Correction du DM8

(Extrait CCP PC 2012 Maths 1)

Partie I

1. a) La première ligne de B est nulle donc $\mathrm{rg}(B) \leqslant 2$ et $\boxed{B \notin \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})}$

b) En développant par la dernière ligne, on a $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$ donc $\boxed{A \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})}$

c) On vérifie que $AC = B$ donc, comme A est inversible, on a $\boxed{C = A^{-1}B}$

2. a) $\mathcal{X}_{A,B}(\lambda) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 4\lambda - 2 & 2\lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda + 1 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{Dvt}/L_3}{=} (2\lambda - 1) \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4\lambda - 2 & 2\lambda - 1 \end{vmatrix}$ donc $\boxed{\mathcal{X}_{A,B}(\lambda) = (2\lambda - 1)^2}$

b) $\boxed{\mathrm{Sp}(A, B) = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$

c) $A - \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}\left(A - \frac{1}{2}B\right) = 1$ et $\boxed{\dim(E_{1/2}(A, B)) = 2}$

Comme $C_1 = 3C_2$ et $C_2 = C_3$, les vecteurs $(1, -3, 0)$ et $(0, 1, -1)$ sont deux vecteurs libres de $E_{1/2}(A, B)$ donc $\boxed{((1, -3, 0), (0, 1, -1)) \text{ est une base de } E_{1/2}(A, B)}$

3. a) $\mathcal{X}_{B,A}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3\lambda & \lambda & \lambda \\ 2\lambda - 4 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{Dvt}/L_3}{=} (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 3\lambda & \lambda \\ 2\lambda - 4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \boxed{\lambda(\lambda - 2)^2}$ donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A, B) = \{0, 2\}}$

b) $E_0(B, A) = E_0(B)$, comme $\mathrm{rg}(B) = 2$ ($C_1 = 2C_2$ et C_2, C_3 libres), on a $\dim(E_0(B, A)) = 1$ et on vérifie $Bu_1 = 0$; d'autre part, $\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(B)$ car $C = A^{-1}B$ (et A^{-1} est inversible) donc $\dim(E_0(C)) = 1$ et $Cu_1 = 0$ donc $\boxed{E_0(B, A) = E_0(C) = \mathrm{Vect}\{u_1\}}$

$B - 2A = -2\left(A - \frac{1}{2}B\right)$ donc $E_2(B, A) = E_{1/2}(A, B) = \mathrm{Vect}\{u_2, u_3\}$ (car u_2 et u_3 sont deux vecteurs libres de $E_2(B, A)$) ; d'autre part, on vérifie que $\mathrm{rg}(C - 2I_3) = 1$ donc $\dim(E_2(C)) = 2$ et comme $Cu_2 = 2u_2$ et $Cu_3 = 2u_3$, on a $\boxed{E_2(B, A) = E_{1/2}(A, B) = E_2(C) = \mathrm{Vect}\{u_2, u_3\}}$

c) $\dim(E_0(B, A)) + \dim(E_2(B, A)) = 2 + 1 = 3$

4. a) (u_1) est une base de $E_0(C)$ et (u_2, u_3) une base de $E_2(C)$ donc (les espaces étant en somme directe), $\mathcal{F}$ est une famille libre de 3 vecteurs donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

b) $\boxed{R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}}$

c) Comme $C = A^{-1}B$, on a $\boxed{B = ARDR^{-1}}$

d) Il suffit de prendre $\boxed{P = AR \text{ et } Q = R^{-1}}$ (P est bien inversible car A et R le sont)

Partie II

1. a) $\mathcal{X}_{A,B}(\lambda) = \det(\lambda B - A) = \det(B) \times \det(\lambda I_n - B^{-1}A)$ donc $\boxed{\mathcal{X}_{A,B} = \det(B) \times \mathcal{X}_{B^{-1}A} \in \mathbb{R}_n[X] \text{ est de degré } n}$

b) Si $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\mathrm{rg}(A - \lambda B) \leqslant 1$ donc $\mathcal{X}_{A,B} = 0$.

