 + N$ avec $N = A - \alpha I_2 \neq 0$ et $N^2 = 0$ (C-Ham). On choisit $P = X^2 + \alpha$: il existe M telle que $A = \alpha I_2 + N = P(M) = M^2 + \alpha I_2$ donc $N = M^2$. On a alors $M^4 = N^2 = 0$ donc M est nilpotente, puis $M^2 = 0$; or $M^2 = N \neq 0$.

Exercice 115 *[sujet]* **1.** La relation est vraie si $P = X^k$ pour $k \leqslant n$ donc pour $P \in \mathbb{R}_p[X]$. Avec $P = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$, on trouve $P(u) = 0$ et P est SARS donc u est DZ. En utilisant la division euclidienne de $Q \in \mathbb{R}[X]$ par P, on trouve $Q(u) = P(u)$ et $Q(\lambda_i) = P(\lambda_i)$ donc la relation est vraie pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$.

2. P annule u donc $\text{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$; si on suppose $\lambda_p \notin \text{Sp}(u)$ par exemple alors $Q = \prod_{i=1}^{p-1}(X - \lambda_i)$ annule u (car u est DZ), on a donc $Q(\lambda_p)v_p = 0$ ce qui est absurde puisque $v_p \neq 0$. On a donc $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.
P annule u donc tout multiple de P aussi ; si Q annule u, on a $Q = PP_1 + R$ avec $\deg(R) \leqslant p - 1$, $Q(u) = 0$ donc $R(u) = 0$; R admet donc au moins p racines distinctes (les vp de u) donc $R = 0$ et les polynômes annulateurs de u sont les multiples de P.

3. Si (L_i) est la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange aux points (λ_i), on vérifie que $v_i = L_i(u)$ est le projecteur donné en prenant une base de vecteurs propres de u (écrire la matrice de v_i).

Exercice 116 *[sujet]* **1.** On a $a = PAP^{-1}$ si P est la matrice d'un chgt de base

2. Il suffit de prendre $\lambda \notin \text{Sp}(B)$, ce qui est possible car $\text{Sp}(B)$ contient au plus n valeurs. On a donc $A(B - \lambda I_n) = (B - \lambda I_n)B$ donc $AB = BA$

3. Avec $B = E_{i,j}$, on en déduit $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} = a_{j,j}$ donc $A = \mu I_n$ et f est une homothétie.

Exercice 117 *[sujet]* **1.** a) $P(x) = \det(xA - B) = \det(A)\mathcal{X}_{A^{-1}B}(x)$ est un polynôme de degré n

b) P admet une racine complexe

2. si $\dim(E) \geqslant 2$, on choisit A, B linéairement indépendantes dans E et k tel que $M = kA - B$ ne soit pas inversible. C'est absurde car E est un sev donc $M \in E$; par liberté de (A, B), on a $M \neq 0$ et M n'est pas inversible.

3. on a donc $E = \text{Vect}\{A\}$ avec A inversible (qui convient bien)

Exercice 118 *[sujet]* **1.** on suppose le résultat vrai pour tout $G \subset \mathcal{GL}_k(\mathbb{C})$ avec $k \leqslant n$ et on choisit $G \subset \mathcal{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$. Pour $A \in G$, on a $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$ et A est DZ ; si pour tout $A \in G$, on a $\text{Card}(\text{Sp}(A)) = 1$ alors tous les éléments de G sont des homothéties (donc déjà diagonales). Sinon, on choisit $A \in G$ avec $\text{Sp}(A) = \{-1, +1\}$, on a $\mathbb{C}^n = E_1(A) \oplus E_{-1}(A)$. Par commutativité, $E_1(A)$ et $E_{-1}(A)$ sont stables par $B \in G$ donc si $\mathcal{B}$ est une base de vp de A, pour tout $B \in G$, on a $Q^{-1}BQ = \text{diag}(B_1, B_2)$ (diag par blocs et $Q = P(\mathcal{B}_c \to \mathcal{B})$). On vérifie que $G_1 = \{B_1, B \in G\}$ et $G_2 = \{B_2, B \in G\}$ satisfont les mêmes hypothèses que G (avec $k \leqslant n$) donc par HR, il existe P_1, P_2 telles que $P_1^{-1}B_1P_1 = D_1$ et $P_2^{-1}B_2P_2 = D_2$ sont diag pour tout (B_1, B_2). On pose alors $P = \text{diag}(P_1, P_2)$, on vérifie $P^{-1} = \text{diag}(P_1^{-1}, P_2^{-1})$ et $P^{-1}Q^{-1}BQP = \text{diag}(D_1, D_2)$

2. On a $A = P^{-1}DP$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\lambda_i \in \{-1, +1\}$ donc 2^n choix pour les λ_i au plus et P est fixée.

Exercice 119 *[sujet]* **1.** facile

2. $\mathcal{X}_B = X(X - 2)^2$ puis $E_0(B) = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\}$ et $E_2(B) = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ donc B est DZ

3. a) $\mathcal{X}_A = (X - 2)(X^2 + 2X - 1)$ (SARS)

b) Si X est un vp de B et Y un vp de A^T associés à 2, on pose $M = XY^T \neq 0$ (à vérifier) et on a $M \in \mathcal{E}$

c) Avec $X_1 = (1, 1, 0)$ et $Y = (0, 1, 1)$ puis $X_2 = (1, 0, -1)$ et Y on a deux matrices de $\mathcal{E}$ linéairement indépendantes

4. par récurrence $B^kM = MA^k$ puis $P(B)M = MP(A)$. Avec $P = \mathcal{X}_A$ et C-Ham, on a $\mathcal{X}_A(B)M = 0$ donc comme $B^2 + 2B - I_3$ est inversible, on a $(B - 2I_3)M = 0$ puis $\text{Im}(M) \subset E_2(B)$. On fait de même avec $P = \mathcal{X}_B$: on arrive à $M(A - 2I_3)^2 = 0$, ie $(A^T - 2I_3)^2M^T = 0$; comme A est DZ, on a $\ker(A^T - 2I_3)^2 = \ker(A^T - 2I_3) = \text{Vect}\{Y\}$ puis $\text{Im}\, M^T \subset \ker(A^T - 2I_3)$. On en déduit que M^T est de rang 1 donc peut s'écrire $M^T = YC^T$ avec $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On revient à $M = CY^T$ qui donne $C \in \text{Im}(M)$ donc $C \in \text{Vect}\{X_1, X_2\}$. Toutes les matrices de cette forme ($M = \alpha X_1Y^T + \beta X_2Y^T$) conviennent comme on l'a vu avant donc $\dim(\mathcal{E}) = 2$.

Exercice 120 *[sujet]* **1.** cours

2. $A^kU = UB^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ par récurrence

3. Avec C-Ham, $U\mathcal{X}_A(B) = 0$ donc $\mathcal{X}_A(B) \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ puis $0 = \det \mathcal{X}_A(B) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(B)} \det(A - \lambda I_n)$ donc il existe $\lambda \in \text{Sp}(B)$ tel que $A - \lambda I_n \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, ie $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

Exercice 121 *[sujet]* **1.** Cours

2. $\det(\mathcal{X}_A(B)) = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} [(-1)^n\mathcal{X}_B(\lambda)]^{m_\lambda(A)} \neq 0$ car $\mathcal{X}_B(\lambda)\neq 0$ si $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$

3. On prouve $P(A)X = XP(B)$ pour tout $P\in\mathbb{C}[X]$ donc (C-Ham) $X\mathcal{X}_A(B) = 0$ puis $X = 0$; récip facile

4. $\varphi : X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\mapsto AX - XB$ est un endomorphisme injectif en dimension finie donc bijectif.

