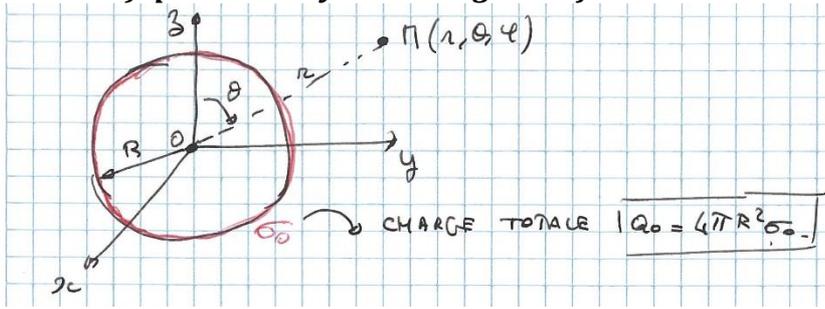


ΠΣ12. em3. Calculs de champs en statique. Proposition de correction.

PSI2.em 03. II Théorème de Gauss et relation de Maxwell-Gauss.

EA) Sphère de rayon R chargée uniformément en surface avec la charge Q_0 .



Coordonnées sphériques.

Symétrie et invariances : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$ et $V(M) = V(r)$

Surface de Gauss : sphère de centre O et de rayon r

Flux sortant : $\Phi = 4\pi r^2 E(r)$

Charge intérieure : $Q_{int} = 0$ si $r < R$; $Q_{int} = Q_0$ si $r > R$

$$E(r) = 0 \quad \text{si } r < R$$

Application du théorème de Gauss : $E(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ si $r > R$

La relation $dV = -\vec{E}(M)d\vec{OM}$ avec $d\vec{OM} = dr\vec{e}_r$ donne : $dV = -E(r)dr$

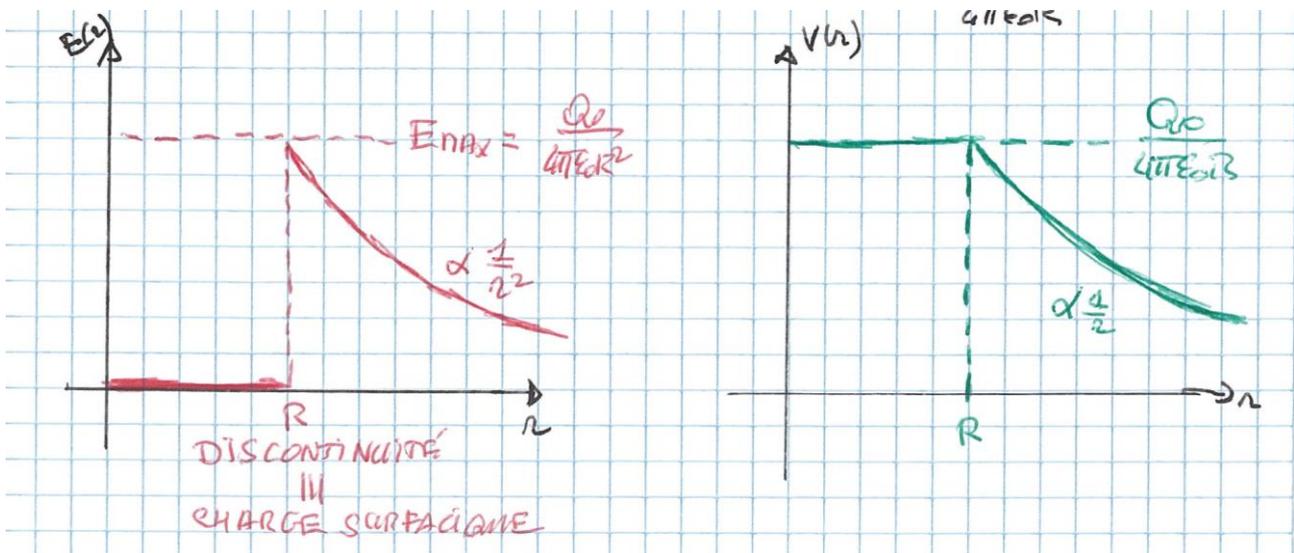
Qui peut s'intégrer :

$$V(r) = K_1 \quad \text{si } r < R$$

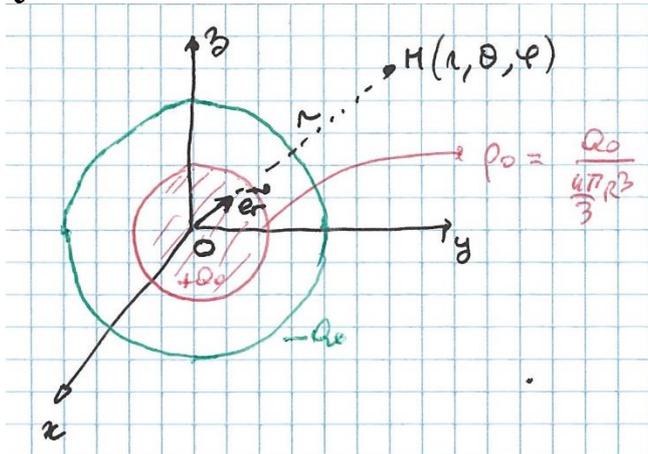
$$V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} + K_2 \quad \text{si } r > R$$

La continuité du potentiel en $r=R$ donne : $K_1 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R} + K_2$

On peut choisir $K_2 = 0$, soit potentiel nul à l'infini, ce qui donne $K_1 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R}$



EB) Boule sphérique de centre O , de rayon R , chargée uniformément en volume avec la charge Q_0 , + plus la sphère de centre O , de rayon $2R$, chargée uniformément en surface avec la charge $-Q_0$.