c) On prouve par récurrence sur n que $\deg(\mathcal{X}_{A,B}) \leqslant n$ si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Le résultat est vrai si $(A, B) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})^2$. Si on suppose le résultat vrai pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et si on choisit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})^2$ alors en développant par la dernière colonne, on a

$$\mathcal{X}_{A,B}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+n+1}(\lambda b_{i,n+1} - a_{i,n+1})\mathcal{X}_{A_{i,n+1},B_{i,n+1}}(\lambda)$$

où on note $A_{i,n+1}$ (resp. $B_{i,n+1}$) la matrice extraite de A en supprimant la $n+1^{\text{ème}}$ colonne et la $i^{\text{ème}}$ ligne. Par hypohèse de récurrence, $\deg(\mathcal{X}_{A_{i,n+1},B_{i,n+1}}) \leqslant n$ donc on a bien $\deg(\mathcal{X}_{A,B}) \leqslant n + 1$; ce qui prouve $\boxed{\deg(\mathcal{X}_{A,B}) \leqslant n \text{ si } (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2}$

2. a) Si $(A,B)\sim(A',B')$ alors il existe $(P,Q)\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $A=PA'Q$ et $B=PB'Q$ donc pour $\lambda\in\mathbb{K}$, on a $A-\lambda B=P(A'-\lambda B')Q$.
Réciproquement, si $A-\lambda B=P(A'-\lambda B')Q$ pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, alors pour $\lambda=0$, on a $A=PA'Q$ puis (par différence), $\lambda B=\lambda PB'Q$ pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$ donc $B=PB'Q$ (avec $\lambda=1$ par exemple) ; ainsi $(A,B)\sim(A',B')$.

b) On a $\boxed{\mathcal{X}_{A,B}(\lambda)=\det(P)\mathcal{X}_{A',B'}(\lambda)\det(Q)}$ comme $\det(P)\det(Q)\neq 0$, on a bien $\boxed{\mathrm{Sp}(A,B)=\mathrm{Sp}(A',B')}$

3. a) $\mathcal{X}_{A,B}(\lambda)=\det(A-\lambda B)=\lambda^n\det\left(\dfrac{A}{\lambda}-B\right)$ donc $\boxed{\mathcal{X}_{A,B}(\lambda)=(-\lambda)^n\mathcal{X}_{B,A}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\text{ pour }\lambda\neq 0}$

b) Si (A,B) est régulier, le polynôme $\mathcal{X}_{A,B}$ n'est pas le polynôme nul donc il existe $\lambda_0\neq 0$ tel que $\mathcal{X}_{A,B}(\lambda_0)\neq 0$ (sinon $\mathcal{X}_{A,B}$ s'annule sur $\mathbb{K}^*$ donc est nul) ; on en déduit que $\mathcal{X}_{B,A}(\lambda_0)\neq 0$ donc $\boxed{(B,A)\text{ est régulier}}$

c) On a $\mathcal{X}_{B,A}=X^rQ$ avec $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{r-s}a_{k+r}X^k$ donc $Q(0)=a_r\neq 0$, ainsi $\boxed{0\text{ est racine d'ordre }r\text{ de }\mathcal{X}_{B,A}}$

Pour $\lambda\neq 0$, on a $\mathcal{X}_{A,B}(\lambda)=(-\lambda)^n\displaystyle\sum_{k=r}^{s}a_k\frac{1}{\lambda^k}=(-1)^n\sum_{h=n-s}^{n-r}a_{n-h}\lambda^h$ donc $\mathcal{X}_{A,B}=(-1)^n\displaystyle\sum_{h=n-s}^{n-r}a_{n-h}X^h$ (car deux polynômes égaux sur $\mathbb{K}^*$ sont égaux sur $\mathbb{K}$). Ainsi, comme $a_r\neq 0$, on a $\boxed{\deg(\mathcal{X}_{A,B})=n-r}$

d) Si on suppose B inversible, on a $\mathcal{X}_{B,A}(0)=\det(B)\neq 0$ donc $r=0$ et $\deg(\mathcal{X}_{A,B})=n$.
Si on suppose $\deg(\mathcal{X}_{A,B})=n$ alors $r=0$ donc $\mathcal{X}_{B,A}(0)=a_0\neq 0$ et $0\notin\mathrm{Sp}(B,A)$.
Enfin, si on suppose $0\notin\mathrm{Sp}(B,A)$ alors $\det(B)=\mathcal{X}_{B,A}(0)\neq 0$ donc B est inversible.

