I Expériences finies

Exercice 1 *[Solution]*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ avec $2 \leqslant p \leqslant n$. Une urne contient n boules numérotées. On tire successivement avec remise p boules.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir p numéros différents.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir $p-1$ numéros différents.
3. Déterminer la probabilité de l'événement « le numéro de la première boule obtenue est strictement inférieur à celui de la dernière boule obtenue ».
4. Déterminer la probabilité de l'événement « les numéros obtenus forment une suite strictement croissante ».
5. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer la probabilité de l'événement « le plus grand numéro obtenu vaut k ».
indication : introduire E_i = « tous les numéros obtenus sont $\leqslant i$ ».

Exercice 2 *[Solution]*
$\dfrac{1}{4}$ de la population est vaccinée. Parmi les vaccinés, $\dfrac{1}{12}$ tombent malades et $\dfrac{1}{5}$ des malades ont été vaccinés.

1. Déterminer la probabilité pour qu'une personne tombe malade.
2. Déterminer la probabilité de tomber malade pour une personne non vaccinée.

Exercice 3 *[Solution]*
Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules rouges et 7 boules vertes. On tire une boule dans cette urne puis on la remet dans l'urne en ajoutant une boule de la couleur que l'on vient d'obtenir. On tire alors une deuxième boule dans l'urne.

1. Déterminer la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur.

Exercice 4 *[Solution]*
On dispose de deux pièces : une équilibrée A et une qui donne pile avec la probabilité de $\dfrac{1}{3}$. On choisit au hasard une pièce et on la lance. Si on obtient pile on rejoue avec la même pièce, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une série de lancers.

1. On pose A_k=« on utilise la pièce A au $k^{\text{ème}}$ lancer ». Exprimer $P(A_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$
2. Calculer la probabilité d'obtenir face au $n^{\text{ème}}$ lancer.

Exercice 5 (Mines-Télécom PSI 2019) *[Solution]*
Un prédateur R chasse de la façon suivante : s'il a mangé un jour, il ne va pas chasser le lendemain ; s'il n'a pas mangé, il part chasser et attrape une proie avec la probabilité $p = \dfrac{1}{2}$ (et la mange). Le premier jour, il n'a pas mangé et part donc à la chasse.

1. Déterminer la probabilité que R reste à jeun les n premiers jours.
2. Quelle est la probabilité que R attrape sa première proie le $n^{\text{ème}}$ jour ?
3. Si p_i est la probabilité de « R attrape une proie le $i^{\text{ème}}$ jour », déterminer une relation entre p_{i+1} et p_i.
4. Déterminer la limite de (p_i).

Exercice 6 (Mines-Télécom PSI 2018) *[Solution]*
Madame M prend tous les jours un bus A ou B. Lorsqu'elle prend le bus A (resp. B) il l'amène à l'heure avec la probabilité a (resp. b). Le premier jour, elle prend le bus A. On note A_k l'événement « Madame M prend le bus A le jour k ». Si un bus ne l'amène pas à l'heure un jour, elle prend l'autre le jour suivant, sinon elle reprend le même bus.

1. Montrer que $P(A_{k+1}) = (a+b-1)P(A_k) - b + 1$ pour $k \geqslant 1$ et en déduire $P(A_k)$.
2. On note H_n : « Madame M arrive à l'heure le jour n ». Déterminer $P(H_n)$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(H_n)$.

Exercice 7 (CCINP PSI 2021) *[Solution]*
Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = J - I_3$. On note A, B et C trois points du plan sur lesquels une puce peut se déplacer ; si elle est sur un point à un instant, elle saute de façon équiprobable sur l'un des deux autres à l'instant suivant. On note A_n l'événement « la puce est en A à l'instant n » (recip. B_n et C_n en B et en C) et $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$

1. Trouver une relation entre U_{n+1} et U_n.

2. Diagonaliser M et en déduire une expression de M^n

3. Trouver un polynôme annulateur de J et en déduire une autre expression de M^n.

4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 8 **(Centrale PSI 2015)** *[Solution]*
Trois joueurs A, B et C se passent une balle de la façon suivante :
— A passe la balle à B avec une probabilité $1/3$ et à C avec une probabilité $2/3$.
— B passe la balle à A avec une probabilité $1/3$ et à C avec une probabilité $2/3$.
— C passe la balle à A avec une probabilité $1/3$ et à B avec une probabilité $2/3$
On note $X_n = {}^t\big(p(A_n) \quad p(B_n) \quad p(C_n)\big)$, où A_n est l'événement « A a la balle à l'instant n », B_n et C_n de même avec B et C.

1. Déterminer $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = MX_n$.

2. Déterminer la limite de (X_n).

Exercice 9 **(Centrale PSI 2015)** *[Solution]*
On suit l'évolution d'une particule entre différentes positions A, B, C et D. A $t = 0$, la particule est en B. A $t = n$, la particule change de position selon le schéma suivant : elle va
— de A en A avec une probabilité de 1,
— de B en A avec une probabilité de p,
— de B en C avec une probabilité de $1 - p$,
— de C en B avec une probabilité de p,
— de C en D avec une probabilité de $1 - p$,
— de D en A avec une probabilité de 1.