Coordonnées sphériques.

Symétrie et invariances : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$ et $V(M) = V(r)$

Surface de Gauss : sphère de centre O et de rayon r

Flux sortant : $\Phi = 4\pi r^2 E(r)$

Charge intérieure :

$$\text{si } r < R \quad Q_{\text{int}} = Q_0 \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$\text{si } R < r < 2R \quad Q_{\text{int}} = Q_0$$

$$\text{si } r > 2R \quad Q_{\text{int}} = 0$$

Application du théorème de Gauss :

$$\text{si } r < R \quad E(r) = \frac{Q_0 r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\text{si } R < r < 2R \quad E(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{si } r > 2R \quad E(r) = 0$$

La relation $dV = -\vec{E}(M)d\vec{OM}$ avec $d\vec{OM} = dr\vec{e}_r$ donne : $dV = -E(r)dr$

Qui peut s'intégrer :

$$V(r) = -\frac{Q_0 r^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + K_1 \quad \text{si } r < R$$

$$V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} + K_2 \quad \text{si } R < r < 2R$$

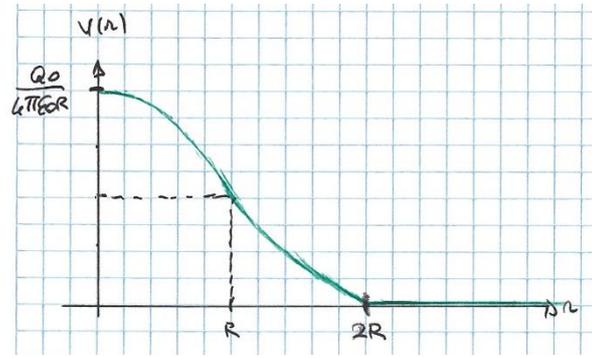
$$V(r) = K_3 \quad \text{si } 2R < r$$

On peut prendre le potentiel nul à l'infini soit $K_3 = 0$. On a continuité du potentiel ce qui donne

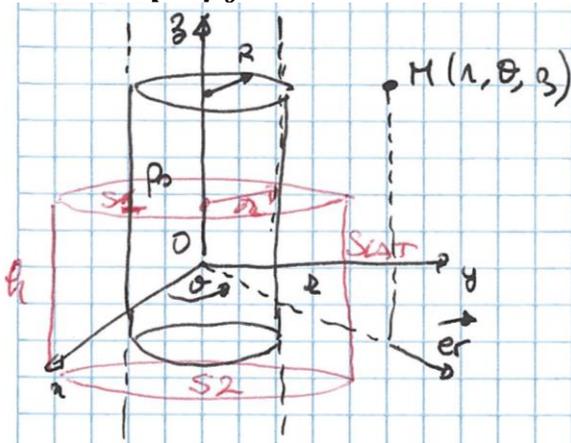
$$\text{successivement : } K_2 = -\frac{Q_0}{8\pi\epsilon_0 R} \text{ puis } K_1 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R}$$

La continuité du potentiel en $r=R$ donne : $K_1 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R} + K_2$

On peut choisir $K_2 = 0$, soit potentiel nul à l'infini, ce qui donne $K_1 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R}$



EC)Cylindre infini de section circulaire de rayon R , chargé uniformément en volume avec la densité volumique ρ_0 .



Coordonnées cylindriques d'axe Oz.

Symétrie et invariances : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$ et $V(M) = V(r)$

Surface de Gauss : « boîte de conserve » cylindre d'axe Oz, de rayon r , de hauteur h , avec les deux disques haut et bas.

Flux sortant : $\Phi = 2\pi r h E(r)$

Charge intérieure : $Q_{int} = (\pi r^2 h)\rho_0$ si $r < R$; $Q_{int} = (\pi R^2 h)\rho_0$ si $r > R$

$$E(r) = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \quad \text{si } r < R$$

Application du théorème de Gauss :

$$E(r) = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r} \quad \text{si } r > R$$

