

## I Réduction des endomorphismes

### 1. Éléments propres

- Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme : définitions, spectre, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes sont en somme directe, liberté d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes, stabilité des espaces propres de  $u$  par un endomorphisme commutant avec  $u$ .
- Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée : définition, cas d'une matrice réelle (les valeurs propres complexes sont conjuguées et les espaces propres correspondants sont de même dimension).
- Polynôme caractéristique : ordre de multiplicité des valeurs propres, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres, deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique,  $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_{A^T}$ , lien entre la dimension d'un espace propre et l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante. Le polynôme caractéristique de tout endomorphisme induit par  $u$  sur un sous-espace stable divise  $\mathcal{X}_u$ .

### 2. Réduction des endomorphismes en dimension finie (et des matrices carrées)

- Diagonalisation : définitions équivalentes ( $E$  est somme directe des espaces propres, existence d'une base de  $E$  formée de vecteurs propres,  $\dim(E)$  est égal à la somme des dimensions des sous-espaces propres),  $u$  est diagonalisable si et seulement si  $\chi_u$  est scindé et pour toute valeur propre  $\lambda$ ,  $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$ , cas particulier des endomorphismes dont le polynôme est scindé à racines.
- Polynôme annulateur : si  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  alors  $P(\lambda) \in \text{Sp}(P(u))$ ,  $\text{Sp}(u)$  est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur,  $u$  est diagonalisable si et seulement si  $u$  possède un polynôme annulateur scindé à racines simples donc si et seulement si  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$  est annulateur de  $u$ , théorème de Cayley-Hamilton (*preuves non exigibles*). Tout endomorphisme induit par  $u$  diagonalisable sur un sous espace stable reste diagonalisable.
- Trigonalisation : définition,  $u$  est trigonalisable si et seulement si  $\mathcal{X}_u$  est scindé. Tout endomorphisme induit par  $u$  trigonalisable sur un sous-espace stable reste trigonalisable. Application aux suites récurrentes linéaires, au spectre de  $P(A), \dots$

## II Espaces probabilisés

- Ensembles finis et dénombrables : définitions,  $\mathbb{Z}$  est dénombrable, le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable, la réunion au plus dénombrables d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. (*Aucune question théorique ne doit être posée sur ce sujet.*)
- Familles sommables : définitions (cas positif, réel et complexe), linéarité, sommation par paquets et théorème de Fubini. (*Selon le programme officiel, aucun exercice non lié aux probabilités ne peut être posé ; on peut donc juste demander de citer un résultat*)
- Espace probabilisé : tribu, événements, événements incompatibles, définition et propriétés d'une probabilité (dont limites monotones et sous-additivité)
- Conditionnement, probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, système complet d'événements, formules des probabilités totales et formule de Bayes. Événements indépendants.
- Épreuves de Bernoulli : définition (épreuve à deux issues), nombre de succès et temps d'attente du premier succès dans une répétition d'épreuves indépendantes (« modèle binomial » et « modèle géométrique »)

À suivre : les intégrales à paramètres