1. On pose $X_n = {}^t\big(P(A_n) \quad P(B_n) \quad P(C_n) \quad P(D_n)\big)$, où A_n est l'événement « la particule est en A à l'instant n ». Déterminer une matrice A indépendante de n telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $0 < p < 1$.
A faire après le chapitre sur la réduction.

3. Pour $p = 1/2$, calculer la probabilité quand n tend vers $+\infty$ que la particule se trouve dans chaque position.

Exercice 10 **(Centrale PSI 2018)** *[Solution]*
Deux intelligences artificielles A et B discutent en temps discrets, elles se disent « oui », « non » ou « peut-être » selon le schéma suivant :
— Si à l'instant n A dit « oui », B répond « non »
— Si à l'instant n A dit « non », B répond « non » ou « peut-être » de manière équiprobable
— Si à l'instant n A dit « peut-être », B répond « oui », « non » ou « peut-être » équiprobablement.
— Si à l'instant n B dit « oui », A répond « oui » à l'instant $n + 1$
— Si à l'instant n B dit « non », A répond « non » à l'instant $n + 1$
— Si à l'instant n B dit « peut-être », A répond « oui », « non » ou « peut-être » de manière équiprobable.
On note U_n le vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées sont les probabilités que A dise « oui », « non » et « peut-être » à l'instant n (V_n pour B).

1. Déterminer U_{n+1} en fonction de U_n puis U_n en fonction de U_0.

2. Les suites (U_n) et (V_n) convergent-elles ?

Exercice 11 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*

1. Diagonaliser $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
A faire après le chapitre sur la réduction.

2. On se déplace sur un carré $ABCD$ de la façon suivante :
— Si on est en A à l'instant n, on se déplace en B avec la probabilité $1/2$, en D $1/3$ et on reste en A avec la probabilité $1/6$.
— Si on est en B à l'instant n, on se déplace en C avec la probabilité $1/2$, en A $1/3$ et on reste en B avec la probabilité $1/6$.
— Si on est en C à l'instant n, on se déplace en D avec la probabilité $1/2$, en B $1/3$ et on reste en C avec la probabilité $1/6$.
— Si on est en D à l'instant n, on se déplace en A avec la probabilité $1/2$, en C $1/3$ et on reste en D avec la probabilité $1/6$.
On note a_n la probabilité d'être en A à l'instant n. Déterminer la limite de a_n.

Exercice 12 *[Solution]*

On considère 3 urnes : $U_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{2 noires} \\ \text{3 blanches} \end{array} \right.$, $U_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{1 noire} \\ \text{4 blanches} \end{array} \right.$ et $U_3 \left\{ \begin{array}{l} \text{3 noires} \\ \text{4 blanches} \end{array} \right.$

On prend au hasard une boule dans U_1 et une boule dans U_2. On met ces deux boules dans U_3. On tire ensuite une boule dans U_3. On note, pour $k \in [\![1,3]\!]$, $B_k =$ « la boule tirée dans U_k est blanche » (resp. N_k pour noire).

1. Calculer $P(B_1 \cap N_3)$ et $P(N_1 \cap N_3)$.
2. On réalise l'expérience, la boule tirée dans U_3 est noire. Calculer la probabilité que la boule tirée dans U_1 soit blanche.

Exercice 13 *[Solution]*

Une urne contient 12 boules numérotées (de 1 à 12). On tire une boule dans l'urne et on considère les événements $A =$« le numéro de la boule tirée est pair » et $B =$« le numéro de la boule tirée est un multiple de 3 ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Même question si on rajoute une boule numérotée 13

Exercice 14 *[Solution]*

Un test sanguin détecte un virus, lorsqu'il est effectivement présent dans le sang, avec une probabilité de 95% ; il donne également un faux résultat positif pour 1% des personnes non infectées testées. On considère que 1% de la population est porteuse du virus.

Quelle est la probabilité qu'une personne ayant un test positif ait effectivement le virus ? Conclusion ?

Exercice 15 *[Solution]*

On dispose de 3 cartes à jouer : une avec 2 faces blanches, une avec 2 faces rouges et la dernière avec une face blanche et une face rouge. Le jeu se déroule de la façon suivante : on tire au hasard une des trois cartes puis on la pose sur la table, la face visible étant choisie au hasard elle aussi. On demande alors au joueur de parier sur la couleur de la face cachée.

On considère les événements suivants : $RR =$« on a choisi la carte aux 2 faces rouges » (RB pour la carte bicolore et BB pour la cartes aux 2 faces blanches) ; $V_R =$« la face visible est rouge » (V_B pour blanche) et $C_R =$« la face cachée est rouge » (C_B pour blanche).

1. Déterminer $P(V_R)$.
2. Exprimer C_R en fonction de RR, RB et V_B, en déduire $P_{V_R}(C_R) = P_{V_R}(RR)$ et calculer sa valeur.
3. Calculer $P_{V_R}(C_B)$. Quelle stratégie est-il préférable d'adopter : miser que la face cachée a la même couleur que la face visible ou l'inverse ?