4. S'il existe D diagonale et P inversible telles que $B^{-1}A=PDP^{-1}$ alors $A=(BP)DP^{-1}$ et $B=(BP)I_nP^{-1}$ donc $(A,B)\sim(D,I_n)$ donc $\boxed{(A,B)\text{ est diagonalisable}}$

Partie III

1. a) Si B est inversible alors C aussi donc $E_0(C)=\{0\}$ puis $E_0(A,B)=\ker(A)=\{0\}$ et enfin, $E_\infty(A,B)=\{0\}$ donc les trois espaces sont égaux.
Si B n'est pas inversible, on a $CX=0\Leftrightarrow BX=0$ car A est inversible donc $E_0(C)=E_0(A,B)$ et, par définition, $E_\infty(B,A)=E_0(A,B)$. Dans les deux cas, on a $\boxed{E_0(C)=E_0(A,B)=E_\infty(B,A)}$

b) On a $CX=\lambda X\Leftrightarrow BX=\lambda AX\Leftrightarrow AX-\dfrac{1}{\lambda}BX=0$ puisque A est inversible et $\lambda\neq 0$. On a donc $\boxed{E_\lambda(C)=E_{1/\lambda(A,B)}\text{ pour }\lambda\neq 0}$

c) On a $\mathcal{X}_C(\lambda)=\det(\lambda I_n-A^{-1}B)=\dfrac{1}{\det(A)}\det(\lambda A-B)$ donc, pour $\lambda\neq 0$, on a $\mathcal{X}_C(\lambda)=\dfrac{\lambda^n}{\det(A)}\mathcal{X}_{A,B}(1/\lambda)$.
On distingue alors 2 cas : si B est inversible alors C aussi donc $\lambda\in\mathrm{Sp}(C)$ si et seulement si $\mathcal{X}_C(\lambda)=0$ (et on aura alors $\lambda\neq 0$), ce qui équivaut donc à $\mathcal{X}_{A,B}(1/\lambda)=0$ donc $\mathrm{Sp}_\infty(A,B)=\left\{\dfrac{1}{\lambda_i}\right\}$. Par contre, si B n'est pas inversible alors le raisonnement précédent reste valable pour toutes les valeurs propres non nulles de C mais comme $0\in\mathrm{Sp}(C)$, on a aussi, par définition de Sp_∞, $\boxed{\mathrm{Sp}_\infty(A,B)=\left\{\dfrac{1}{\lambda},\lambda\in\mathrm{Sp}(C)\right\}}$

2. Si B est inversible alors $d=\deg(\mathcal{X}_{A,B})=n$ d'après **II.3.d** et $m_\infty(A,B)=0=n-d$. On a justifié à la question précédente que si $\mathcal{X}_C=\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{n_i}$ alors $\mathcal{X}_{A,B}(x)=\det(A)x^n\mathcal{X}_C\left(\dfrac{1}{x}\right)=\det(A)\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(1-x\lambda_i)^{n_i}$ pour $x\neq 0$ donc $\mathcal{X}_{A,B}(X)=\dfrac{\det(A)}{\det(C)}\displaystyle\prod_{k=1}^{k}\left(X-\frac{1}{\lambda_i}\right)^{n_i}$ car $\det(C)=\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\lambda_i^{n_i}$ (cette égalité étant à priori valable pour $X\neq 0$ mais elle reste valable en 0 puisque 2 polynômes égaux sur $\mathbb{K}^*$ sont égaux sur $\mathbb{K}$). On a $n=\deg(\mathcal{X}_C)=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_i=\sum_{i=1}^{k}m_{\lambda_i(A,B)}$.
Si cette fois, B n'est pas inversible, on a $m_\infty(A,B)=m_0(B,A)=n-d$ d'après **II.3.c** et, en supposant $\lambda_1=0$ (donc $n_1=m_\infty(A,B)$), on a $\mathcal{X}_{A,B}=\det(A)\displaystyle\prod_{k=2}^{k}(1-X\lambda_i)^{n_i}$. On a donc $\displaystyle\sum_{i=2}^{k}m_{1/\lambda_i}(A,B)=n-n_1$ ce qui donnera encore $\boxed{\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}_\infty(A,B)}m_\lambda(A,B)=n}$

