TD10 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1 **(CCINP PSI 2022)**
Soient $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sh} x}$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 nx}$

1. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^*$; on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

3. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. *(*)*

4. Exprimer f_n à l'aide de f et en déduire un équivalent simple de S en 0

Exercice 2 **(Mines-Télécom PSI 2021)**
Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\sqrt{n+x} - \sqrt{n}\right]$ pour $x \geqslant 0$.

1. Montrer que f est bien définie

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; étudier ses variations.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{+\infty} f = +\infty$. *(*)*

Exercice 3 **(Mines-Ponts PSI 2018)**

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

3. f est-elle dérivable en 0 ? Continue en 0 ? *(*)*

Exercice 4 **(CCP PSI 2010)**

1. Étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $f : t \mapsto \dfrac{\arctan t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^{3/2} + t^n}\,\mathrm{d}t$ et limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2019)**
Pour $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(nt)}{(1+n^4t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de I_n

2. Limite et équivalent de I_n ? *(*)*

Exercice 6 **(CCINP PSI 2022)**
Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. Montrer que I existe

2. Montrer que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

Exercice 7 **(CCINP PSI 2023)**
Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I converge.

2. Montrer que $\forall t \in \,]0, +\infty[\,,\ \dfrac{\sin t}{\operatorname{sh} t} = 2e^{-t} \sin t \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt}$.

3. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2 + 1}$. *(*)*

4. Montrer que : $\dfrac{\pi}{4} \leqslant I \leqslant 1 + \dfrac{\pi}{4}$. *(*)*

Indications

Exercice 1

3. *étudier les variations de f_n' pour calculer $\|f_n'\|_\infty$.*

Exercice 2

3. *raisonner par l'absurde en tenant compte de la monotonie et commencer par vérifier que $f(x) \geqslant S_{2n+1}(x)$ avant de séparer les termes pairs/impairs.*

Exercice 3

3. *pour la dérivabilité, on peut soit étudier le taux d'accroissement, soit la limite de f' selon ce qui paraît le plus simple. Pour la continuité en 0, prouver la CVU.*

Exercice 5

2. *pour l'équivalent, commencer par un changement de variable*

Exercice 7

3. *utiliser $|\sin(t)| \leqslant t$ pour H4 dans le TITT.*

4. *comparaison série/intégrale.*