Exercice 16 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*

1. Soit une population de n personnes. L'une d'elles envoie une lettre à l'une des $n-1$ autres personnes. Celle-ci renvoie la lettre à l'une des $n-1$ autres, etc.... ceci se répète $n-1$ fois. Quelle est la probabilité que les n personnes aient reçu la lettre ?
2. Chacun dispose d'une lettre et l'envoie à l'une des $n-1$ autres personnes. Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$, quelle est la probabilité qu'une personne donnée reçoive p lettres ?

Exercice 17 **(Mines-Ponts MP 2015)** *[Solution]*

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n que l'on tire sans remise.

1. Quelle est la probabilité de tirer la boule 1 en $k^{\text{ème}}$?
2. On suppose que sur les n boules, m sont blanches, les autres sont rouges. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage ?
   indication : introduire A_i « on a tiré i boules blanches au cours des $k-1$ premiers tirages ».

II Expériences infinies

Exercice 18 *[Solution]*

Un voyageur se déplace dans 3 villes A, B et C. Au départ il se trouve dans la ville A. Si à l'instant n , il se trouve dans une des villes, à l'instant $n+1$, il se trouve de façon équiprobable dans l'une des deux autres villes .

1. Soit J_n= « le voyageur revient pour la $1^{\text{ère}}$ fois dans A au jour n ». Calculer $P(J_n)$.
2. Calculer la probabilité que le voyageur repasse dans A.

Exercice 19 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*

On lance une pièce qui donne pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. On fait deux lancers : si on fait PP, on a gagné ; si on fait FF, on a perdu ; sinon on recommence.

1. Quelle est la probabilité de gagner ?
2. Est-on presque sûr que le jeu se termine ?

Exercice 20 *[Solution]*
Une personne lance une pièce qui donne pile avec la probabilité p (où $p \in]0,1[$). Elle gagne dès qu'elle a obtenu 2 piles de plus que de faces, et elle perd dès qu'elle a obtenu 2 faces de plus que de piles.

1. Soit E_{2n}= « Obtenir autant de piles que de faces lors des $2n$ premiers lancers sans que la partie ne s'arrête ». Calculer $P(E_{2n})$
2. Soit G_{2n}= « Elle gagne la partie à l'issu du $2n^{\text{ème}}$ lancer ». Calculer $P(G_{2n})$
3. Quelle est la probabilité que la personne gagne la partie ? Probabilité qu'elle perde la partie ?

Exercice 21 *[Solution]*
Deux joueurs A et B jouent à tour de rôle avec 2 dés honnêtes . A lance les deux dés. Si la somme des points obtenus par A vaut 6, A gagne la partie et le jeu s'arrête. Sinon, B lance les deux dés. Si la somme des points obtenus par B vaut 7 , B gagne la partie et le jeu s'arrête. Sinon il passe les dés à A qui rejoue. Et ainsi de suite ...
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit les évènements suivants :
A_k = « A gagne la partie après avoir lancé pour la $k^{\text{ème}}$ fois les dés ».
E_k = « la somme des points obtenus par A lorsqu'il lance pour la $k^{\text{ème}}$ fois les dés vaut 6 ».
F_k = « la somme des points obtenus par B lorsqu'il lance pour la $k^{\text{ème}}$ fois les dés vaut 7 ».

1. Exprimer A_k à l'aide des $(E_i)_i$ et des $(F_i)_i$. En déduire $P(A_k)$.
   Quelle est la probabilité que A gagne ?
2. Quelle est la probabilité que B gagne ?
3. Quelle est la probabilité que le jeu ne se termine pas ?

Exercice 22 **(Centrale PSI 2018)** *[Solution]*
Une urne contient b boules rouges et b boules blanches. On tire une boule ; si elle est blanche, on la remet dans l'urne avec a autres boules blanches et on recommence. L'expérience s'arrête si on tire la boule rouge.

1. Quelle est la probabilité p_n que les n premières boules tirées soient blanches ?
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter.

Exercice 23 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*

1. Calculer, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q \,\mathrm{d}x$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dispose de p urnes numérotées de 1 à p. Chaque urne contient p boules et pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, l'urne numéro i contient i boules noires et $p-i$ boules blanches. On effectue l'expérience suivante : choisir au hasard une urne puis effectuer des tirages avec remise dans l'urne choisie. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement : « on a effectué $2n$ tirages et obtenu le même nombre de boules blanches que de noires ».
   a) Exprimer $P(A_n)$ sous forme d'une somme.
   b) Calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} P(A_n)$.
   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Exercice 24 *[Solution]*
On lance une pièce un nombre infini de fois. Elle amène pile avec une probabilité $\alpha \in]0,1[$ et face avec une probabilité $\beta = 1-\alpha \in]0,1[$. On suppose $\alpha \neq \beta$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose A_n =« Obtenir pile pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ lancer » et, pour $n \geqslant 2$, E_n =« la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n ».