Exercice 122 *[sujet]* **1.** $f^{-1} = f$, $g^{-1} = g$, $X^2-1 = (X-1)(X+1)$ annule f et g et est SARS donc $\mathrm{Sp}(f)\subset\{-1,1\}$ et f est DZ (idem pour g). Si $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$ alors $f = id$ (car DZ) donc $2g = 0$, ce qui contredit $g^2 = id$; de même $\mathrm{Sp}(f) = \{-1\}$ est absurde.

2. si $f(x) = x$ alors $f(g(x)) = -g(f(x)) = -g(x)$ donc g induit une application linéaire de $\ker(f-id)$ vers $\ker(f+id)$; on vérifie que la réciproque de cette application est g elle-même donc cette application induite est un isomorphisme et $\dim(E_1(f)) = \dim(E_{-1}(f))$; comme $E = E_{-1}(f)\oplus E_1(f)$, on a $\dim(E) = 2\dim(E_1(f))$

3. Soit $\mathcal{B}_1$ une base $E_1(f)$, $g(\mathcal{B}_1)$ est alors une base de $E_{-1}(f)$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, g(\mathcal{B}_1))$ est alors une base de E qui répond à la question.

Exercice 123 *[sujet]* **1.** $u^2 = id$ donc $u = u^{-1}$ puis $v = -u^{-1}\circ v\circ u$ donc $\mathrm{Tr}(v) = -\mathrm{Tr}(v)$ et $\mathrm{Tr}(v) = 0$

2. $X^2-1 = (X-1)(X+1)$ est SARS donc u et DZ et $\mathrm{Sp}(u)\subset\{-1,1\}$; comme $\mathrm{Tr}(u) = 0$, on a forcément $m_1(u) = m_{-1}(u) = 2$

3. $u(v(x)) = -v(u(x)) = -v(x)$ donc $v(x)\in E_{-1}(u)$, idem pour y ; reste à prouver que $(v(x), v(y))$ est libre : si $\alpha v(x) + \beta v(y) = 0$ alors $\alpha v(v(x)) + \beta v(v(y)) = 0$ donc $\alpha x + \beta y = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$

4. $\mathrm{Mat}\,\mathcal{B}(u\circ v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ donc $\mathcal{X}_{u\circ v} = (X^2+1)^2$; $E_i(u\circ v) = \mathrm{Vect}\{x+iv(x), y+iv(y)\}$ et $E_{-i}(u\circ v) = \mathrm{Vect}\{x-iv(x), y-iv(y)\}$

Exercice 124 *[sujet]* Si $AB = BA$ alors A et B sont codiagonalisables, ie $A = R\mathrm{diag}(\lambda_i)R^{-1}$ et $B = R\mathrm{diag}(\mu_i)R^{-1}$; on pose $C = R\mathrm{diag}(1,2,\dots,n)R^{-1}$ (donc inversible), il existe P et Q tels $P(i) = \lambda_i$ et $Q(i) = \mu_i$ et on a $A = P(C)$ et $B = Q(C)$.
Réciproquement, si $A = P(C)$ et $B = Q(C)$ alors $AB = BA$ car $\mathbb{K}[C]$ est commutative.

Exercice 125 *[sujet]* **1.** Fait en cours

2. On a $P^{-1}APJ_r = J_rQ^{-1}BQ$ puis en écrivant $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}$ et $Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}$, on trouve $A_1 = B_1$ et $A_3 = B_2 = 0$ (donc les matrices sont triangulaires par blocs) ; on en déduit $\mathcal{X}_{A_1}$ divise $\mathcal{X}_A$ et $\mathcal{X}_B$.

Exercice 126 *[sujet]* **1.** Si X est un vp de A associé à $\lambda\neq 0$ alors $AX = \lambda X$ donc $B^3X = A^3X = \lambda^3X$ et $B^3X = B(A^2X) = B(\lambda^2X) = \lambda^2BX$. En divisant par $\lambda^2\neq 0$, on a $BX = \lambda X$; on en déduit (l'autre inclusion se fait de même) $\ker(A-\lambda I_n)\ker(B-\lambda I_n)$ si $\lambda\neq 0$. Comme A est DZ, on a $\ker(A) = \ker(A^2) = \ker(B^2) = \ker(B)$ car B est DZ. Ainsi, A et B ont les mêmes espaces propres et les mêmes valeurs propres donc sont égales (semblables à la même matrice diagonale dans la même base).

2. Non : prendre $A = 0$ et $B = E_{1,2}$ (nilpotente d'indice 2)

Exercice 127 *[sujet]* Si $\mathrm{Sp}(B)\neq\{0\}$ alors il existe $X\neq 0$ tel que $BX = \lambda X\neq 0$ donc $AX = \dfrac{1}{\lambda}ABX = 0$ et X est aussi un vecteur propre de B. Si $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$ alors B est nilpotente, on introduit p tel que $B^p = 0$ et $B^{p-1}\neq 0$ puis X_0 tel que $Y = B^{p-1}X_0\neq 0$. On a $BY = 0$ et $AY = AB(B^{p-2}X_0) = 0$ car on peut supposer $p\geqslant 2$ (sinon $B = 0$ et le résultat est évident).
On prouve le résultat par récurrence sur n : évident si $n = 1$ puisque toute matrice de taille 1 est diagonale. On suppose que dans $\mathcal{M}_{n-1}(C)$, si $AB = 0$ alors A est B sont cotrigonalisables et on choisit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. On introduit X un vecteur propre commun que l'on complète en une base, A et B sont donc semblables à $A_1 = \begin{pmatrix}\alpha & L_1\\ 0 & A'\end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix}\beta & L_2\\ 0 & B'\end{pmatrix}$, $AB = BA$ donne $A'B' = B'A'$ donc on peut appliquer l'HR : il existe $P\in\mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}A'P = T_1$ et $P^{-1}B'P = T_2$. On vérifie que $Q = \begin{pmatrix}1 & 0\\ & P\end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P^{-1}\end{pmatrix}$ et que $Q^{-1}A_1Q$ et $Q^{-1}B_1Q$ sont triangulaires.
On a $(A-\beta I_n)(B-\alpha I_n) = \alpha\beta I_n$ donc le raisonnement s'applique à $A-\beta I_n$ et $B-\alpha I_n$ si $\alpha\beta = 0$ puis on vérifie que si $A-\beta I_n$ et $B-\alpha I_n$ sont cotrigonalisables alors A et B aussi ; par contre si $\alpha\beta\neq 0$, alors $B-\alpha I_n$ est proportionnelle à $(A-\beta I_n)^{-1}$ donc toute trigonalisation de $A-\beta I_n$ trigonalisera aussi $B-\alpha I_n$.

Exercice 128 *[sujet]* **1.** Il existe $x\neq 0$ tel que $v\circ u(x) = \lambda x$ donc $y = u(x)\neq 0$ et on vérifie que $u\circ v(y) = \lambda y$.

2. 0 est vp de $u\circ v$ si et seulement si $\det(u\circ v) = 0$, ce qui donne le résultat puisque $\det(u\circ v) = \det(v\circ u)$.

3. $u\circ v=id$ donc $0\notin \mathrm{Sp}(u\circ v)$ et $\ker(v\circ u)=\mathbb{R}_0[X]$ donc $0\in\mathrm{Sp}(v\circ u)$.

