ΠΣΙ2.Petits exercices sur les opérateurs et les vecteurs.

EXER 1

① ON CALCULE :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 2a + 2a - 2b = 4a - 2b$$

$$\Delta V = 0 \iff \boxed{b = 2a}$$

② $V(x, y, z) = a(x^2 + y^2) - 2a z^2$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V = -\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} = 2ax \\ \frac{\partial V}{\partial y} = 2ay \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -4az \end{vmatrix} = -2a \begin{vmatrix} x \\ y \\ -2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix}$$

③ ON PEUT MAINTENANT VERIFIER :

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$= -2a - 2a + 4a = 0$$

CALCUL NON NÉCESSAIRE CAR ICI :

$$\text{div}\,\vec{E} = \cancel{-\overrightarrow{grad}\,\text{div}} - \text{div}\,(\overrightarrow{grad}\,V) = -\Delta V$$
$$= 0$$

EXER 2

JE DEFINIS L'AXE Oz / $\overrightarrow{A_0(t)} = A_0(t)\,\vec{e_z}$

PUIS LES DEUX AUTRES AXES DE FAÇON À AVOIR UNE BOND

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y} + z\,\vec{e_z}$

PREMIER CALCUL

$$\overrightarrow{A_0(t)} \cdot \overrightarrow{OM} = A_0(t)\,z.$$

$$\hookrightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\left(\overrightarrow{A_0(t)} \cdot \overrightarrow{OM}\right) = \left|\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}\left(A_0(t)\cdot z\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(A_0(t)\cdot z\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(A_0(t)\,z\right) = A_0(t) \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ A_0(t) \end{array}\right. = \overrightarrow{A_0(t)}$$

OK

SECOND CALCUL

$$\overrightarrow{A_0(t)} \wedge \overrightarrow{OM} = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ A_0(t) \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} -A_0 y \\ x A_0 \\ 0 \end{array}\right.$$

$$\hookrightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A_0(t)} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \left|\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} -y A_0 \\ x A_0 \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial z}(x A_0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}(-y \cancel{A_0}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(x A_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y A_0) = 2 A_0 \end{array}\right.$$

$$= 2\,\overrightarrow{A_0}(t)$$

$$\hookrightarrow \overrightarrow{A_0}(t) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A_0(t)} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

EXER 3

$\vec{E}\,(0, 0, E(z)) \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(E(z))$

$= \frac{d\,E(z)}{dz} = E'(z)$

$\hookrightarrow E'(z) = A \Rightarrow \boxed{E(z) = Az + B}$

EXER 4

① FORMULAIRE DONNE : SUR LA BASE $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

$\vec{E}' = \begin{vmatrix} \frac{A}{r} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V = -\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix}$ $\quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$

V NE DEPEND NI DE θ NI DE z.

$\hookrightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = V'(r) = -\frac{A}{r} \Rightarrow V(r) = -A \ln(r) + cte$

REM ON DEFINIT SOUVENT r_0 / $cte = A\ln(r_0)$

$\hookrightarrow \boxed{V(r) = A \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)}$

② $\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$ selon $\vec{e_r}$: V n'augmente pas si je bouge selon $\vec{e_z}$ (modification de z) ou $\vec{e_\theta}$ (modification de θ)

$\hookrightarrow V(M) = V(r)$ $\quad$ V(r) NE DEPEND NI DE θ, NI DE z.

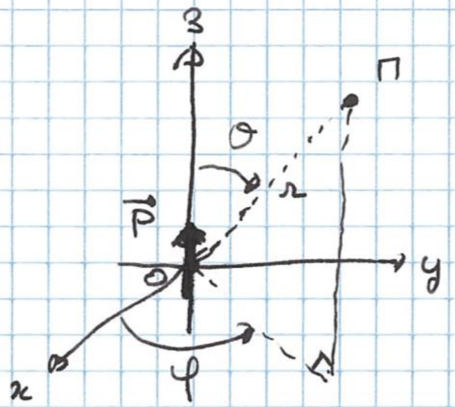
Puis $dV = \overrightarrow{\operatorname{grad}} V . d\overrightarrow{OM} = -\vec{E}(M) . d\overrightarrow{OM}$

JE CHOISIS MAINTENANT UN DEPLACEMENT RADIAL : $d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e_r}$

$\hookrightarrow dV = -\frac{A}{r}\vec{e_r} \cdot dr\,\vec{e_r} = -A\frac{dr}{dr} = d(-A\ln(r))$

ON INTEGRE ET ON OBTIENT LE MÊME RÉSULTAT.