1. Calculer $P(A_k)$ et en déduire $\forall n \geqslant 2, P(E_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} P(E_n \cap A_i)$.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 2, P(E_n) = \alpha\beta\left(\dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)$.
3. Déterminer la probabilté d'obtenir au moins une séquence PF.

Exercice 25 *[Solution]*
Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On effectue une infinité de tirages de la façon suivante : on tire une boule, si elle est noire, on la remet dans l'urne et on effectue un dernier tirage ; si elle est blanche, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche et on continue le tirage.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ tirage ?
2. Quelle est la probabilité de tirer 2 fois consécutivement une boule noire ? (On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

Exercice 26 *[Solution]*
On lance deux dés à 6 faces discernables et on s'intéresse à la somme des deux chiffres sur les faces des dés. On cherche à déterminer de deux façons différentes la probabilité de l'événement $E =$ « on obtient 9 avant d'obtenir 7 pour la première fois » (pas forcément à deux lancers consécutifs).

1. Quelle est la probabilité de n'obtenir ni 7, ni 9, au cours d'un des lancers ?

2. Première méthode : on définit les événements suivants : $F_i =$ « on obtient 9 au $i^{\text{ème}}$ lancer », $E_n =$ « on n'obtient ni 7, ni 9 au cours des $n-1$ premiers lancers et on obtient 9 au $n^{\text{ème}}$ lancer » (pour $n > 1$) et $E_1 = F_1$.

a) Exprimer E à l'aide des E_n ; puis E_n à l'aide des F_i et des $H_i =$ « on n'obtient ni 7, ni 9 au $i^{\text{ème}}$ lancer ».

b) Calculer $P(E_n)$ en utilisant l'indépendance des lancers et en déduire $P(E)$.

3. Seconde méthode : on note $G_1 =$ « on obtient 7 au premier lancer ».

a) Vérifier que $\{F_1, G_1, H_1\}$ est un système complet d'événements et en déduire une expression de $P(E)$.

b) Calculer $P_{F_1}(E)$ et $P_{G_1}(E)$ et expliquer pourquoi $P_{H_1}(E) = P(E)$.

c) Déterminer $P(E)$.

Exercice 27 *[Solution]*
Jeu à trois joueurs
Trois personnes A, B et C lancent à tour de rôle (et toujours dans cet ordre) une pièce qui donne pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. Le vainqueur est le premier à obtenir pile ; la partie est alors finie.

1. On note $A_n =$ « A gagne lors du $n^{\text{ème}}$ lancer » (de même B_n pour B et C_n pour C).
Calculer $p(A_n)$, $p(B_n)$ et $p(C_n)$ en fonction de n.

2. Calculer la probabilité de gagner de chaque joueur.

3. Quelle est la probabilité qu'il y ait un vainqueur ?

Exercice 28 **(TPE-EIVP PC 2015)** *[Solution]*
On tire un entier dans $\mathbb{N}^*$ aléatoirement de sorte que la probabilité de tirer l'entier $n \geqslant 1$ soit $p_n = \dfrac{1}{2^n}$

1. Vérifier que l'on peut bien définir une telle probabilité.

2. On note A_k l'événement « l'entier tiré est multiple de k ». Déterminer $p(A_k)$.

3. Déterminer $p(A_2 \cup A_3)$.

4. On note B l'événement « l'entier tiré est premier ». Montrer que $\dfrac{13}{32} < P(B) < \dfrac{209}{504}$

Exercice 29 **(EIVP PSI 2017)** *[Solution]*
On lance une infinité de fois une pièce qui fait pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On définit A : « on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre pair de lancers » et B : « au bout d'un nombre de lancers multiple de 3 ». Calculer $P(A)$ et $P(B)$. Sont-ils indépendants ?

Exercice 30 **(X PC 2015)** *[Solution]*
Une machine fabrique des pièces A avec la probabilité a et des pièces B avec la probabilité b ($a + b = 1$). La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est p. Quelle est la probabilité d'avoir n pièces défectueuses au moment de la première fabrication d'une pièce A ?
indication : conditionner par A_k « la première pièce A est produite au $k^{\text{ème}}$ rang » distinguer si la première pièce A est défectueuse ou non et utiliser $\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}} = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^{k-n}$ *pour* $|x| < 1$.

Exercice 31 **(Centrale PC 2015)** *[Solution]*
Les joueurs A et B possèdent N billes : A en possède n et B les $N-n$ autres. A chaque partie, A gagne avec la probabilité p ; s'il gagne, B lui donne une bille, s'il perd, il donne une bille à B. On note p_n la probabilité que A gagne la partie avec n billes au départ (A gagne s'il obtient les N billes). Déterminer p_n.
indication : trouver une relation de récurrence sur la suite (p_n) en conditionnant par le résultat de la première partie.

III Exercices théoriques

Exercice 32 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants. Montrer que $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)\right)$.
indication : vérifier $1 - x \leqslant e^{-x}$.

Exercice 33 **(Centrale PC 2015)** *[Solution]*
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

1. Interpréter $A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geqslant p} A_n$.
indication : c'est « une infinité de A_n est réalisée ».

2. Montrer que si $\sum P(A_n)$ converge alors $P(A) = 0$ et que si la série diverge alors $P(A) = 1$.
indication : pour la dernière partie, considérer $P(\overline{A})$.