Exercice 129 *[sujet]* **1.** Si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=D$ alors $\mathrm{Mat}\,\mathcal{B}(u^2)=D^2$ reste diagonale

2. $E_{1,2}$ n'est pas DZ mais $E_{1,2}^2=0$ l'est

3. analyse : si $x=a+b\in\ker(u^2-\lambda^2 id)$ alors $u(x)=\lambda(a-b)$ donc $a=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{\lambda}u(x)\right)$ et $b=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{\lambda}u(x)\right))$ donc la déc est unique si elle existe. Récip, pour un tel choix de a et b, on a $x=a+b$, $u(a)=\frac{1}{2}\left(u(x)+\frac{1}{\lambda}u^2(x)\right)=\frac{1}{2}(u(x)+\lambda x)=\lambda a$; de même $u(b)=-\lambda b$. On a donc $\ker(u^2-\lambda^2 id)\subset\ker(u-\lambda id)\oplus\ker(u+\lambda id)$ (récip facile)

4. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ les vp distinctes de u^2. Il existe des complexes μ_i tels que $\mu_i^2=\lambda_i$ et on a $\mathbb{C}^n=\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r}E_{\lambda_i}(u^2)$

— si u est bijectif alors $\lambda_i\neq 0$ donc $E_{\lambda_i}(u^2)=E_{\mu_i}(u)\oplus E_{-\mu_i}(u)$ donc $\mathbb{C}^n=\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r}(E_{\mu_i}(u)\oplus E_{-\mu_i}(u))$ et u est DZ

— sinon, on suppose $\lambda_1=0$ et on a $\mathbb{C}^n=\ker(u^2)\oplus\bigoplus_{2\leqslant i\leqslant r}E_{\lambda_i}(u^2)$; avec $\ker(u)=\ker(u^2)$ et ce qui précède, on a $\mathbb{C}^n=\ker(u)\oplus\bigoplus_{2\leqslant i\leqslant r}(E_{\mu_i}(u)\oplus E_{-\mu_i}(u))$ donc u est DZ

Exercice 130 *[sujet]* **1.** si B est inversible, $\det(A+tB)=\det(B)\mathcal{X}_{-AB^{-1}}(t)$ s'annule pour au plus n valeurs ; si A est inversible et $t\neq 0$, $\det(A+tB)=\det(A)t^n\mathcal{X}_{-A^{-1}B}\left(\frac{1}{t}\right)$ donc $\det(A+tB)$ s'annule pour au plus $n+1$ valeurs de t (0 et les inverses des vp de $-A^{-1}B$)

2. Appliquer la question précédente avec $A=(a_1\dots a_n)$ et $B=(b_1\dots b_n)$

Exercice 131 *[sujet]* **1.** $AB=A(BA)A^{-1}$ donc AB et BA sont semblables

2. Soit $f:\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^p$ canoniquement associée à A et $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^q$ adaptée à $\mathbb{R}^q=E_0\oplus\ker(f)$ (E_0 un supplémentaire de $\ker(f)$) ; si $P=P(B_q\to\mathcal{B})$ ($\mathcal{B}_q$ base canonique de $\mathbb{R}^q$) alors $A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\end{pmatrix}P$ avec $A_1\in\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ où $r=\mathrm{rg}(A)\leqslant\min(p,q)=p$ donc il suffit de redécouper pour obtenir A' (en rajoutant à A_1 des colonnes nulles si besoin). On décompose $B=P^{-1}\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$ avec $B_1\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et on a $AB=A'B_1$ alors que BA est semblable à $\begin{pmatrix}B_1A' & 0\\ B_2A' & 0\end{pmatrix}$

3. On a $\mathcal{X}_{AB}=(X-1)^2$ donc AB est inversible, ce qui donne $\ker(B)=\{0\}$ et $\mathrm{Im}(A)=\mathbb{R}^2$ comme $(BA)^2=BA$, on a $B(AB-I_2)A=0$; $\mathrm{Im}(A)=\mathbb{R}^2$ donne $B(AB-I_2)=0$ et $\ker(B)=\{0\}$ donne $AB=I_2$.

Exercice 132 *[sujet]* **1.** $xI_n-PCP^{-1}=P(xI_n-C)P^{-1}$ et $(xI_nPCP^{-1})^{-1}=P(xI_n-C)^{-1}P^{-1}$

2. Si $P_A=\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$ alors $\frac{P_A'(x)}{P_A(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-\lambda_i}$ et on vérifie que c'est aussi $\mathrm{Tr}(xI_n-A)^{-1}$ en trigonalisant A et en vérifiant que les coefficients diagonaux de $(xI_n-A)^{-1}$ sont bien $\frac{1}{x-\lambda_i}$.

Exercice 133 *[sujet]* **1.** Par C-H, on a $0=\mathrm{Tr}(\mathcal{X}_A(A))=\mathrm{Tr}((-1)^n\det(A)I_n)=(-1)^n n\det(A)$ donc $\det(A)=0$ et $0\in\mathrm{Sp}(A)$. Il suffit ensuite de choisir une base dont le dernier vecteur est un vecteur propre associé à 0.

2. $\mathrm{Tr}(B^k)=0$ par un calcul de produit par blocs puis une récurrence sur la taille de A donne le résultat.

Exercice 134 *[sujet]* **1.** a) $\mathcal{X}_M=X^n$ (car $m_{i,i}=0$) donc $M^n=0$ par C-Ham

b) M^2 est symétrique réelle et $\mathrm{Sp}(M^2)=\{0\}$ car $(M^2)^n=0$ dont M^2 est semblable à 0

c) $\mathrm{Tr}(M^2)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}m_{i,j}^2=0$ donc $m_{i,j}=0$

2. $F+\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\subset\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim(F)+\frac{n(n-1)}{2}\leqslant n^2$

Exercice 135 *[sujet]* **1.** On a $AX=X$ si $X=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\neq 0$.

2. On a $\lambda x_k=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j$ donc $|(\lambda-a_{k,k})x_k|\leqslant\sum_{j\neq k}a_{k,j}|x_j|\leqslant|x_k|\sum_{j\neq k}a_{k,j}$ et comme $|x_k|>0$ (car $X\neq 0$), on a $|\lambda-a_{k,k}|\leqslant\sum_{j\neq k}a_{k,j}$. Comme $|\lambda-a_{k,k}|\geqslant|\lambda|-a_{k,k}$, on a $|\lambda|\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}=1$.

3. Si $|\lambda| = 1 = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}$ alors on a $|x_k| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leqslant |x_k| \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} = |x_k|$ donc tout est égal. Par caractérisation de l'égalité dans l'inégalité triangulaire, les x_i sont positivement liés deux à deux (donc ont le même argument) et sont égaux en modules. On a donc $X = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\lambda = 1$.

Exercice 136 *[sujet]* **1.** Si $AX = 0$ et i est un indice tel que $|x_i| = \max_{j \in [\![1,n]\!]} |x_j|$, on a $a_{i,i}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j$ donc $|a_{i,i}x_i| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{i,j}x_j| \leqslant |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{i,j}$ ce qui donne $x_i = 0$ puis $X = 0$ donc A est inversible.

2. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on a $|a_{i,i} - \lambda| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ en appliquant la première question à la matrice $A - \lambda I_n$ donc $|\lambda| \geqslant |a_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ puis on fait le produit de ces inégalités en utilisant $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ (répéter les vp multiples)

Exercice 137 *[sujet]* **1.** $M = P\mathrm{diag}(1, 0)P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. On a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $B = Q\mathrm{diag}(A, 0)Q^{-1}$ avec $Q = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$. On en déduit $\chi_B = X^n \mathcal{X}_A$ puis $P(B) = 0$ si et seulement si $P(A) = 0$ et $P(0) = 0$ ce qui donne l'équivalence des DZ : si B est DZ, il existe P SARS tel que $P(B) = 0$ donc $P(A) = 0$ (SARS) donc A DZ ; si A est DZ, il existe P SARS tel que $P(A) = 0$, si $P(0) \neq 0$ alors $P_1 = XP$ est SARS tel que $P_1(B) = 0$ (si $P(0) = 0$ alors $P_1 = P$ suffit) donc (P_1 SARS) B est DZ

Exercice 138 *[sujet]* **1.** On vérifie par récurrence sur $k \geqslant 1$ que $B^k = \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on fait attention ensuite à $B^0 = I_{2n}$ (donc au terme constant dans $P(B)$)

2. $\mathrm{rg}(B = \mathrm{rg}(A)$

3. Si A est DZ, on introduit $Q = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ SARS et annulateur de A. On distingue ensuite si $Q(0) = 0$ (ie $0 \in \mathrm{Sp}(A)$) ou non : si $Q(0) = 0$ alors Q annule B et est SARS donc B est DZ ; si $Q(0) \neq 0$ alors $P = XQ$ reste SARS et annule B donc B est DZ aussi.