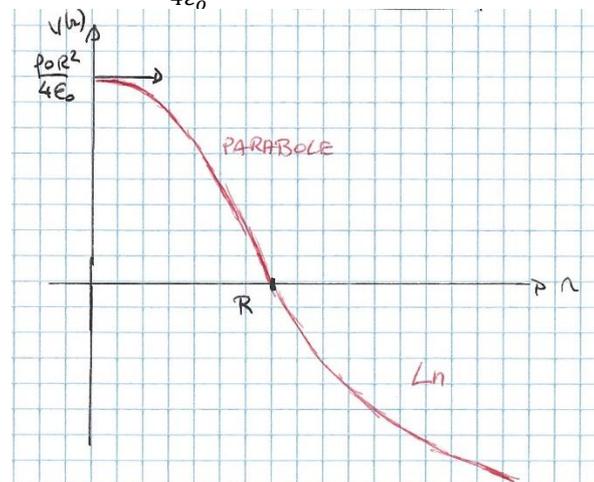
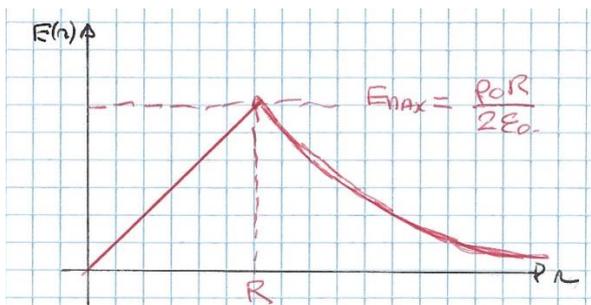
La relation $dV = -\vec{E}(M)d\vec{OM}$ avec $d\vec{OM} = dr\vec{e}_r$ donne : $dV = -E(r)dr$

Qui peut s'intégrer :

$$V(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0} + K_1 \quad \text{si } r < R$$

$$V(r) = -\frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad \text{si } r > R \quad (\text{notation un peu subtile})$$

On ne peut pas prendre le potentiel nul à l'infini (à la différence du cas précédent). Pour faire simple, on peut le prendre nul en $r=R$, ce qui donne : $r_0 = R$ et $K_1 = \frac{\rho_0 R^2}{4\epsilon_0}$



MG2)

1) La force subie par l'électron en M est $\vec{F} = -e\vec{E}(M) = \frac{-e\rho_0}{3\epsilon_0}\vec{OM}$ avec $\rho_0 = \frac{3e}{4\pi a^3}$

On peut remarquer que : $\overrightarrow{\text{grad}}(r^2) = \overrightarrow{\text{grad}}(x^2 + y^2 + z^2) = (2x \quad 2y \quad 2z) = 2\vec{OM}$

D'où finalement : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{e^2 r^2}{8\pi\epsilon_0 a^3}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$

On a alors un système conservatif et une position d'équilibre correspond à un extremum d'énergie potentielle. Soit donc ici $x=0$. C'est en fait en fait un minimum d'énergie potentielle donc l'équilibre est stable.

Pour la suite le plus simple est d'appliquer le PFD : $m \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}\vec{OM} = -m\omega_0^2\vec{OM}$

Si vous ne reconnaissez pas un oscillateur harmonique vectoriel de pulsation ω_0 , projeter sur les 3 axes, cela donnera 3 oscillateurs harmoniques. L'électron reste bien au voisinage de sa position d'équilibre.

D'un point de vue numérique avec la taille usuelle d'un atome, on calcule une pulsation propre de 10^{16} s^{-1} soit une fréquence propre de 10^{15} Hz ce qui correspond à des photons proches du visible.

2) Le PFD donne maintenant : $m \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \vec{F} = -m\omega_0^2\vec{OM} - e\vec{E}_0$

La position d'équilibre correspond à $\vec{OM}_0 = -\frac{e}{m\omega_0^2}\vec{E}_0$ et elle est stable en supposant que qu'elle est à l'intérieur de l'atome.

Si le champ est suffisamment intense pour faire sortir l'électron, alors il quitte l'atome et on a ionisation.

On évalue alors : $E_{olim} = \frac{am\omega_0^2}{e} \approx 10^{10} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, ce qui est une valeur gigantesque. dans le cadre de ce modèle, on ne pourra pas ioniser un atome avec un champ électrique statique.

MG3)

a) Prendre deux charges massives en interaction. Ecrire les deux forces d'interaction électrostatique et gravitationnelle. MEME FORME SYMBOLIQUE avec les analogies suivantes :

$$q \leftrightarrow m \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -G \quad q\vec{E} \leftrightarrow m\vec{g} \quad \vec{E} \leftrightarrow \vec{g}$$

Le théorème de Gauss en gravitation s'écrit donc :

$$\oiint_{P \in S} \vec{g}(P) \vec{n} dS = -4\pi G M_{int}(S)$$

Le champ gravitationnel à l'intérieur de la Terre peut donc s'écrire : $\vec{g}(M) = -\frac{4\pi G \mu}{3} r \vec{e}_r = -g_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r$ par définition de g_0 .

b) On définit le poids de l'élément de volume et on applique le PFD sur l'élément immobile. On obtient : $\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \mu \vec{g}$ soit aussi $\overrightarrow{\text{grad}}(P) d\vec{OM} = dP = \mu \vec{g} \cdot d\vec{OM}$

On choisit maintenant un déplacement radial : $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r$

On obtient : $dP = -\mu g_0 \frac{r}{R} dr$ qui s'intègre en $P = -\frac{\mu g_0}{2R} r^2 + cte = -\frac{\mu g_0}{2R} r^2 + P(0)$

On obtient la relation proposée pour $r=R$. On évalue la pression au centre de la Terre à 2Mbar.