3. a) Évident avec la question précédente.

b) En relisant les calculs faits aux questions **III.1** et **III.2**, on vérifie que l'on obtient $n=\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(C)}\dim(E_\lambda)(C)=n$ donc $\boxed{C\text{ est diagonalisable}}$

c) Il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $C = PDP^{-1} = A^{-1}B$ donc $B = (AP)DP^{-1}$ et $A = (AP)I_nP^{-1}$ avec AP inversible donc $\boxed{(A,B) \text{ est diagonalisable}}$

Partie IV

1. On a $\boxed{A_n = B_n^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

2. Évident.

3. a) On vérifie $\boxed{c_1(\lambda) = 0,\ c_2(\lambda) = \lambda,\ c_3(\lambda) = 0 \text{ et } c_4(\lambda) = \lambda^2}$

b) Il suffit de développer successivement le déterminant $c_n(\lambda)$ par rapport à sa première ligne puis par rapport à la première colonne.

c) Par une récurrence assez immédiate, on a $\boxed{c_{2k}(\lambda) = \lambda^k \text{ et } c_{2k+1}(\lambda) = 0}$

d) On en déduit que $\boxed{(A,B) \text{ est régulier si et seulement si } n \text{ est pair}}$

4. a) On a $\dim(E_0(A_4,B_4)) = \dim(\ker(A_4)) = 4 - \mathrm{rg}(A_4) = 1$ ($C_1 = 0$ et les 3 autres collonnes de A_4 sont libres) puis $\dim(E_\infty(A_4,B_4)) = \dim(\ker(B_4)) = \dim(\ker(A_4)) = 1$

b) $c_4(\lambda) = \lambda^2$ donc $\boxed{m_0(A_4,B_4) = 2}$ puis, comme $B_4 = {}^tA_4$, on a $\mathcal{X}_{B_4,A_4}(\lambda) = c_4(\lambda) = \lambda^2$ et comme B_4 n'est pas inversible, on a $\boxed{m_\infty(A,B) = 2}$.

c) Le couple (A_4,B_4) ne vérifie pas $\mathcal{H}$ (mais est régulier) donc $\boxed{(A_4,B_4) \text{ n'est pas diagonalisable}}$

Remarque : admettre la propriété énoncée à la fin de la partie **III** ne sert à rien en fait. Si on suppose (A_4,B_4) diagonalisable, on a $A_4 = PDQ$ et $B_4 = PD'Q$ avec P et Q inversibles ; on a alors $\mathrm{rg}(A_4) = \mathrm{rg}(D) = 3$ et $\mathrm{rg}(B_4) = \mathrm{rg}(D') = 3$, ainsi D et D' sont deux matrices diagonales ayant chacune 1 coefficient diagonal nul et trois non nuls. De plus $c_4(\lambda) = \det(\lambda B_4 - A_4) = \det(P)\det(\lambda D' - D)\det(Q)$ donc $\det(\lambda D' - D) = \prod_{i=1}^{4}(\lambda d'_i - d_i)$ devrait être un polynôme de degré 2, ce qui est absurde si 3 des coefficients d'_i sont non nuls.