4. Si B est DZ alors il existe P SARS annulateur de B, donc de A et A est DZ.

Exercice 139 *[sujet]* **1.** On vérifie que $P = \begin{pmatrix} 2I_n & 2I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ I_n & -2I_n \end{pmatrix}$ puis $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$

2. Si $A = QDQ^{-1}$ alors $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1}$ est diagonale. Réciproquement, si B est DZ alors $\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$ aussi donc A aussi (prendre un polynôme annulateur SARS de B)

Exercice 140 *[sujet]* $A \begin{pmatrix} I_n \\ -I_n \end{pmatrix} = 0$

On vérifie que $P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$ puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si $M = QDQ^{-1}$ alors $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1}$ est diagonale. Réciproquement, si A est DZ alors $\begin{pmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aussi donc M aussi (prendre un polynôme SARS de A)

Exercice 141 *[sujet]* Si B est DZ alors A aussi (prendre un polynôme annulateur SARS de B). Réciproquement B est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$: utiliser $P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ puis si $A = QDQ^{-1}$ alors $\begin{pmatrix} Q & \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-}$ est diagonale.

Exercice 142 *[sujet]* **1.** cours

2. cours

3. $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$
4. $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$
5. Soit P annulateur de M SARS, alors $P(A) = 0$ donc A est DZ
6. on a aussi $AP'(A) = 0$ et, si $P' = \prod_{i=1}^{d}(X - \mu_i)$ alors $\det(P'(A)) = \prod_{i=1}^{d}(-1)^n \mathcal{X}_A(\mu_i) \neq 0$ car les racines de P sont simples et $\mathrm{Sp}(A) \subset Z(P)$ donc les μ_i ne sont pas valeurs propres de A ; $AP'(A) = 0$ donne donc $A = 0$.

Exercice 143 *[sujet]* **1.** cours
2. $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & BP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$
3. Soit P annulateur de A SARS, alors $P(M) = 0$ donc M est DZ
4. Soit P SARS tel que $P(M) = 0$; on a $P(A) = 0$ donc A est DZ, on a aussi $BP'(A) = 0$ et, si $P' = \prod_{i=1}^{d}(X - \mu_i)$ alors $\det(P'(A)) = \prod_{i=1}^{d}(-1)^n \mathcal{X}_A(\mu_i) \neq 0$ car les racines de P sont simples et $\mathrm{Sp}(A) \subset Z(P)$ donc les μ_i ne sont pas valeurs propres de A ; $BP'(A) = 0$ donne donc $B = 0$.

Exercice 144 *[sujet]* **1.** Facile
2. $\mathrm{Tr}\, F(A,B) = (a+d)\,\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$. On TZ A et B : $A = PTP^{-1}$ et $B = QT'Q^{-1}$; d'après Q1, on a $F(A,B) = F(P,Q)F(T,T')F(P^{-1},Q^{-1})$ et on vérifie que $F(P^{-1},Q^{-1}) = F(P,Q)^{-1}$ (faire le produit avec Q1). On en déduit que $F(A,B)$ et $F(T,T')$ sont semblables ; comme $F(T,T')$ est triangulaire, on a $\det(F(A,B)) = \det(T)^2 \det(T')^2 = \det(A)^2 \det(B)^2$ et $\mathrm{rg}(F(A,B)) = \mathrm{rg}(A)\,\mathrm{rg}(B)$
3. Le calcul précédent montre que si A et B sont DZ alors $F(A,B)$ l'est aussi (prendre T et T' diagonales).

Exercice 145 *[sujet]* **1.** $\mathrm{rg}(B) = n + \mathrm{rg}(A)$
2. Par $C_2 \leftarrow C_2 + \frac{1}{\lambda}C_1$ (par blocs), on trouve $\mathcal{X}_B(\lambda) = \lambda^n \det\left(\lambda I_n - \frac{1}{\lambda}A\right) = \mathcal{X}_A(\lambda^2)$ donc $\mathcal{X}_B(X)$ et $\mathcal{X}_A(X^2)$ sont deux polynômes qui coïncident sur $\mathbb{C}^*$ donc sont égaux. Les vp de B sont les racines carrées des vp de A.
3. Si $\mathcal{X}_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ SARS alors $\mathcal{X}_B = \prod_{i=1}^{n}(X - \beta_i)(X + \beta_i)$ avec $\pm\beta_i$ les racines carrées complexes des α_i donc $\mathcal{X}_B$ reste SARS
4. Avec $n = 1$ et $A = 0$, on a $\mathcal{X}_A$ SARS mais B n'est plus DZ (nilpotente non nulle)
5. On a $B^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ donc si B est DZ alors B^2 aussi dans A aussi
6. Si B est DZ alors $m_0(B) = 2m_0(A)$ et $\dim(E_0(B)) = \dim(E_0(A))$ (avec le th du rg et la première question) ; comme A est DZ, on a $\dim(E_0(A)) = m_0(A)$; on en déduit $m_0(A) = 0$ donc A est inversible.
Réciproquement si A est DZ et inversible alors $\alpha_i \neq 0$ donc $m_{\alpha_i}(A) = m_{\beta_i}(B)$ et on vérifie $\dim(E_{\alpha_i}(A)) = \dim(E_{\beta_i}(B))$ car $\mathrm{rg}(B - \beta_i I_{2n}) = n + \mathrm{rg}(A - \alpha_i I_n)$ (faire $C_2 \leftarrow C_2 + \beta_i i C_1$ puis $L_2 \leftarrow L_2 + \beta_i I_n$)

Exercice 146 *[sujet]* **1.** Pour $\lambda \neq 0$, on a $\mathcal{X}_B \overset{C_2 \leftarrow \frac{1}{\lambda}C_2}{=} \frac{1}{\lambda^n}\begin{vmatrix} \lambda I_n - A & -\frac{1}{\lambda}I_n \\ -I_n & I_n \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \frac{1}{\lambda^n}\begin{vmatrix} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)I_n - A & -\frac{1}{\lambda}I_n \\ 0 & I_n \end{vmatrix}$ donc $\mathcal{X}_B(\lambda) = \frac{1}{\lambda^n}\mathcal{X}_A\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)$. Puis $\det(B) \overset{C1 \leftrightarrow C_2}{=} (-1)^n \begin{vmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = (-1)^n$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}(B)$. On en déduit $\lambda \in \mathrm{Sp}(B) \Leftrightarrow \lambda - \frac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}(A)$
2. On vérifie que que $x \mapsto x - \frac{1}{x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{-*}$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$ donc pour chaque valeur propre μ_i de A, il existe deux valeurs propres λ_i et λ_i' de B qui sont solutions de $x - \frac{1}{x} = \mu_i$; de plus $m_{\lambda_i}(B) = m_{\lambda_i'}(B) = m_{\mu_i}(A)$. On vérifie ensuite $\mathrm{rg}(B - \lambda I_{2n}) = n + \mathrm{rg}\left(A - \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)I_n\right))$ (même manip que pour le calcul de $\mathcal{X}_B$) donc $\dim(E_{\mu_i}(A)) = \dim(E_{\lambda_i}(B)) = \dim(E_{\lambda_i'}[B))$ donc A est DZ si et seulement si B est DZ

Exercice 147 *[sujet]* $P(B) = \begin{pmatrix} P(1)I_n & 0 \\ ? & P(A) \end{pmatrix}$ donc si B est DZ, on choisit P SARS tel que $P(B) = 0$ donc $P(A) = 0$ et A est DZ. $\mathcal{X}_B = (X-1)^n \mathcal{X}_A$ donc $m_1(B) = n + m_1(A)$; $\mathrm{rg}(B - I_{2n}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & A - I_n \end{pmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} I_n & A - I_n \end{pmatrix} = n$

donc $\dim(E_1(B)) = n$ puis $m_1(B) = \dim(E_1(B))$ donne $m_1(A) = 0$ donc $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.
Si A est DZ et $(X_1, \dots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A alors $Y_i = \begin{pmatrix} 0 \\ X_i \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de B (associés aux mêmes valeurs propres que celles de A). On vérifie que $Z_i = \begin{pmatrix} X_i \\ -(A - I_n)^{-1}AX_i \end{pmatrix}$ sont aussi des vecteurs propres de B associés à la valeur propre 1 ; reste à vérifier que $(Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n)$ est libre.