EXER 5



① $V(M) = \dfrac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3} = \dfrac{p_0 \cdot \cos\theta}{r^2}$

$\vec{r} = \vec{OM}$

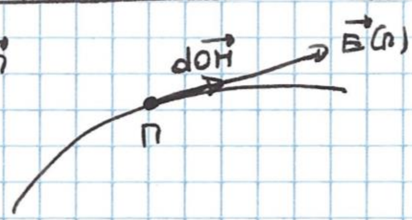
② FORMULAIRE :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial V}{\partial r} = 2p_0 \dfrac{\cos\theta}{r^3} \\ -\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\right) = p_0 \dfrac{\sin\theta}{r^3} \\ -\dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}\right) = 0. \end{vmatrix}$$

---

③ SUR LA LIGNE DE CHAMP $\vec{E}(M) \,/\!/\, d\vec{OM}$

CE QUI PEUT S'ECRIRE $\vec{E} \wedge d\vec{OM} = \vec{0}$



JE NE RECOPIE PAS $\dfrac{p_0}{r^3}$

$$\begin{vmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2r\cos\theta\, d\theta - \sin\theta\, dr \end{vmatrix} = 0.$$

$\hookrightarrow \quad \dfrac{dr}{r} = 2\,\dfrac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta} = 2\,\dfrac{d\sin\theta}{\sin\theta}$

$d\ln r = 2\, d(\ln|\sin\theta|) \Rightarrow d\left(\ln\left(\dfrac{r}{\sin^2\theta}\right)\right) = 0$

$\hookrightarrow \quad \dfrac{r}{\sin^2\theta} = k \quad$ ou $\quad \boxed{r = k.\sin^2\theta} \qquad k \in \mathbb{R}^*$

④ ON FAIT TOURNER LA LIGNE DE CHAMPS AUTOUR DE L'AXE Oz

EXER 6

① (α) $\text{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ (β) $\text{div}\,\vec{B} = 0$

(γ) $\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (δ) $\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

ρ en $C.m^{-3}$; $\vec{j}$ en $A.m^{-2}$; $\vec{E}$ en $V.m^{-1}$

μ_0 en $H.m^{-1}$; ε_0 en $F.m^{-1}$

② ON FAIT $\vec{B}.(\gamma) - \vec{E}.(\delta)$

SOIT

$$\underbrace{\vec{B}.\vec{\text{rot}}\,\vec{E} - \vec{E}.\vec{\text{rot}}\,\vec{B}}_{\text{div}(\vec{E}\wedge\vec{B})} = \underbrace{-\vec{B}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(B^2)} - \mu_0 \vec{j}.\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \underbrace{\vec{E}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(E^2)}$$

ON DIVISE PAR μ_0

$$\text{div}\Big(\underbrace{\vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0}}_{\vec{\pi}}\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}}_{u_{em}}\Big) = -\vec{j}.\vec{E}$$

$\underbrace{\vec{j}.\vec{E}}_{\text{EFFET JOULE}}$ EST EN $A.m^{-2}.V.m^{-1} = VA.m^{-3} = W.m^{-3}$ PUISSANCE VOLUMIQUE

DONC | u_{em} est en $W.s.m^{-3} = J.m^{-3}$ ENERGIE VOLUMIQUE

| $\vec{\pi}$ EST EN $W.m^{-3}m = W.m^{-2}$ PUISSANCE SURFACIQUE.

* u_{em} EST L'ENERGIE VOLUMIQUE ASSOCIÉE À LA PRESENCE D'UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS UN CERTAIN DOMAINE

* $\vec{\pi}$ INDIQUE COMMENT L'ENERGIE SE DÉPLACE. COMME $\vec{j}$ EN CONDUCTION DE LA CHALEUR.

CETTE EQUATION EST L'ECRITURE DE LA CONSERVATION DE L'ENERGIE.