L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet comporte deux problèmes indépendants.
Certaines questions ne concernent qu'une seule classe :

- *dans le problème I : l'énoncé de la question* **II.2** *(et de ses éventuelles sous-questions) est différent pour les PSI1 et les PSI2.*
- *la dernière partie du problème II est réservée aux élèves de PSI1.*

Problème I

(Extrait de E4A PSI 2002 maths 1)

Partie 1.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x > 0 \ , \ u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Lorsque la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge, on note S la somme de cette série :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \quad \text{lorsque la série converge.}$$

1. a) Vérifier que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x > 0$, $u_n(x) \geqslant 0$.

b) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

2. Prouver que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0 \ , \ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

3. Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} \left[\left(\sum\limits_{n=1}^{p} \frac{1}{n}\right) - \ln(p)\right] = S(1)$.

4. a) Prouver que :

$$\sum_{n=1}^{p} \big(u_n(x+1) - u_n(x)\big) = \left(\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}\right) + \ln(1+x) - \ln(p+1+x).$$

b) En déduire que :

$$\forall x > 0 \ , \ S(x+1) = S(x) + S(1) + \ln(1+x).$$

5. Soit φ la fonction définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x > 0 \ , \ \varphi(x) = \frac{1}{x} \exp\left(-xS(1) + S(x)\right).$$

a) Montrer que $\forall x > 0$, $\varphi(x+1) = x\,\varphi(x)$.

b) Vérifier que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Calculer $\varphi'(x)$ pour $x > 0$. Que vaut $\varphi'(1)$ (en fonction de $S(1)$) ?

6. Pour $n \geqslant 1$, soit φ_n la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x > 0 \ , \ \varphi_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Montrer que $\forall x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\varphi_n(x)\right) = S(x) - xS(1) - \ln x$.

7. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on note $\pi_p(x) = \prod\limits_{n=1}^{p} \dfrac{e^{x/n}}{1 + (x/n)}$.

a) Prouver la convergence simple de la suite $(\pi_p)_{p\geqslant 1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction L.

b) En déduire que : $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \dfrac{L(x)}{x} \exp(-xS(1))$.

Partie 2.

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t)\, \mathrm{d}t$.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

b) Calculer $\Gamma(1)$.

c) Montrer que $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. (on pourra faire une intégration par parties).

2. **Question pour les PSI1 uniquement**

En admettant les inégalités suivantes (déjà prouvées dans le DM2) :

$$\forall x \in [0, n] \ , \ 0 \leqslant e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e\frac{x^2}{n}e^{-x},$$

prouver que

$$\forall x > 0 \ , \ \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, \mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

2. **Question pour les PSI2 uniquement**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction g_n de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g_n : t \longmapsto \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant t < n \\ 0 & \text{si } t \geqslant n \end{cases} .$$

a) Prouver que : $\forall t \geqslant 0$, $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant g_n(t) \leqslant e^{-t}$.

b) Montrer alors que :

$$\forall x > 0 \ , \ \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, \mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

Retour au sujet commun pour les 2 classes

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on définit la fonction I_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\, \mathrm{d}t.$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction I_n.

b) Prouver que :

$$\forall x > 0 \ , \ \forall n \geqslant 1 \ , \ \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, \mathrm{d}t = n^x I_n(x).$$

c) Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$ et en déduire la formule de Weierstraß :

$$\forall x > 0 \ , \ \Gamma(x) = \varphi(x).$$

4. a) Montrer que, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^x}\Gamma(x)$.

b) En déduire que, pour $x > 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\right) \times \Gamma(x)$$

(on pourra utiliser le théorème d'intégration terme à terme).

Fin du problème I

Problème II

(CCP MP 2012 maths 2)

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$) et I_n sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne, qui vaut 1).
On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.
Pour tout $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k$.
L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.

On note ϕ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\phi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de ϕ_A. Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de ϕ_A, les parties III (et IV *pour les PSI1*) en étudient les vecteurs propres.
Les parties sont indépendantes.

Partie I. Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1. Vérifier que l'application ϕ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\ker(\phi_A)$.

Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Donner la matrice de ϕ_A dans la base $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. En déduire que ϕ_A est nulle si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc que ϕ_A n'est pas nulle.

4. Montrer que A est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

5. Vérifier que $\mathcal{X}_{\phi_A} = X^2 \left(X^2 - (d-a)^2 - 4bc\right)$.

6. En déduire que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II. Étude du cas général

On note $c = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

7. On suppose dans cette question que A est diagonalisable.
On note $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i. On note alors P la matrice de passage de la base c à la base e et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.
Enfin, pour tout couple (i,j) d'entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose :

$$B_{i,j} = P E_{i,j} P^{-1}$$

a) Exprimer, pour tout couple (i,j), la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.

b) Démontrer que, pour tout couple (i,j), $B_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_A.

c) En déduire que ϕ_A est diagonalisable.

8. On suppose dans cette question que ϕ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $(P_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ une base de vecteurs propres de ϕ_A et, pour tout couple (i,j), $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

a) Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et ϕ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\phi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

i. Justifier que toutes les valeurs propres de ϕ_A sont réelles.

ii. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z est une valeur propre de la matrice A.
Montrer qu'il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ $(Y \neq 0)$ tel que $A^T Y = \overline{z} Y$.

iii. On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ $(X \neq 0)$ tels que $AX = zX$.
En calculant $\phi_A\left(XY^T\right)$, démontrer que $z - \overline{z}$ est une valeur propre de ϕ_A.

b) En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.

On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $(X \neq 0)$ une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

c) Démontrer que, pour tout couple (i, j), il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j} P_{i,j} X$.

d) En déduire que A est diagonalisable. On pourra commencer par montrer que si $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Y = MX$.

Partie III. Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à la valeur propre 0

On note m la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[A]$:

$$m = \dim(\mathbb{R}[A]) = \dim\{P(A), P \in \mathbb{R}[X]\}$$

9. Démontrer que la famille $\left(I_n, A, \ldots, A^{m-1}\right)$ est une base de $\mathbb{R}[A]$. (on pourra utiliser une division euclidienne).

10. Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker(\phi_A)$ et en déduire une minoration de $\dim(\ker(\phi_A))$.

11. *Cas où u est diagonalisable*

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$ les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, $E_{\lambda_k}(u)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k. On note m_k la dimension de cet espace propre.

a) Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $B \in \ker(\phi_A)$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, $E_{\lambda_k}(u)$ est stable par v (c'est-à-dire $v\left(E_{\lambda_k}(u)\right) \subset E_{\lambda_k}(u)$).

b) En déduire que $B \in \ker(\phi_A)$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, a une forme que l'on précisera.

c) Préciser la dimension de $\ker(\phi_A)$.

d) Lorsque $n = 5$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k.

Partie IV. Compléments pour les PSI1

12. *Étude du noyau de ϕ_A dans un cas particulier*

On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

a) Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

b) Soient $B \in \ker(\phi_A)$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

Démontrer que si $v(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$ alors $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

c) En déduire $\ker(\phi_A)$.

13. *Cas d'une valeur propre non nulle*

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de ϕ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$).

a) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$.

b) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^k = 0$; on pourra raisonner par l'absurde.

Fin du problème II