Exercice 148 *[sujet]* On a $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} A & -I_n \\ A^2 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0 & A^2 \end{pmatrix} = n + \mathrm{rg}(A^2)$.
Si M est DZ alors A aussi (prendre un polynôme SARS annulateur de M) ; de plus $\mathcal{X}_M = \mathcal{X}_A^2$ donc A et M ont les mêmes vp mais $m_\lambda(M) = 2m_\lambda(A)$. Si λ est une vp de A alors $\mathrm{rg}(M - \lambda I_{2n}) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)^2 = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$ car A est DZ ; on a donc par $\dim(E_\lambda(M)) = m_\lambda(M)$ (la multiplicité double mais la dimension de l'espace propre reste constante) donc M n'est pas DZ.

Exercice 149 *[sujet]* **1.** $M^2 = \mathrm{diag}(AB, BA)$

2. Cours

3. $X^2 - 1$ est SARS et annule M donc M est DZ et $\mathrm{Sp}(M) \subset \{\pm 1\}$. Comme $\mathrm{Tr}(M) = 0 = m_1(M) - m_{-1}M$, les deux réels 1 et -1 sont bien des valeurs propres et comme M est DZ, $m_1(M) = \dim(E_1(M)) = n = m_{-1}(M) = \dim(E_{-1}(M))$

4. On a $M^2 + I_{2n} = 0$ donc $X^2 + 1$ annule M et est SARS dans $\mathbb{C}$ donc M est DZ dans $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{\pm i\}$; comme M est réelle, on a $m_i(M) = m_{-i}(M)$ donc i et $-i$ sont bien valeurs propres et $m_i(M) = \dim(E_i(M)) = n = m_{-i}(M) = \dim(E_{-i}(M))$ (car M est DZ)

Exercice 150 *[sujet]* **1.** $N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

2. $N^2 = \mathrm{diag}(AB, BA)$ donc $P(N^2) = \mathrm{diag}(P(AB), P(BA))$.

3. Si N est DZ alors N^2 aussi donc AB aussi (prendre un polynôme annulateur de N^2). Réciproquement, si AB est DZ alors $BA = B(AB)B^{-1}$ (semblable à AB) l'est aussi ; si $AB = PDP^{-1}$ et $BA = QD'Q^{-1}$ alors $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} N^2 \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1}$ est diagonale donc N^2 est DZ. Le polynôme $R = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(N^2)} (X - \lambda)$ est SARS et annule N^2 donc le polynôme $R(X^2) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(N^2)} (X^2 - \lambda)$ annule N et est SARS car $\lambda \neq 0$ possède deux racines complexes distinctes. On en déduit N DZ

4. On reprend les notations précédentes : si $0 \in \mathrm{Sp}(M)$ alors $R(X^2)$ n'est plus à racines simples ; on écrit $R(X^2) = X^2 R_1(X^2)$ et si $R(M^2) = 0$ alors $M^2 R_1(M^2) = 0$ donc $\mathrm{Im}(R_1(M^2)) \subset \ker(M^2) = \ker(M)$ donc $XR_1(X^2)$ annule aussi M et est SARS donc M est DZ (réciproque facile en diagonalisant M)

Exercice 151 *[sujet]* **1.** $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$

2. Il suffit de vérifier que $\varphi : M \mapsto MB - AM$ est bijective : c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (dimension finie), donc il suffit de vérifier que φ est injective. Si $M \in \ker(\varphi)$ alors $AM = MB$, on en déduit $A^k M = MB^k$ puis $P(A)M = MP(B)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$. Avec $P = \mathcal{X}_A$, on en déduit (C-Ham) $M\mathcal{X}_A(B) = 0$; de plus $\det(\mathcal{X}_A(B)) = \prod_{i=1}^{n} \det(B - \alpha_i I_n)$ si α_i sont les valeurs propres de A. Comme $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$, $\det(B - \alpha_i I_n) \neq 0$ et $\mathcal{X}_A(B)$ est inversible. On en déduit $M = 0$ et φ est un isomorphisme.
On a $N = \begin{pmatrix} A & DB - AD \\ 0 & B \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} P^{-1}$ avec la matrice P de Q1.

3. Si on suppose $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset$ et si on choisit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B)$. A et B sont DZ donc il existe P, Q telles que $A = PD_A P^{-1}$ et $B = QD_B Q^{-1}$ avec le premier coefficient diagonal de D_A et D_B égal à λ. On a $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_A & 0 \\ 0 & D_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1}$ et $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_A & PCQ^{-1} \\ 0 & D_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1}$; il suffit donc de trouver $C' = PCQ^{-1}$ telle que $\Delta = \begin{pmatrix} D_A & 0 \\ 0 & D_B \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} D_A & C' \\ 0 & D_B \end{pmatrix}$ ne soient pas semblables. Avec $C' = E_{1,1}$, on a $\mathrm{rg}(\Delta - \lambda I_{2n}) \neq \mathrm{rg}(T - \lambda I_{2n})$ donc Δ et T ne sont pas semblables.

Exercice 152 *[sujet]* **1.** Si $A = PDP^{-1}$, utiliser $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$.

2. Si (X_i) est une base de vecteurs propres de A associée aux vp λ_i, on vérifie que (Y_i, Z_i) avec $Y_i = \begin{pmatrix} X_i \\ X_i \end{pmatrix}$ et $Z_i = \begin{pmatrix} X_i \\ -X_i \end{pmatrix}$ est une base de vecteurs propres de M associée aux vp $\lambda_i + 1$ et $\lambda_i - 1$.

Exercice 153 *[sujet]* En diagonalisant la matrice dans le cas $n=1$, on trouve que si $P=\begin{pmatrix} A^2 & A^2 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$, d'inverse $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} A^{-2} & -I_n \\ -A^{-2} & I_n \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}BP=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ donc on en déduit que M est DZ si et seulement si A l'est (utiliser des polynômes annulateurs).

Exercice 154 *[sujet]* Vérifier que si $P=\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$ d'inverse $P^{-1}=\dfrac{1}{2}P$ on a $P^{-1}CP=\operatorname{diag}(A+B,A-B)$.

Exercice 155 *[sujet]* On a $\operatorname{rg}(B)=2\operatorname{rg}(A)$.
B est semblable à $\operatorname{diag}(A,-A)$ avec $P=\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I8n \end{pmatrix}$ donc A est DZ si et seulement si B l'est.

Exercice 156 *[sujet]* **1.** $f(M)=\lambda M \Leftrightarrow \begin{cases} d=\lambda a \\ (1-\lambda^2)a=0 \\ (2-\lambda)b=0 \\ (2-\lambda)c=0 \end{cases}$ donc ce système admet des solutions non nulles si et seulement si $\lambda\in\{-1,1,2\}=\operatorname{Sp}(f)$ puis $E_1(f)=\operatorname{Vect}\{E_{1,1}+E_{2,2}\}$, $E_{-1}(f)=\operatorname{Vect}\{E_{1,1}-E_{2,2}\}$ et $E_2(f)=\operatorname{Vect}\{E_{1,2},E_{2,1}\}$

2. f est DZ et inversible puisque $0\notin\operatorname{Sp}(f)$.

