TD12 : Réduction

Exercice 1 **(CCP PSI 2012)**
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = 10$, $\mathrm{Tr}(A) = -6$ et $A - I_3 \notin \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$. Exprimer A^{-1} comme un polynôme en A. *(*)*

Exercice 2 **(TPE-EIVP PSI 2019)**
Soit $n \geqslant 2$; trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 - A^3 - A + I_n = 0$ et $A^2 - 3A + 2I_n = 0$

Exercice 3 **(CCP PSI 2023)**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P annulateur de A ; montrer que les valeurs propres de A sont des racines de P.
2. Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $A^2 + A^T = I_3$? *(*)*

Exercice 4 **(Mines-Télécom PSI 2023)**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A - 5I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$. *(*)*

Exercice 5 **(CCINP PSI 2023)**
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose : $\forall M \in E, u(M) = aM + bM^T$.

1. Montrer que u est un endomorphisme.
2. Montrer que u est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres. *(*)*
3. Calculer $\mathrm{Tr}\, u$ et $\det u$.

Exercice 6 **(CCP PSI 2018)**
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, non nulles, et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto M + \mathrm{Tr}(AM)B$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer $\dim(\ker(\varphi))$ et $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))$. *(*)*
3. Montrer que si M est un vecteur propre de φ associé à $\lambda \neq 1$, alors M est colinéaire à B.
4. Déterminer les valeurs propres de φ ; φ est-il diagonalisable ?

Exercice 7 **(CCINP PSI 2023)**
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B l'est et déterminer les valeurs propres de B en fonction de celles de A. *(*)*

Exercice 8 **(CCINP PSI 2022)**
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Montrer que, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.
2. Déterminer $\mathrm{rg}(B)$ en fonction de $\mathrm{rg}(A)$.
3. On suppose A diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable. *(*)*
4. Étudier la réciproque.

Exercice 9 **(CCP PSI 2017)**

1. Soient $(A, B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})^2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que N est inversible et déterminer N^{-1}. *(*)*
2. Calculer N^2 et $P(N^2)$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$.
3. Si N est diagonalisable, AB l'est-elle ? Étudier la réciproque. *(*)*

Indications

Exercice 1

trouver $\mathcal{X}_A$.

Exercice 3

2. *trouver un polynôme annulateur de* A *(de degré 4) ; la réponse est qu'une telle matrice n'existe pas*

Exercice 4

étudier $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ *et chercher si les vp sont réelles ou non (étude de fonction).*

Exercice 5

2. *le plus rapide est de trouver un polynôme annulateur.*

Exercice 6

2. $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ *est une forme linéaire non nulle (à vérifier).*

Exercice 7

2. *utiliser la diagonalisation de* M *(et les coefficients des matrices* P *et* P^{-1}*, à déterminer) pour diagonaliser* B *par blocs*

Exercice 8

3. *distinguer les cas* $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ *et* $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$ *pour construire un polynôme annulateur de* B

Exercice 9

1. *chercher* N^{-1}*, de la même forme que* N.

3. *a)* *pour le premier sens, si* N *est DZ,* N^2 *aussi puis utiliser un polynôme annulateur de* N^2.

b) *pour la réciproque : justifier que* N^2 *est DZ, puis introduire un polynôme annulateur de* N^2*, en déduire un polynôme annulateur de* N*, le factoriser (théoriquement) dans* $\mathbb{C}$ *et vérifier qu'il est à racines simples si* 0 *n'est pas une racine.*