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** $\dfrac{1}{n^p}\dbinom{n}{p}$

2. On choisit la boule qui se répète, ses rangs d'apparition puis les $p-1$ autres boules : $\dfrac{1}{n^p}\left[n \times \dbinom{p}{2} \times \dbinom{n-1}{p-1}\right]$.

3. On note E cet événement et A_k : « le numéro de la première boule est k » (c'est un SCE). $P(E) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(E|A_k)P(A_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} \times \frac{1}{n}$.

4. On choisit les numéros tirés (que l'on place ensuite dans l'ordre croissant) : $\dfrac{1}{n^p}\dbinom{n}{p} \times \dfrac{1}{p!}$.

5. On a $P(E_i) = \dfrac{i^p}{n^p}$ et on cherche $P\left(E_k \cap \overline{E_{k-1}}\right) = P(E_k) \times (1 - P(E_{k-1}|E_k)) = \dfrac{k^p}{n^p} \times \left(1 - \dfrac{(k-1)^p}{k^p}\right)$.

Exercice 2 *[sujet]* V « vacciné » et M « malade » ; $P(V) = \dfrac{1}{4}$, $P(M|V) = \dfrac{1}{12}$ et $P(V|M) = \dfrac{1}{5}$.

1. $P(M) = \dfrac{P(M|V)}{P(V|M)} \times P(V) = \dfrac{5}{48}$

2. $P(M) = P(M|V)P(V) + P(M|\overline{V})P(\overline{V})$ donc $P(M|\overline{V}) = \dfrac{1}{9}$

Exercice 3 *[sujet]* **1.** $P(R_2) = P(R_2|B_1)P(B_1) + P(R_2|R_1)P(R_1) + P(R_2|V_1)P(V_1) = \dfrac{4}{15}\dfrac{3}{14} + \dfrac{5}{15}\dfrac{4}{14} + \dfrac{4}{15}\dfrac{7}{14}$

2. $P(B_1 \cap B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) = \dfrac{4}{15}\dfrac{3}{14}$; idem pour les deux autres couleurs

Exercice 4 *[sujet]* **1.** $P(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2}P(A_n) + \dfrac{2}{3}(1 - P(A_n))$

2. On trouve $P(A_n) = \left(\dfrac{-1}{6}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{7}\right) + \dfrac{4}{7}$ puis $P(F_n) = \dfrac{1}{2}P(A_n) + \dfrac{2}{3}(1 - P(A_n)) = P(A_{n+1})$

Exercice 5 *[sujet]* **1.** Il va donc chasser les n premiers jours et revient bredouille : $\dfrac{1}{2^n}$

2. Il va chasser les n premiers jours, n'attrape rien les $n-1$ premiers et attrape une proie le $n^{\text{ème}}$: $\dfrac{1}{2^n}$

3. Si A_i est « R attrape une proie le $i^{\text{ème}}$ jour », alors $p_{i+1} = P(A_{i+1}|A_i)P(A_i) + P(A_{i+1}|\overline{A_i})P(\overline{A_i}) = \dfrac{1}{2}(1 - p_i)$

4. On trouve $\lim p_i = \dfrac{1}{3}$ (suite arithmético-géométrique)

Exercice 6 *[sujet]* **1.** $P(A_{k+1}) = P(A_{k+1}|A_k)P(A_k) + P(A_{k+1}|\overline{A_k})(1 - P(A_k))$ puis $P(A_{k+1}|A_k) = a$ et $P(A_{k+1}|\overline{A_k}) = 1 - b$

2. Avec le même SCE, on a $P(H_n) = aP(A_n) + b(1 - P(A_n))$ et $P(A_n) = \dfrac{b-1}{a+b-2} + \dfrac{a-1}{a+b-2}(a+b-1)^n$

3. $P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{b-1}{a+b-2}$ car $|a+b-1| < 1$.

Exercice 7 *[sujet]* **1.** (A_n, B_n, C_n) est un SCE donc on trouve $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}MU_n$

2. $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ puis $M^n = PD^nP^{-1}$

3. On a $J^2 = 3J$ donc $X(X-3)$ annule J. On en déduit $J^n = 3^{n-1}J$ pour $n \geqslant 1$ et (Newton car commutent) $M^n = (-1)^n I_3 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k-1}J = (-1)^n I_3 + \frac{1}{3}\Big[(3-1)^n - (-1)^n\Big]J = (-1)^n I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3}J$

4. $U_n = \dfrac{1}{2^n}M^nU_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}JU_0 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (car $P(A_0) + P(B_0) + P(C_0) = 1$)

Exercice 8 *[sujet]* **1.** $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2. On vérifie que $P = (X-1)\left(X+\dfrac{1}{3}\right)\left(X+\dfrac{2}{3}\right)$ annule M, que $X_n = M^n X_0$ et enfin que $\lim X_n = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 *[sujet]* **1.** $A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$

2. On a $\mathcal{X}_A = X(X-1)(X^2 - p(1-p))$ est SARS si $p \in]0,1[$ alors que si $p \in \{0,1\}$, on a $\mathcal{X}_A = X^3(x-1)$ et $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.

