

I Suites et séries de fonctions

Les fonctions considérées sont à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1. Intégration et dérivation des suites et séries de fonctions

a) Intégration des suites de fonctions :

- si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

- Théorème de convergence dominée (*admis*).

b) Intégration des séries de fonctions :

- si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ telle que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

- Théorème d'intégration terme à terme (*admis*).

c) Dérivation des suites et séries de fonctions : si (f_n) est une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I , $k \geq 1$, telle que, pour $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I et $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment de I alors f , la limite de (f_n) , est de classe \mathcal{C}^k sur I et $f^{(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}$.

Application aux séries : si (f_n) est une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I telle que, pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I et telle que $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I alors

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \text{ et, pour } j \in \llbracket 0, k \rrbracket, S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}.$$

II Réduction des endomorphismes

1. Éléments propres

- a) Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme : définitions, spectre, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes sont en somme directe, liberté d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes, stabilité des espaces propres de u par un endomorphisme commutant avec u .
- b) Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée : définition, cas d'une matrice réelle (les valeurs propres complexes sont conjuguées et les espaces propres correspondants sont de même dimension).
- c) Polynôme caractéristique : ordre de multiplicité des valeurs propres, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres, deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_{AT}$, lien entre la dimension d'un espace propre et l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante. Le polynôme caractéristique de tout endomorphisme induit par u sur un sous-espace stable divise \mathcal{X}_u .

2. Réduction des endomorphismes en dimension finie (et des matrices carrées)

- a) Diagonalisation : définitions équivalentes (E est somme directe des espaces propres, existence d'une base de E formée de vecteurs propres, $\dim(E)$ est égal à la somme des dimensions des sous-espaces propres), u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ , $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$, cas particulier des endomorphismes dont le polynôme est scindé à racines

À suivre : la fin de la réduction