MG4 fin)

Pour le début, les résultats sont fournis. Vous devez savoir les retrouver.

b) Si on s'approche du point O , la densité volumique de charge tend vers $-\infty$.

c) Pour calculer une charge intérieure, on reprend le théorème de Gauss à l'envers.

$$Q(r) = \varepsilon_0 \iint_{\text{sphère de rayon } R} \vec{E}(M) \vec{n} dS = \varepsilon_0 (4\pi r^2) \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right) \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)$$

Soit :

$$Q(r) = Q \left(1 + \frac{r}{r_0} \right) \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) \quad Q(r \rightarrow 0^+) = Q \quad Q(+\infty) = 0$$

Il y a une charge ponctuelle Q à l'origine et la charge totale du système est nulle : il s'agit tout simplement d'un atome, noyau ponctuel à l'origine, nuage électronique distribué dans tout l'espace. Entre la physique classique et la physique quantique.

MG5)

1) Les plans (M, M_x, M_z) et (M, M_y, M_z) sont des plans de symétries pour le système de charges et passent par M . On en déduit que le champ électrique est selon l'intersection de ces 2 plans, soit selon Oz . On note : $\vec{E}(M) = E(x, y, z) \vec{e}_z$.

Le système de charges est invariant selon une translation selon Ox ou Oy , donc $E(x, y, z) = E(z)$.

Si on prend maintenant M dans le plan $z=0$, alors le plan (M, M_x, M_y) est aussi plan de symétrie pour le système de charges et le champ en M est alors perpendiculaire à l'axe Oz donc $E(0)=0$. On peut aussi montrer que $E(z)$ est une fonction impaire ce qui donne automatiquement $E(0)=0$.

$$2) \text{MG donne ici : } \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{dE}{dz} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Pour z compris entre $-a/2$ et $+a/2$, $\rho = \rho_0$ donc l'intégration donne $E(z) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} z + cte = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} z$ car $E(0)=0$.

Pour $z > a/2$, MG devient : $\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{dE}{dz} = 0$ ce qui donne $E(z) = cte = E(a/2) = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}$ par continuité (il n'y a pas de charges surfaciques).

Pour $z < -a/2$, on obtient de même $E(z) = cte = E(-a/2) = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}$

REM : essayez le théorème de Gauss sur une boîte de conserve d'axe Oz , de section droite S , entre les ordonnées $-z$ et z avec $z > 0$. Il y a 2 cas pour le calcul de la charge intérieure et vous obtenez $E(z)$ pour $z > 0$. L'imparité vous permet d'étendre le résultat. CF l'exer de cours pour la symétrie plane.

$$3) \text{Pour } |z| > a/2, \text{ on peut prendre la formule unique } E(z) = \text{signe}(z) \cdot \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}$$

Si on fait tendre a vers 0 en maintenant constant $\rho_0 a = \sigma$, on tend physiquement vers le plan infini uniformément chargé σ et on retrouve le résultat vu en cours, notamment la discontinuité à la traversée du plan.

MG6)

$$1) \text{On utilise : } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x.$$

Pour $x < 0$, le champ est nul.

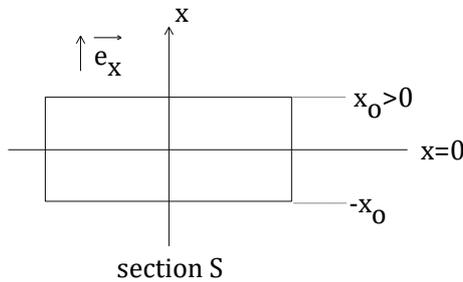
$$\text{Pour } x > 0, \text{ on obtient } \vec{E} = E(x) \vec{e}_x = -\frac{V_0}{a} \vec{e}_x.$$

Il y a un pb en $x=0$ où il y a une discontinuité de champ, que nous allons attribuer à la présence d'une charge surfacique σ sur la plan $x=0$.

$$2) \text{On utilise MG. Pour } x < 0, \text{ on obtient } \rho = 0. \text{ Pour } x > 0, \rho = \frac{\epsilon_0 V_0}{a^2} \cdot \exp(-x/a)$$

3) On utilise le th de Gauss sur une boîte de conserve d'axe Ox , centrée en $x=0$, de section droite S

:



Le seul flux non nul est sur le couvercle supérieur et donne $\phi = SE(x_0)$.

La charge intérieure se compose de la charge σS sur la plan $x=0$ et de la charge (distribuée en volume) non nulle comprise entre l'abscisse $x=0$ et $x=x_0$. Le calcul complet n'est pas nécessaire mais on obtient :

$$Q_{\text{int}}(x_0) = \sigma S + S \frac{\epsilon_0 V_0}{a} \cdot [1 - \exp(-x_0/a)]$$

On fait maintenant tendre x_0 vers 0^+ et on obtient : $\sigma = \epsilon_0 E(0^+) = -\frac{\epsilon_0 V_0}{a}$

On peut maintenant vérifier que la charge totale du système est nulle en faisant tendre x_0 vers l'infini. Ne pas oublier qu'il s'agit ici de la description d'un système réel et la matière est neutre électriquement.

MG7)

1) Le métal est supposé parfait donc le champ électrique est nul donc le potentiel électrique est uniforme. La dernière partie de la question suppose connu le théorème d'unicité de Laplace, qui est Hors Programme.