3. on trouve $\lim X_n = \dfrac{1}{3}(4A^3 - A)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 10 *[sujet]* **1.** On a $V_n = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$ puis $U_{n+1} = BV_n$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ donc $U_{n+1} = BAU_n$. On a donc $U_n = (BA)^n U_0$.

2. Un polynôme annulateur de BA est $X(X-1)(X-5/9)$ puis on vérifie que $(BA)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{9}{4}A^2 - \dfrac{5}{4}A = L$; on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = LU_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = ALU_0$ car $X \mapsto BAX$ et $X \mapsto AX$ sont linéaire donc continues sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 11 *[sujet]* **1.** $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix} \mathrm{diag}(1,-1,i,-i)P^{-1}$.

2. On a $X_{n+1} = MX_n$ avec $M = \dfrac{1}{6}I_4 + \dfrac{1}{3}J + \dfrac{1}{2}J^3$ donc $a_n = (e_1|M^n e_1) \to \dfrac{1}{4}$.

Exercice 12 *[sujet]* **1.** $P(B_1 \cap N_3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) + P(B_1 \cap N_2 \cap N_3) = \dfrac{3}{5}\dfrac{4}{5}\dfrac{3}{9} + \dfrac{3}{5}\dfrac{1}{5}\dfrac{4}{9} = \dfrac{16}{75}$; de même $P(N_1 \cap N_3) = \dfrac{14}{75}$.

2. $P(B_1|N_3) = \dfrac{P(N_3 \cap B_1)}{P(N_3 \cap B_1) + P(N_3 \cap N_1)} = \dfrac{8}{15}$.

Exercice 13 *[sujet]* **1.** $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{1}{3}$; $A \cap B$ est tirer 6 ou 12 donc $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6} = P(A)P(B)$.

2. $P(A) = \dfrac{6}{13}$, les autres inchangés donc ils ne sont plus indépendants.

Exercice 14 *[sujet]* V « virus détecté » et M « virus dans le sang ». On a $P(V|M) = \dfrac{95}{100}$, $P(V|\overline{M}) = \dfrac{1}{100}$ et $P(M) = \dfrac{1}{100}$.

$P(M|V) = \dfrac{P(V|M)}{P(V|M)P(M) + P(V|\overline{M})(1-P(M))}P(M) = \dfrac{95}{195} < \dfrac{1}{2}$: détection non fiable !

Exercice 15 *[sujet]* **1.** $P(V_R) = P(V_R|RR)P(RR) + P(V_R|BB)P(BB) + P(V_R|RB)P(RB) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$.

2. $C_R = RR \cup (RB \cap V_B)$ donc $P_{V_R}(C_R) = P_{V_R}(RR) + P_{V_R}(RB \cap V_B) = P_{V_R}(RR) = \dfrac{P_{RR}(V_R)}{P(V_R)}P(RR) = \dfrac{2}{3}$

3. $P_{V_R}(C_B) = \dfrac{1}{3}$; il faut miser que la couleur cachée est la même que celle visible.

Exercice 16 *[sujet]* **1.** Si on numérote les n personnes et si $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ est définie par $f(k)$ est le numéro de la personne qui reçoit la lettre envoyée par k. On cherche les situations pour lesquelles f est bijective, il y en a $n!$. Par contre à chaque étape, il y a $n-1$ choix pour le destinataire et ceci pour les n envois, donc $(n-1)^n$ possibilité. On en déduit $P(A) = \dfrac{n!}{(n-1)^n}$

2. Le fait que la personne choisie reçoive une lettre est une expérience de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n-1}$, qui se répète $n-1$ fois de façon indépendante. On veut obtenir p succès donc $P(B) = \dbinom{n-1}{p} \dfrac{1}{(n-1)^p} \left(1 - \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1-p}$.

Exercice 17 *[sujet]* **1.** $\dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \dfrac{n-k+1}{n-k+2} \times \dfrac{1}{n-k+1} = \dfrac{1}{n}$

2. On a $P(A_i) = \dfrac{\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i-1}}{\binom{n}{i-1}}$ puis $P(B_k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} P(B_k|A_i)P(A_i)$ avec $P(B_k|A_i) = \dfrac{m-i}{n-k+1}$.

Exercice 18 *[sujet]* **1.** Le déplacement au jour 1 est qlcque, après il est imposé (de B vers C ou l'inverse jusqu'au jour $n-1$ et en A le jour n) donc $P(J_1) = 0$ et $P(J_n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ si $n \geqslant 2$.

2. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} P(J_n) = 1$.

