TD11 : Réduction

Exercice 1

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (Mines-Télécom PSI 2023)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A.

2. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique.

3. Déterminer les éléments propres de A.

4. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 (CCINP PSI 2023)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

1. Déterminer $\mathcal{X}_{M_\alpha}$ et les valeurs propres de M_α

2. M_α est-elle diagonalisable ? Si oui, P inversible et D diagonale telles que $M_\alpha = PDP^{-1}$

3. M_α est-elle inversible ?

4. Lorsque M_α n'est pas inversible, déterminer des bases de $\ker(M_\alpha)$ et $\operatorname{Im}(M_\alpha)$.

Exercice 4 (CCINP PSI 2023)

Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ On note P_n le polynôme caractéristique de A_n.

1. Donner le spectre de A_2

2. Montrer que, pour $n \geqslant 3$, $P_n = (X - n + 1)P_{n-1} - X(X-1)\dots(X-n+2)$

3. Montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], (-1)^{n-k} P_n(k) > 0$ et en déduire que A_n possède une valeur propre dans chacun des intervalles $]0, 1[,]1, 2[, \dots,]n-2, n-1[$. *(*)*

4. En déduire que A_n est diagonalisable.

Exercice 5 (Mines-Ponts PSI 2018)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A. *(*)*

Exercice 7 (Mines-Ponts PSI 2019)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Trouver les $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $g^3 + 2g = f$. *(*)*

Exercice 8 (Centrale PSI 2023)

Soit $A \in \}_n(\mathbb{R})$ et B la matrice par blocs définie par : $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer $\mathcal{X}_B$ en fonction de $\mathcal{X}_A$. *(*)*

2. Montrer que si A diagonalisable alors B est diagonalisable. *(*)*

Indications

Exercice 4

3. *commencer par une récurrence sur n*

Exercice 6

a) *Commencer par les droites stables.*

b) *Si P est un plan stable et v l'endomorphisme induit par A sur P, déterminer les valeurs possibles de $\mathcal{X}_v$, en déduire* $\mathrm{Sp}(v)$ *puis une base de P.*

Exercice 7

a) *Montrer que A est semblable à D diagonale*

b) *Montrer que si g est une solution alors g et f commutent*

c) *trouver les solutions g*

Exercice 8

1. *commencer par le cas $\lambda \neq 0$ et faire des manipulations sur le déterminant.*

2. *en déduire les valeurs propres de B en fonction de celle de A, ainsi que les ordres de multiplicité. Pour la dimension des espaces propres, on peut utiliser le rang (et faire un calcul par manipulations sur les matrices)*