2) On a un pb à symétrie sphérique. En utilisant les coordonnées sphériques habituelles, les considérations de cours à redévelopper donnent : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$

Implicitement, on a $R_1 < R_2$, pas forcément évident.

On utilise maintenant le théorème de Gauss sur une sphère de centre O et de rayon r .

Pour $r < R_1$ $Q_{\text{int}} = 0$ et $E(r) = 0$

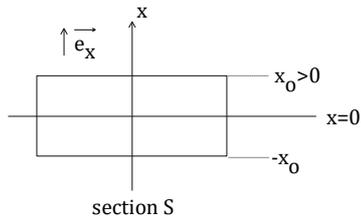
Pour r compris entre R_1 et R_2 exclus, $Q_{\text{int}} = Q_1$ et $E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Pour $r > R_2$ $Q_{\text{int}} = 0$ et $E(r) = 0$

3) On utilise : $dV = -\vec{E} \cdot d\overrightarrow{OM}$ avec un déplacement élémentaire radial $d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r$, ce qui donne, pour r compris entre R_1 et R_2 , $dV = -\frac{Q_1 dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ce qui s'intègre en $V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cte}$

On calcule alors $u = V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} = \frac{Q_1}{C}$

ce qui donne la valeur de la capacité C du condensateur ainsi formé.

MG8)

Localement, la surface externe du métal est assimilée à son plan tangent $x=0$, le métal étant dans la partie $x<0$, l'air dans la partie $x>0$. La partie $x<0$ est une zone équipotentielle où le champ électrique est nul. A la surface du métal en $x=0$, on a une densité surfacique σ . Au voisinage immédiat du métal, le champ électrique est selon Ox : $\vec{E}(x = 0^+) = E_0 \vec{e}_x$

On applique le théorème de Gauss sur la boîte de converse ci-dessus pour laquelle on va faire tendre x_0 vers 0^+ .

La charge intérieure est $Q_{int} = \sigma S$.

Le flux sur le couvercle supérieure tend vers $E_0 S$. Le flux sur la surface latérale tend vers 0 car la surface latérale tend vers 0 et le champ électrique reste borné. Le flux sur le couvercle intérieur est évidemment nul.

On obtient alors : $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

MG9.

3)

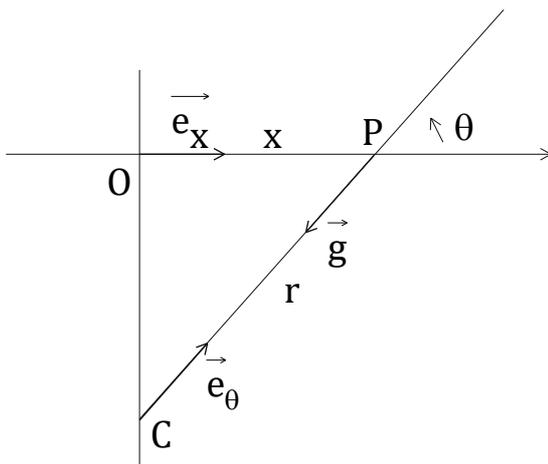


Figure 1

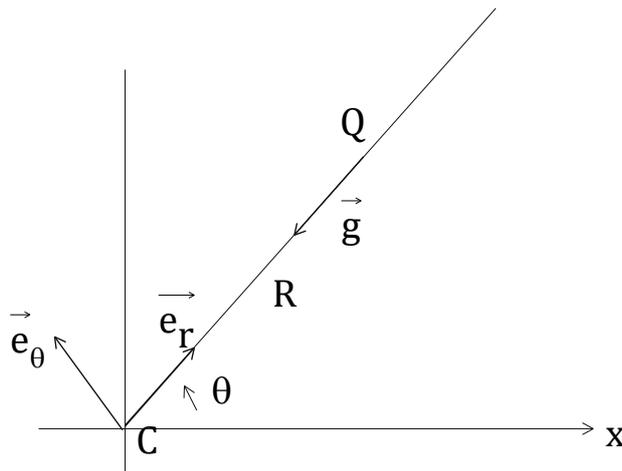


Figure 2

On s'occupe d'abord du mouvement de P, cf figure 1.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen, le système est le point P.

Forces appliquées : le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -m \frac{rg_o}{R} \vec{e}_r$

la force de liaison avec le tunnel, notée \vec{R} orthogonal au mouvement car la liaison est sans frottement.

On écrit donc le PFD qu'on projette sur l'axe Ox :

$$m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{e}_x = \vec{P} + \vec{R} \text{ devient : } m\ddot{x} = -m \frac{rg_o}{R} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x + 0 = -m \frac{rg_o}{R} \cdot \cos(\theta) = -m \frac{rg_o}{R} \cdot \frac{x}{r}$$

Soit un oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \quad \text{avec } \omega_o = \sqrt{\frac{g_o}{R}} \quad \text{et une période } T_P = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_o}}$$

On s'occupe maintenant du mouvement de Q, cf figure 2. Je prends un mouvement circulaire dans le sens trigonométrique donc $\vec{v} = v\vec{e}_\theta = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ avec v et $\dot{\theta}$ positifs

Le référentiel terrestre est supposé galiléen, le système est le point Q.