Exercice 19 *[sujet]* Il suffit de grouper les lancers par 2 (proba de gagner p^2, de perdre $(1-p)^2$, sinon on recommence)

1. On gagne au rang n (donc après le lancer $2n$) si on finit par PP et si avant on n'a fait ni PP, ni FF donc $P(G_n) = p^2(2p(1-p))^{n-1}$ et $P(G) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = \dfrac{p^2}{1-2p(1-p)}$

2. De même pour perdre, on trouve $P(D) = \dfrac{(1-p)^2}{1-2p(1-p)}$ et comme $P(G) + P(D) = 1$, le jeu termine presque surement

Exercice 20 *[sujet]* **1.** Les deux premiers lancers sont PF ou FP donc $P(E_{2n}) = 2p(1-p)P(E_{2n-2})$ (après PF ou FP, c'est comme si on repartait à zéro pour $2n-2$ lancers) donc $P(E_{2n}) = 2^n p^n (1-p)^n$

2. $G_{2n} = E_{2n-2} \cap P_{2n-1} \cap P_{2n}$ donc $P(G_{2n}) = 2^{n-1}p^{n+1}(1-p)^{n-1}$

3. On ne peut gagner qu'à un rang pair donc $P(G) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = \dfrac{p^2}{1-2p(1-p)}$.

Le même calcul donne $P(perdre) = \dfrac{(1-p)^2}{1-2p(1-p)}$ et on vérifie que $P(G) + P(perdre) = 1$ (le jeu s'arrête presque sûrement).

Exercice 21 *[sujet]* **1.** $A_k = \overline{E_1} \cap \overline{F_1} \cdots \cap \overline{E_{k-1}} \cap \overline{F_{k-1}} \cap E_k$ donc $P(A_k) = \left(\dfrac{31 \times 5}{36 \times 6}\right)^{k-1} \dfrac{5}{36}$ puis $P(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = \dfrac{5}{36} \dfrac{1}{1 - \frac{31\times5}{36\times6}} = \dfrac{30}{61}$

2. De même on trouve $P(B) = \dfrac{31}{61}$

3. le jeu termine presque sûrement et B a un peu plus de chance de gagner.

Exercice 22 *[sujet]* **1.** $p_n = P\left(\displaystyle\bigcap_{k \leqslant n} B_k\right) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{b+ka}{2b+ka}$

2. $\ln p_n = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \dfrac{b}{b+ka}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ (somme partielle de série DV à termes négatifs). On a donc $\lim p_n = 0$.
Par continuité décroissante, $\lim p_n$ est la probabilité de ne tirer que des boules blanches au cours de l'expérience, c'est donc un événement négligeable.

Exercice 23 *[sujet]* **1.** $I_{p,q} \overset{\text{IPP}}{=} \dfrac{p}{q+1} I_{p-1,q+1} = \dfrac{p!}{q!}(p+q+1)!$

2. a) On calcule la probabilité que A_n soit réalisé sachant que les tirages se font dans l'urne k $P(A_n|U_k) = \dbinom{2n}{n} p^n (1-p)^n$ donc $P(A_n = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dbinom{2n}{n} \left(\dfrac{p}{n}\right)^n \left(1 - \dfrac{p}{n}\right)^n$

b) Somme de Riemann : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} P(A_n) = \dbinom{2n}{n} I_{n,n} = \dfrac{1}{2n+1}$

c) La somme est finie et, avec Stirling, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$

Exercice 24 *[sujet]* **1.** $P(A_k)=\alpha(1-\beta)^{k-1}$; $(A_i)_{i\geqslant 1}$ est un SCE tel que $E_n\cap A_i=\emptyset$ pour $i\geqslant n$

2. $E_n\cap A_i=F_1\cap\cdots\cap F_{i-1}\cap P_i\cap\cdots\cap P_{n-1}\cap F_n$ donc $P(E_n\cap A_i)=(1-\beta)^i\alpha^{n-i}$

3. $P(PF)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}P(E_n)=\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\beta}\right)=1$

Exercice 25 *[sujet]* **1.** $P(N_n)=\dfrac{1}{2}\times\cdots\times\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)}$

2. $P(NN)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}P(NN|N_n)P(N_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=2-\frac{\pi^2}{6}.$

Exercice 26 *[sujet]* **1.** $P(H)=\dfrac{13}{18}$

2. a) $E=\displaystyle\bigcup_{n\geqslant 1}E_n$ et $E_n=H_1\cap\cdots\cap H_{n-1}\cap F_n$

b) $P(E_n)=\left(\dfrac{13}{18}\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{9}$ et $P(E)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}P(E_n)=\frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{13}{18}}=\frac{2}{5}.$

3. a) $P(E)=P(E|F_1)P(F_1)+P(E|G_1)P(G_1)+P(E|H_1)P(H_1)$

b) $P(E|F_1)=1$ et $P(E|G_1)=0$; $P(E|H_1)=P(E)$: cela revient à reprendre l'expérience après le premier lancer qui ne changera rien à l'expérience.

c) $P(E)=\dfrac{1}{9}+\dfrac{13}{18}P(E)$ redonne $P(E)=\dfrac{2}{5}.$

Exercice 27 *[sujet]* **1.** A_n représente le cas où A, B et C font face $n-1$ fois chacun puis A fait pile donc $P(A_n)=p(1-p)^{3(n-1)}$; de même $P(B_n)=p(1-p)^{3(n-1)+1}$ et $P(C_n)=p(1-p)^{3(n-1)+2}$

