TD13 : Espaces probabilisés

Exercice 1 **(Mines-Télécom PSI 2019)**
Un prédateur R chasse de la façon suivante : s'il a mangé un jour, il ne va pas chasser le lendemain ; s'il n'a pas mangé, il part chasser et attrape une proie avec la probabilité $p = \dfrac{1}{2}$ (et la mange). Le premier jour, il n'a pas mangé et part donc à la chasse.

1. Déterminer la probabilité que R reste à jeun les n premiers jours.

2. Quelle est la probabilité que R attrape sa première proie le $n^{\text{ème}}$ jour ?

3. Si p_i est la probabilité de « R attrape une proie le $i^{\text{ème}}$ jour », déterminer une relation entre p_{i+1} et p_i.

4. Déterminer la limite de (p_i).

Exercice 2 **(Centrale PSI 2015)**
On suit l'évolution d'une particule entre différentes positions A, B, C et D. A $t = 0$, la particule est en B. A $t = n$, la particule change de position selon le schéma suivant : elle va

— de A en A avec une probabilité de 1,
— de B en A avec une probabilité de p,
— de B en C avec une probabilité de $1 - p$,
— de C en B avec une probabilité de p,
— de C en D avec une probabilité de $1 - p$,
— de D en A avec une probabilité de 1.

1. On pose $X_n = {}^t\big(P(A_n) \quad P(B_n) \quad P(C_n) \quad P(D_n)\big)$, où A_n est l'événement « la particule est en A à l'instant n ». Déterminer une matrice A indépendante de n telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $0 < p < 1$.
A faire après le chapitre sur la réduction.

3. Pour $p = 1/2$, calculer la probabilité quand n tend vers $+\infty$ que la particule se trouve dans chaque position.

Exercice 3 **(Mines-Télécom PSI 2022)**
On lance une pièce qui donne pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On fait deux lancers : si on fait PP, on a gagné ; si on fait FF, on a perdu ; sinon on recommence.

1. Quelle est la probabilité de gagner ?

2. Est-on presque sûr que le jeu se termine ?

Exercice 4 **(Mines-Ponts PSI 2023)**

1. Calculer, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1 - x)^q \,\mathrm{d}x$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dispose de p urnes numérotées de 1 à p. Chaque urne contient p boules et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, l'urne numéro i contient i boules noires et $p - i$ boules blanches. On effectue l'expérience suivante : choisir au hasard une urne puis effectuer des tirages avec remise dans l'urne choisie. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement : « on a effectué $2n$ tirages et obtenu le même nombre de boules blanches que de noires ».

a) Exprimer $P(A_n)$ sous forme d'une somme.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} P(A_n)$.

c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Exercice 5
Jeu à trois joueurs
Trois personnes A, B et C lancent à tour de rôle (et toujours dans cet ordre) une pièce qui donne pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. Le vainqueur est le premier à obtenir pile ; la partie est alors finie.

1. On note $A_n =$ « A gagne lors du $n^{\text{ème}}$ lancer » (de même B_n pour B et C_n pour C).
Calculer $p(A_n)$, $p(B_n)$ et $p(C_n)$ en fonction de n.

2. Calculer la probabilité de gagner de chaque joueur.

3. Quelle est la probabilité qu'il y ait un vainqueur ?

Exercice 6 **(Centrale PC 2015)**
Les joueurs A et B possèdent N billes : A en possède n et B les $N - n$ autres. A chaque partie, A gagne avec la probabilité p ; s'il gagne, B lui donne une bille, s'il perd, il donne une bille à B. On note p_n la probabilité que A gagne la partie avec n billes au départ (A gagne s'il obtient les N billes). Déterminer p_n.
indication : trouver une relation de récurrence sur la suite (p_n) en conditionnant par le résultat de la première partie. Si on pose A_1 « A gagne la première partie » et E_n « A gagne avec n billes », expliquer pourquoi $P_{A_1}(E_n) = P(E_{n+1})$.