Force appliquée : le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg_o\vec{e}_r$

Du fait de la trajectoire circulaire :

$$\vec{CQ} = R\vec{e}_r \quad \vec{v} = v\vec{e}_\theta = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r$$

Le PFD : $m\vec{a} = m\vec{g}$ donne alors :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \text{ donc } v=Cte \text{ le mouvement est circulaire uniforme.}$$

$$\frac{v^2}{R} = g_o \text{ soit } v = +\sqrt{Rg_o} \text{ à cause du mvt dans le sens trigo.}$$

$$\text{La période } T_Q \text{ vérifie alors : } 2\pi R = vT_Q \text{ soit : } T_Q = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_o}} = T_P$$

Les deux mouvements ont la même période, donc les mobiles P et Q vont se retrouver au même endroit tous les $T_Q=T_P$.

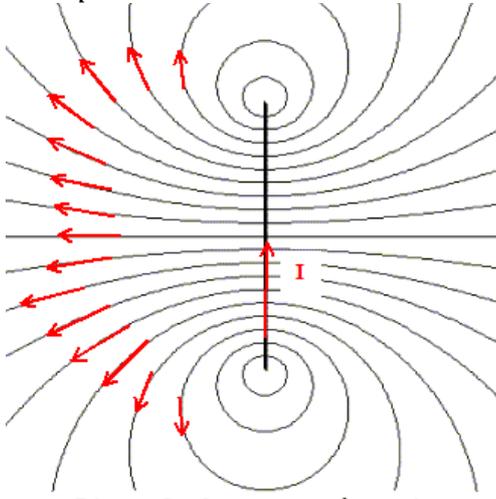
PSI2. em 03. symétrie invariances.

a) Pour un point M du plan de la spire, le plan de la spire passe par M et est un plan de symétrie pour les courants donc le champ magnétique en M est perpendiculaire au plan de la spire.

b) Si M est sur l'axe de spire, le système de courants est invariant par rotation par rapport à l'axe de la spire, donc le champ magnétique en M doit aussi l'être donc est selon l'axe de la spire.

c) En un point M quelconque, le plan passant par M et contenant l'axe de la spire est un plan d'antisymétrie pour les courants, donc le champ en M est dans ce plan : les lignes de champ magnétiques sont contenues dans des plans qui contiennent l'axe de la spire.

Exemple de simulation :



PSI2. em03. III. Théorème d'Ampère et relation de MA.

$$\mathbf{MA1}) \vec{j}_o = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_z.$$

1) SYMETRIES. Soit un point M . Le plan M qui contient l'axe Oz est un plan de symétrie pour les courants donc le champ en M est orthogonal à ce plan donc selon \vec{e}_θ .

On peut donc écrire : $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$

INVARIANCES : la distribution de courant est invariante par translation selon Oz , donc B ne dépend pas de z .

La distribution de courant est invariante par rotation d'axe Oz , donc B ne dépend pas de θ .

DONC $\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta$.

2) a) Un déplacement élémentaire sur le cercle s'écrit $d\vec{OM} = r d\theta \vec{e}_\theta$, la circulation du champ magnétique sur le cercle s'écrit :

$$C = \oint_{\text{cercle}} \vec{B}(M) d\vec{OM} = \oint_{\text{cercle}} B(r) \vec{e}_\theta r d\theta \vec{e}_\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} B(r) r d\theta$$

Sur le cercle, r et $B(r)$ sont constant donc sortent de l'intégrale.

$$C = rB(r) \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = 2\pi r B(r)$$

b) Pour $r > R$, le courant enlacé est tout simplement $I_{enl} = I$.

Pour $r < R$, le courant enlacé est : $I_{enl}(r) = I \left(\frac{r}{R}\right)^2$

4) On reprend la méthode vue avec Gauss et la boule sphérique avec cavité.

La cavité cylindrique peut être considérée comme parcourue par deux densités de courant volumiques \vec{j}_o et $-\vec{j}_o$

Avec la première densité de courant, le système redevient celui des questions précédentes, et on peut calculer le premier champ magnétique : pour un point M de la cavité, $\vec{B}_+(M) = \frac{\mu_0}{2} \vec{j}_o \wedge \vec{OM}$.

Avec la seconde densité de courant, on peut aussi calculer le second champ magnétique dans la cavité d'axe $O'z$ selon : $\vec{B}_-(M) = \frac{\mu_0}{2} (-\vec{j}_o) \wedge \vec{O'M}$.