2. $P(A)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}P(A_n)=\frac{p}{1-(1-p)^3}$ puis $P(B)=\dfrac{p(1-p)}{1-(1-p)^3}$ et $P(C)=\dfrac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^3}$

3. On vérifie que $P(A)+P(B)+P(C)=1$ donc il y aura un vainqueur presque sûrement.

Exercice 28 *[sujet]* **1.** $p_n\geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}p_n=1$

2. $P(A_k)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}p_{nk}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)^n=\frac{1}{2^k}\frac{1}{1-2^{-k}}=\frac{1}{2^k-1}$

3. $P(A_2\cup A_3)=P(A_2)+P(A_3)-P(A_2\cap A_3)=P(A_2)+P(A_3)-P(A_6)=\dfrac{29}{63}$

4. La probabilité de tirer 2, 3 ou 5 est $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{32}=\dfrac{13}{32}$. Puis on a $\{1\}\cup(A_2\cup A_3\setminus\{2,3\})\in\overline{B}$ donc $1-P(B)>\dfrac{1}{2}+\dfrac{29}{63}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}$ (les inégalités sont strictes car il y a des nombres premiers autres que 2, 3 et 5 et la probabilité de les tirer est non nulle).

Exercice 29 *[sujet]* $P(A)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}p(1-p)^{2k-1}=\frac{pq}{1-q^2}$; de même, $P(B)=\dfrac{pq^2}{1-q^3}$ et $A\cap B$ est « premier pile à un lancer multiple de 6 » donc $P(A\cap B)=\dfrac{pq^5}{1-q^6}$. A et B sont indépendants si et seulement si $(1-q)(1-q^6)=q^2(1-q^2)(1-q^3)$ ce qui est impossible si $q\neq 1$ (factoriser !).

Exercice 30 *[sujet]* On a $P(A_k)=ab^{k-1}$; si D_n « n pièces défectueuses au moment de la première pièce A »alors $P(D_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}P(D_n|A_k)P(A_k)$. Si on suppose A_k réalisé et si la pièce A est défectueuse alors la probabilité d'avoir $n-1$ pièces défectueuses parmi les $k-1$ pièces B est $\dbinom{k-1}{n-1}p^{n-1}(1-p)^{k-n}$ (pour $k\geqslant n$) alors que si la pièce A n'est pas défectueuse, la probabilité d'avoir n pièces défectueuses parmi les $k-1$ pièces B produites est $\dbinom{k-1}{n}p^n(1-p)^{k-1-n}$ (pour $k-1\geqslant n$). On trouve donc $P(D_n)=\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}p^{n-1}(1-p)^{k-n}pab^{k-1}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\binom{k-1}{n}p^n(1-p)^{k-1-n}(1-p)ab^{k-1}$ donc $P(D_n)=ap^nb^{n-1}\dfrac{1}{(1-(1-p)b)^n}+ap^n(1-p)b^n\dfrac{1}{(1-(1-p)b)^{n+1}}$

Exercice 31 *[sujet]* G_A et G_B « A (resp. B) gagne la première partie » est un SCE ; G_n « A gagne avec n billes au départ ». $P(G_n) = P(G_n|G_A)P(G_A) + P(G_n|G_B)P(G_B)$; $P(G_n|G_A) = P(G_{n+1})$ et $P(G_n|G_B) = P(G_{n-1})$ donc $p_n = pp_{n+1} + (1-p)p_{n-1}$ avec les conditions aux limites $p_0 = 0$ et $p_N = 1$. On termine en examinant l'équation caractéristique $pX^2 - X + (1-p)0$ en distinguant $p = 1/2$ puisque $\Delta = (1-2p)^2$.

Exercice 32 *[sujet]* Les $\overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants donc $P\left(\bigcap_{k\leqslant n} \overline{A_k}\right) = \prod_{k\leqslant n}(1-P(A_k)) \leqslant \exp\left(-\sum_{k\leqslant n} P(A_k)\right)$ puis on fait tendre n vers $+\infty$ car par continuité décroissante, $\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k\leqslant n} \overline{A_k}\right) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right)$.

Si la série $\sum P(A_n)$ est DV, cela signifie que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k\leqslant n} P(A_k) = +\infty$ donc $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 0$.

Exercice 33 *[sujet]* Si $\sum P(A_n)$ CV, on pose $B_p = \bigcup_{n\geqslant p} A_n$, on a $P(B_p) \leqslant \sum_{n\geqslant p} P(A_n) = R_{p-1}$ (le reste de la série initiale) ; par continuité décroissante, $P(A) = \lim P(B_p) = 0$.
Si la série DV alors $P(\overline{A}) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant p} \overline{A_n}$; on pose $C_p = \bigcap_{n\geqslant p} \overline{A_n}$. Par indépendance mutuelle des $\overline{A_n}$, $P(C_p) = \prod_{n\geqslant p}(1 - P(A_n)) \leqslant \exp\left(-\sum_{n\geqslant p} P(A_n)\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ (car somme partielle d'une SATP DV) et par continuité croissante $P(\overline{A}) = \lim_{p\to+\infty} P(C_p) = 0$.