Exercice 157 *[sujet]* $X^2-2X-3=(X+1)(X-3)$ annule ϕ donc DZ ; $E_{-1}(\phi)=\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc $m_{-1}(\phi)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ et $E_3(\phi)=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc $m_3(\phi)=\dfrac{n(n+1)}{2}$. On a donc $\operatorname{Tr}(\phi)=-\dfrac{n(n-1)}{2}+3\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\det(\phi)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}3^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Exercice 158 *[sujet]* **1.** Facile

2. $(X-a+b)(X-a-b)$ annule u et est SARS sauf pour $b=0$ donc u est DZ si $b\neq 0$. Si $b=0$ alors $u=aid$ est aussi DZ. Si $b\neq 0$ alors $E_{a+b}(u)=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $E_{a-b}(u)=\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3. $\operatorname{Tr}(u)=\dfrac{n(n+1)}{2}(a+b)+\dfrac{n(n-1)}{2}(a-b)$ et $\det(u)=(a+b)^{\frac{n(n+1)}{2}}(a-b)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Exercice 159 *[sujet]* $(X-1)(X-n-1)$ annule f donc DZ ; $E_1(f)=\ker(\operatorname{Tr})$ est un hyperplan et $E_{n+1}(f)=\operatorname{Vect}\{I_n\}$.
On trouve $f^{-1}=\dfrac{1}{n+1}(f-(n+2)id)$.

Exercice 160 *[sujet]* **1.** facile

2. Si $\varphi(M)=0$ alors $M\in\operatorname{Vect}\{B\}$ donc $\ker(\varphi)\subset\operatorname{Vect}\{B\}$. Si $\operatorname{Tr}(AB)\neq -1$ alors $\ker(\varphi)=\{0\}$ et $\operatorname{Im}(\varphi)=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; si $\operatorname{Tr}(AB)=-1$ alors $\ker(\varphi)=\operatorname{Vect}\{B\}$ et $\operatorname{rg}(\varphi)=n^2-1$

3. $M=\dfrac{\operatorname{Tr}(AM)}{\lambda-1}B$

4. $M\in E_1(\varphi)\Leftrightarrow \operatorname{Tr}(AM)=0$ donc $E_1(\varphi)$ est un hyperplan. Si $\operatorname{Tr}(AB)\neq 0$ alors $1+\operatorname{Tr}(AB)\in\operatorname{Sp}(\varphi)$ et φ est DZ ; si $\operatorname{Tr}(AB)=0$ alors $B\in E_1(\varphi)$, la seule valeur propre est 1 et φ n'est pas DZ (car $\varphi\neq id$)

Exercice 161 *[sujet]* $f_A(M)=0\Leftarrow M=\dfrac{\operatorname{Tr}(M)}{\operatorname{Tr}(A)}A\in\operatorname{Vect}\{A\}$ et on vérifie que $f_A(A)=0$ donc $\ker(f_A)=\operatorname{Vect}\{A\}$; $\operatorname{Im}(f_A)$ est donc un hyperplan et comme $\operatorname{Tr}(f_A(M))=0$, on a $\operatorname{Im}(f_A)=\ker(\operatorname{Tr})$. $X(X-\operatorname{Tr}(A))$ annule f_A donc DZ puis $E_{\operatorname{Tr}(A)}(f_A)=\ker(\operatorname{Tr})$

Exercice 162 *[sujet]* **1.** On peut remarquer $A=CC^T$ avec $C=\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{rg}(A)=1$ et comme $\operatorname{Tr}(A)=0$, on a $\mathcal{X}_A=X^3$ donc A n'est pas DZ (sinon elle serait semblable à 0 donc nulle)

2. Comme $A^2=0$, on a aussi $\varphi^2(X)=A^2XA^2=0$ donc $\varphi^2=0$ et $\operatorname{Sp}(\varphi)=\{0\}$ donc φ n'est pas DZ non plus

3. on a $f(X)=CC^TXCC^T=(C^TXC)CC^T$ car $C^TXC\in\mathbb{C}$ donc $f(X)\in\operatorname{Vect}\{A\}$ et $\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Vect}\{A\}$ (car $f\neq 0$)

Exercice 163 *[sujet]* **1.** cours

2. $(X-2)(X-3)$ annule A et est SARS ; $\operatorname{Sp}(A)\subset\{2,3\}$

3. f linéaire facile. Si $D=\operatorname{diag}(2I_p,3I_q)$ et $M=\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$ alors $f(M)=\begin{pmatrix} 4M_1 & 5M_2 \\ 5M_3 & 6M_4 \end{pmatrix}$ donc $E_4(f)=\left\{\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $E_5(f)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & M_2 \\ M_3 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ et $E_6(f)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_4 \end{pmatrix}\right\}$ donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=E_4(f)\oplus E_5(f)\oplus E_6(f)$ donc f est DZ et $\operatorname{Sp}(f)=\{4,5,6\}$

4. On pose $A = PDP^{-1}$, on a $g(M) = Pf(M)P^{-1}$ et comme $(X-4)(X-5)(X-6)$ annule f, il annule aussi g et est SARS donc g est DZ

Exercice 164 *[sujet]* **1.** S est sym réelle donc DZ et semblable à $\Delta = \mathrm{diag}(-5, 5)$ et à $P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = S'$ si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\phi(M) = \begin{pmatrix} 0 & -m_{1,2} \\ m_{2,1} & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Im}\,\phi = \mathrm{Vect}\{E_{1,2}, E_{2,1}\}$ est l'ensemble des matrices à diagonales nulles. Il existe donc M telle que $\phi(M) = S' = QSQ^{-1}$ puis $S = (Q^{-1}\mathrm{diag}(1,2)Q)(Q^{-1}MQ) - (Q^{-1}MQ)(Q^{-1}\mathrm{diag}(1,2)Q)$

3. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ et $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$ donc $x + y = 30$ et $xy = 200$ donc x et y sont les solutions de $X^2 - 30X + 200 = (X-10)(X-20)$. Dans ce cas, $\mathcal{X}_{AB} = \mathcal{X}_{BA}$ donc AB et BA sont DZ (sym réelles) et semblables à la même matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\alpha, \beta)$. Ainsi il existe P, Q tels que $AB = PDP^{-1}$ et $BA = QDQ^{-1}$; on vérifie alors qu'on peut prendre $A = P\mathrm{diag}(\alpha, 1)Q^{-1}$ et $B = Q\mathrm{diag}(1, \beta)P^{-1}$

Exercice 165 *[sujet]* **1.** Facile

2. $f_A^2(M) = A^2M$

3. $P(f_A)(M) = P(A)M$ donc f_A et A ont les mêmes polynômes annulateurs donc simultanément un polynôme annulateur SARS

4. Si $AX = \lambda X$ avec $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$, on construit $M = \begin{pmatrix} X & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et on vérifie $AM = \lambda M$

5. Si $AM = \lambda M$ avec $M \neq 0$, M possède une colonne C non nulle et on a $AC = \lambda C$. Égalité des spectres évidente vue les deux dernières questions

Exercice 166 *[sujet]* **1.** facile

2. cours

3. Si $AX_i = \alpha_i X_i$ et ${}^tBY_j = \beta_j Y_j$, on vérifie que $f(M_{i,j}) = (\alpha_i - \beta_j)M_{i,j}$; reste à prouver la liberté des $M_{i,j}$ (on aura alors une base de vecteurs propres) : si $\displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j} X_i\,{}^tY_j = 0$ alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j} y_j(k) X_i = 0$, où $(y_j(k))_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont les coordonnées de Y_j, donc par liberté des (X_i), on a $\displaystyle\sum_j a_{i,j} y_j(k) = 0$ pour tout (i, k) puis $\displaystyle\sum_j a_{i,j} Y_j = 0$ et par liberté des (Y_j), on termine par $a_{i,j} = 0$ pour tout (i, j) donc la famille est libre.