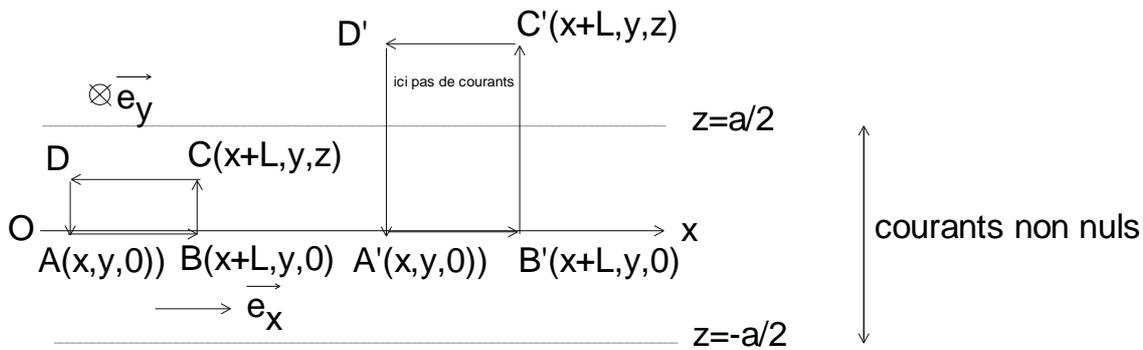
Dans la cavité, le champ magnétique total est la somme des deux ce qui donne : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2} \vec{j}_o \wedge \vec{OO'}$, soit un champ magnétique uniforme dans la cavité.

MA2) Dans cet exercice, on ne pas partir de la relation MA car Maxwell ne connaît pas les distributions surfaciques. Il faut prendre le théorème d'Ampère. Même méthode sauf pour le courant enlacé :

Pour $r < R$, $I_{enl}(r) = 0$, et le champ magnétique est nul. Pour $r > R$, $I_{enl}(r) = I$, même expression pour $B(r)$. Il y a une discontinuité de champ magnétique en $r = R$.

On peut vérifier la relation de continuité vue plus loin :

$$\vec{B}(r = R^+) - \vec{B}(r = R^-) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\theta - \vec{0} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_r = \mu_0 \frac{I}{2\pi R} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\theta$$

MA4)

1) On prend $z > 0$. On prend le contour $ABCD$, de vecteur normal $-\vec{e}_y$, de courant enlacé $-j_0 L z$.
 La circulation du champ magnétique sur les segments AB , BC , et DA sont nuls (champ magnétique nul ou perpendiculaire au déplacement), la circulation sur CD donne $-LB(z)$.
 Le théorème d'Ampère donne alors : $B(z) = \mu_0 j_0 z$.

2) Pour $z > a/2$, on prend le contour $A'B'C'D'$. Même méthode sauf que le courant enlacé vaut maintenant $-j_0 L a/2$.
 Le théorème d'Ampère donne alors : $B(z) = \mu_0 j_0 a/2$.

3) Pour z négatif, la fonction est impaire. On peut par exemple écrire :
 Pour z compris entre $-a/2$ et $+a/2$, $B(z) = \mu_0 j_0 z$
 Sinon $B(z) = \text{signe}(z) \cdot \mu_0 j_0 a/2$

MA5) Etude du tore.

a) Soit un point M de l'espace repéré par ses coordonnées polaires (r, θ, z) .

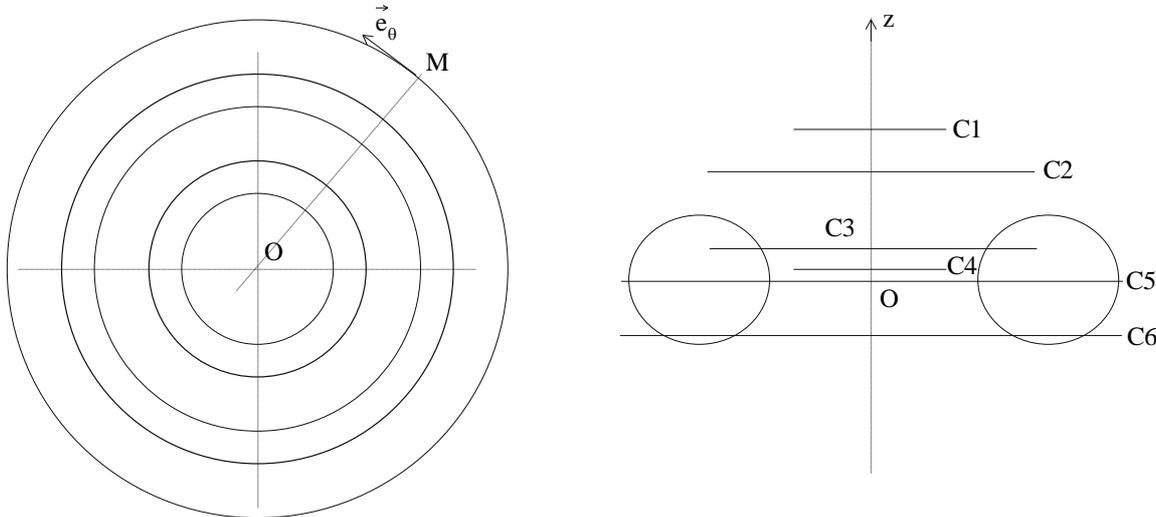
Le plan (M, Oz) est un plan de symétrie pour le système de courants, donc le champ magnétique en M est orthogonal à ce plan donc selon \vec{e}_θ . On écrit $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\vec{e}_\theta$

Le système de courants est invariant par rotation d'axe Oz , donc $B(r, \theta, z)$ ne dépend pas de θ .

b1) Le vecteur tangent du contour est \vec{e}_θ et le contour est à altitude z constante. Le calcul de la circulation sur le cercle se simplifie et on obtient : $\text{circulation}(r, z) = 2\pi r B(r, z)$

b2) Là, il va falloir voir dans l'espace.