Exercice 167 *[sujet]* **1.** facile

2. $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0$ puis $A^k = A^kB - A^{k-1}BA$ donne aussi $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$

3. récurrence

4. si A n'est pas nilpotente alors A^k est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $k \in \mathbb{N}^*$ donc $\mathbb{N}^* \subset \mathrm{Sp}(f)$ qui est absurde car f a au plus n^2 vp

Exercice 168 *[sujet]* **1.** facile

2. $X(X-1)(X+1)$ annule ϕ

3. $X(X-1)(X+1)$ est SARS donc DZ ; si s ($\neq \pm id_E$) est la symétrie sur F parallèlement à G et p le projecteur sur F parallèlement à G ($s = 2p - id$) alors $\phi(p) = p$ donc $1 \in \mathrm{Sp}(\phi)$; si $q = id - p$ alors $\phi(q) = -q$ donc $-1 \in \mathrm{Sp}(\phi)$ et $\phi(f) = 0$ si f est un endomorphisme tel que $f(F) \subset G$ et $f(G) \subset F$ (il en existe des non nuls, les définir par leur matrice dans une base adaptée à $E = F \oplus G$) donc $0 \in \mathrm{Sp}(\phi)$

Exercice 169 *[sujet]* On a $f(M) = \lambda M \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)C_i = C_{i+1} & \text{si } i \leqslant n-1 \\ (1-\lambda)C_n = C_1 \end{cases}$ Ce système admet donc des solutions non nulles si et seulement si $(1-\lambda)^n = 1$ donc les vp de f sont $1 + z_k$ où (z_k) sont les racines $n^{\text{ème}}$ de 1 donc n vp distinctes. On vérifie que $E_{z_k} = \{(C, (1-z_k)C, \dots, (1-z_k)^{n-1}C), C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\}$ donc $\dim(E_{z_k}) = n$ et f est DZ

Exercice 170 *[sujet]* Si $\phi(P) = \lambda P$ et si $\lambda \neq 0$ alors $\deg(\phi(P)) = \deg(P)$ ce qui ne peut arriver que si $\deg(P) = 2$ (regarder le terme de degré $n+1$ en supposant $\deg(P) = n$) ; les éléments propres de ϕ sont donc les mêmes que ceux de l'endomorphisme induit sur $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Sp}(\phi) = \{0, 2, -2\}$, $E_0(\phi) = \mathrm{Vect}\{X^2 - 1\}$, $E_2(\phi) = \mathrm{Vect}\{(X+1)^2\}$ et $E_{-2}(\phi) = \mathrm{Vect}\{(X-1)^2\}$.

Exercice 171 *[sujet]* **1.** $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -b & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\mathcal{X}_f' = 3X^2 - 8X + 6 > 0$

3. $\mathcal{X}_f$ n'est donc pas scindé dans $\mathbb{R}$ (son unique racine réelle n'est pas triple) donc f n'est pas DZ.

Exercice 172 *[sujet]* **1.** $f(X^k) = (k+1)X^k - akX^{k-1} - a^k$ donc la matrice est triangulaire supérieure

2. $\mathrm{Sp}(f) = \{0\} \cup [\![2, n+1]\!]$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(f)$ qui est donc non bijectif et DZ ; chaque espace propre est une droite et on vérifie $E_{k+1}(f) = \mathrm{Vect}\{(X-a)^k\}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ et $E_0(f) = \mathbb{R}_0[X]$.

Exercice 173 *[sujet]* On a $f(X^k) = \dfrac{k}{n}X^{k-1} + \dfrac{n-1-k}{n}X^{k+1}$ donc $f(P) = \dfrac{1-X^2}{n}P' + \dfrac{n-1}{n}XP$ puis les éléments propres de nf ont été étudiés en cours : $\mathrm{Sp}(f) = \left\{\dfrac{k}{n}, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$ donc DZ

Exercice 174 *[sujet]* Si $\phi(P) = \lambda P$ avec $P \neq 0$ alors $\lambda = \deg(P) \in \mathbb{N}$ donc $\mathrm{Sp}(\phi) = \mathbb{N}$ et $E_k(\phi) = \mathrm{Vect}\{(X-a)^k\}$.
Si $P'|P$ alors $P = \deg(P)(X-a)P'$ (examiner les degrés) donc $P = \alpha(X-a)^k$ (récip évidente)

Exercice 175 *[sujet]* **1.** φ est un endomorphisme (cf cours compléments d'algèbre linéaire)

2. la matrice dans la base canonique de φ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{X}_f = (X-1)^2(X+1)^2$; $E_1(f) = \mathrm{Vect}\{X^2 + 1, X^3 + X\}$ et $E_{-1}(f) = \mathrm{Vect}\{X^2 - 1, X^3 - X\}$ donc DZ.

3. $\mathrm{Tr}(\varphi) = 0$ et $\det(\varphi) = 1$.

Exercice 176 *[sujet]* **1.** Facile (cf cours alg lin)

2. cours (Interpolation de Lagrange)

3. On a $L_iF = GQ_i + \varphi(L_i)$ et comme $G(a_j) = 0$ et $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$, on a $\varphi(L_i)(a_j) = 0$ si $i \neq j$ donc $\varphi(L_i) = \varphi(L_i)(a_i)L_i = F(a_i)L_i$; $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de vecteurs propres de φ.

Exercice 177 *[sujet]* **1.** Linéaire et $\phi(X^k) = \dfrac{1}{2^{n/2}}(1+X)^{n-k}(1-X)^k \in \mathbb{R}_n[X]$

2. Comme $Y = \dfrac{1-X}{1+X} \Leftrightarrow X = \dfrac{1-Y}{1+Y}$, on vérifie que $\phi^2 = id$

3. c'est une symétrie.

Exercice 178 *[sujet]* $t \mapsto P(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; linéaire et $u(X^k) = X^k + ku(X^{k-1})$ donne $u(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$ par récurrence sur k. La matrice de u est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale donc $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$ donc si u était DZ, on aurait $u = id$, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 179 *[sujet]* endomorphisme facile ; $X\left(X - \displaystyle\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t\right)$ annule u donc u est DZ

Exercice 180 *[sujet]* **1.** $\deg\phi(P) = \deg\phi$ donc on commence par les éléments propres de ϕ_n l'endomorphisme induit sur $\mathbb{R}_n[X]$: $\phi((X+a)^k) = 2^{-k}(X+1+2a)^k$ donc $(X-1)^k$ est une base de vecteurs propres de ϕ_n. Maintenant, si $\phi(P) = \lambda P$ et $\deg(P) = n$ alors P est un vecteur propre de ϕ_n de degré n donc $P = (X-1)^n$ et $\lambda = 2^{-n}$.

2. $\phi(f) = \lambda f$ si et seulement si pour tout x on a $\lambda f(x) = f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ donc on a $\lambda f(u_n) = f(u_{n+1})$; on vérifie $u_n = 2^{-n}(x-1)+1$ donc par continuité de f, on a $\lim f(u_n) = f(1)$. On a donc $\lambda^n f(x) = f(2^{-n}(x-1)+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$ ce qui donne $f(x) = 0$ si $\lambda \notin]-1,1]$; on vérifie que si f est un vecteur propre de ϕ associé à λ et si $f' \neq 0$ alors f' est un vecteur propre de ϕ associé à 2λ ; ainsi si f n'est pas un polynôme, on aura $f^{(k)} \neq 0$ et sera un vecteur propre de ϕ associé à $k\lambda$ qui finira par sortir de $]-1,1]$ ce qui est absurde. Les valeur propres de ϕ éventuelles sont donc 0 et celles trouvées à la première question. Enfin, $\phi(f) = 0$ donne $f = 0$ car $x \mapsto \dfrac{x+1}{2}$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc les éléments propres de ϕ sont les mêmes que ceux de l'endomorphisme de la première question.