D'abord, soit le contour est totalement à l'extérieur du tore, soit il est totalement à l'intérieur du tore. On enlève le cas limite où il est sur le tore.



Si le contour est à l'intérieur du tore (cas C3), donc le point M dans le tore, toutes les spires traversent une fois et une seule fois le disque associé au contour et dans le sens de z . Le courant enlacé est donc : NI

Le théorème d'Ampère donne alors : $B(M) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$.

Si le contour est maintenant à l'extérieur du tore, donc M à l'extérieur du tore, il y a encore plusieurs cas :

a) aucune spire ne traverse le disque s'appuyant sur le contour (C1, C2, C4). Le courant enlacé est donc nul et le B aussi.

b) une spire traverse le disque (C5, C6), alors elle le traverse une seconde fois dans le sens inverse. Il en sera de même pour toutes les autres spires. Donc le courant enlacé est encore nul et B est nul.

Bilan : à l'extérieur du tore, le champ magnétique est nul. À l'intérieur du tore, il est non nul. On a une discontinuité de champ sur le tore lui-même. Toutes les lignes de champs sont des cercles d'axe Oz inclus dans le tore.

MA6.

0) $\frac{\mu_0 i}{2R} \vec{e}_z$ est tout simplement le champ magnétique en $z=0$, donc au centre de la spire.

1a) $r \ll a$ tout simplement.

1b) On n'est plus sur l'axe, donc la formule, calculée sur l'axe n'est plus rigoureusement valable.

On a fait tout simplement un DL à l'ordre 0 en r sur la composante $B_z(r, z)$.

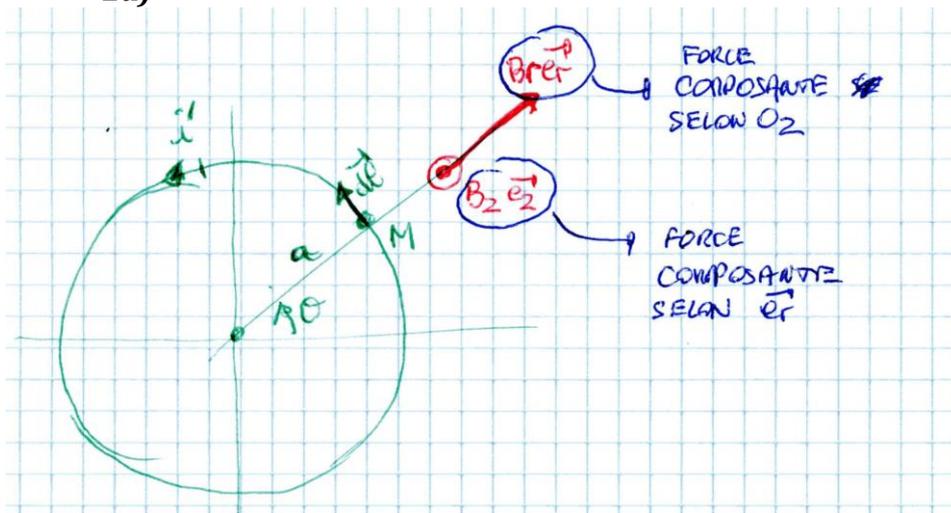
1c) MT dit : $\text{div}(\vec{B}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$

Ce qui donne ici : $\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + 0 + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ soit $\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = -r \frac{\partial f}{\partial z} = -r f'(z)$

Ce qui s'intègre par : $rB_r = -\frac{r^2}{2} f'(z) + \text{Cte}$ puis : $B_r = -\frac{r}{2} f'(z) + \frac{\text{Cte}}{r}$

En $r=0$, on sait $B_r=0$, ce qui donne $\text{Cte}=0$: $B_r = -\frac{r}{2} f'(z)$

2a)



$$d\vec{F} = i' dl \vec{e}_\theta \wedge \vec{B} = i' dl \vec{e}_\theta \wedge (B_r(a, d) \vec{e}_r + f(d) \vec{e}_z)$$

Soit :

$$d\vec{F} = i' f(d) dl \vec{e}_r + i' B_r(a, d) dl \vec{e}_z$$

2b)

Composante radiale: $d\vec{F}_r = i' dl \vec{e}_\theta \wedge f(d) \vec{e}_z = i' f(d) dl \vec{e}_r$

Si vous faites le tour de la petite spire, cela fait 0.

Composante selon z: $d\vec{F}_f = i' dl \vec{e}_\theta \wedge B_r(a, d) \vec{e}_r = i' B_r(a, d) dl \vec{e}_z$

Il ne reste plus qu'à faire le tour de la petite spire où la fonction à intégrer est constante :

$$\vec{F}_f = i' B_r(a, d) 2\pi a \vec{e}_z = -i' f'(d) \pi a^2 \vec{e}_z$$

2c) Attention : si $i > 0$, $f'(d) < 0$, on aura une force attractive si $i' > 0$.

Pour avoir une interaction attractive, il faut que le produit des courants soit positif.