Exercice 181 *[sujet]* **1.** évident

2. Si $P \in \ker(\phi)$ alors 0 et -1 sont racines multiples de P et $\deg(P) \leqslant 3$ donc $P = 0$. Comme $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, ϕ est un isomorphisme

3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4. a) $\mathcal{X}_M = (X-1)^2(X^2-4X+1)$ et on vérifie que $(X-1)(X^2-4X+1)$ est SARS dans $\mathbb{R}$ et annule M

b) déjà fait

c) $M^3 - 5M^2 + 5M = I_4$ donc $M^{-1} = M^2 + 5M + 5I_4$

5. a) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(Q) = M^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\end{pmatrix}$ donc $Q = X + 3X^2 + 2X^3 = X(X+1)(2X+1)$

b) fait

c) $\phi(Q(X-1)) = \begin{pmatrix}0\\1\\-6\\13\end{pmatrix}$ donc $\phi(Q) - \phi(Q(X-1)) = 6\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix} = 6\phi(X^2)$ donc $6X^2 = Q(X) - Q(X-1)$ par bijectivité de ϕ. On a alors, avec $Q(-1) = 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^k = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n} Q(k) - Q(k-1) = \frac{1}{6}Q(n)$

Exercice 182 *[sujet]* Si $T(f) = \lambda f$ alors $f(x+n) = \lambda^n f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ si $\lambda \neq 0$; $(\lambda^n f(x))$ ne converge en $+\infty$ et $-\infty$ que si $\lambda = 1$ donc les vp possibles sont 0 et 1. $T(f) = f$ si f est 1-périodique et CV en $\pm\infty$, f est donc constante : $1 \in \mathrm{Sp}(f)$ et $E_1(f) = \mathbb{R}$ (fct Ctes). $T(f) = 0$ donne $f = 0$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$.

Exercice 183 *[sujet]* $D(f) = \lambda f$ si et seulement si f est solution sur $\mathbb{R}$ de $xy'(x) = \lambda y(x)$ dont les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ sont $y(x) = ax^\lambda$ qui se prolongent de façon $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lambda \in \mathbb{N}$ donc $\mathrm{Sp}(D) = \mathbb{N}$ et $E_k(D) = \mathrm{Vect}\{X^k\}$.

Exercice 184 *[sujet]* **1.** facile

2. $\phi(f) = \lambda f$ si et seulement si f est solution de $y'(x) - (x+\lambda)y(x) = 0$ donc $\mathrm{Sp}(\phi) = \mathbb{R}$ et $E_\lambda(\phi) = \mathrm{Vect}\left\{x \mapsto \exp\left(\dfrac{x^2}{2} + \lambda x\right)\right\}$.
$f \in \ker(\phi^2)$ si et seulement si $\phi(f) \in \ker(\phi)$ donc si et seulement si $\phi(f) = \alpha e^{x^2/2}$ donc si et seulement si f est solution de $y'(x) - xy(x) = \alpha e^{x^2/2}$ donc $f(x) = e^{x^2/2}(\beta + \alpha x)$.

Exercice 185 *[sujet]* **1.** $\varphi(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et f étant continue en 0, on a (T-Y) $f(t) \underset{0}{=} f(0) + o(1)$ puis, en intégrant, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{0}{=} 0 + f(0)x + o(x)$ et $\lim\limits_{0} \varphi(f) = f(0)$ donc $\varphi(f)$ est continue en 0 donc dans E. La linéarité est évidente.

2. Si $\varphi(f) = 0$ alors $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour $x \in]0,1]$; en dérivant on obtient $f(x) = 0$ sur $]0,1]$ donc sur $[0,1]$ par continuité en 0.

3. $\varphi(f) = f$ si et seulement si $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)$ pour $x \in]0,1]$ (l'égalité est évidente en $x = 0$) ; comme $\varphi(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, $f = \varphi(f)$ est forcément $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$. En dérivant, on a $f(x) = f(x) + xf'(x)$ pour $x \in]0,1]$ donc f est constante sur $]0,1]$ donc sur $[0,1]$ par continuité en 0. On a donc $1 \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ et $E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}\{1\}$ (ensemble des fonctions constantes)

4. On fait de même avec $\lambda \notin \{0,1\}$, on a $\varphi(f) = \lambda f$ si et seulement si $f(0) = \lambda f(0)$ (donc $f(0) = 0$) et $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda x f(x)$ si $x \in]0,1]$. On prouve comme précédemment que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et on a $f(x) = \lambda(f(x) + xf'(x))$ donc f est solution sur $]0,1]$ de $y'(x) = \left(\dfrac{1}{\lambda} - 1\right)xy(x)$ dont les solutions sont $y(x) = \alpha x^{1/\lambda - 1}$. De telles fonctions se prolongent en 0 avec $y(0) = 0$ si et seulement si $\dfrac{1}{\lambda} - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda \in]0,1[$. Au final $\mathrm{Sp}(\varphi) =]0,1]$ et $E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}\left\{x \mapsto x^{1/\lambda - 1}\right\}$ (dte)

Exercice 186 *[sujet]* Linéarité facile ; $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ donc, comme f est continue, $T(f)$ est $\mathcal{C}^1$ donc continue.
On vérifie que $T(f)$ est en fait $\mathcal{C}^2$ et $T(f)'' = -f$ donc $T(f) = \lambda f$ alors soit $\lambda = 0$ et $f = -T(f)'' = 0$, soit $\lambda \neq 0$ et f est $\mathcal{C}^2$ elle aussi puis $T(f) = \lambda f$ si et seulement si f vérifie $-f + \lambda f'' = 0$ avec $f(0) = f'(1) = 0$; si $\lambda > 0$, on vérifie que cette équation différentielle n'a pas de solution non nulle avec $f(0) = f'(1) = 0$ alors que si $\lambda < 0$ cette équation admet des solutions non nulles si et seulement si $\sqrt{\lambda} \in \pi\mathbb{N}$.

Exercice 187 *[sujet]* **1.** Linéarité facile, $u(f)(0) = 0$ et comme $u(f)(x) = \cos(x)\displaystyle\int_0^x f \times \cos + \sin(x)\int_0^x f \times \sin$, la continuité de f donne la classe $\mathcal{C}^1$ de $u(f)$.

2. Si $u(f)=k$ alors $k=u(f)(0)=0$ et $u(f)'=0$ et $u(f)'(x)=f(x)-\sin(x)\int_0^x f\times\cos+\cos(x)\int_0^x f\times\sin$ donc $f(0)=0$ et $f(x)=\sin(x)\int_0^x f\times\cos-\cos(x)\int_0^x f\times\sin$ est $\mathcal{C}^1$ puis $f'(x)=\cos(x)\int_0^x f\times\cos-\sin(x)\int_0^x f\times\sin=u(f)(x)=0$; reste $f=0$.

3. Si $\lambda\neq 0$ alors $f=\dfrac{1}{\lambda}u(f)$ est $\mathcal{C}^1$ puis $f(0)=0$ et $\lambda f'(x)=f(x)-\sin(x)\int_0^x f\times\cos+\cos(x)\int_0^x f\times\sin$ donc f est $\mathcal{C}^2$, $f'(0)=0$ et $f''(x)=f'(x)-u(f)(x)=f'(x)-\lambda f(x)$; la seule solution avec $f(0)=f'(0)=0$ est $f=0$.

Exercice 188 *[sujet]* $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&-11&6\end{pmatrix}$ $\mathcal{X}_A=(X-1)(X-2)(X-3)$ annulateur de A et tous calculs faits, on trouve $u_n=\dfrac{6u_0-5u_1+u_2}{2}+(-3u_0+4u_1-u_2)2^n+\dfrac{2u_0-3u_1+u_2}{2}3^n$