Intégrales à paramètres

I Continuité

Exercice 1 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*

1. Montrer que $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+x^3+t^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Trouver (a,b,c) tel que $\dfrac{1}{1+t^3}=\dfrac{a}{1+t}+\dfrac{bt+c}{1-t+t^2}$ et déterminer $f(0)$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 2 **(CCP PSI 2021)** *[Solution]*

Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^{+*}$ et que f est continue.
2. Soit $v_n=\displaystyle\int_{n-1}^{n}\ln(f(u))\,\mathrm{d}u$; Etudier la nature de $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{v_n}$.
   Indication donnée : poser $\varphi(x)=\displaystyle\int_{x-1}^{x}\ln(f(u))\,\mathrm{d}u$.

Exercice 3 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*

Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que f est continue sur D.
3. Montrer que si $x\in D$ alors $1-x\in D$ et $f(x)=f(1-x)$
4. Déterminer la limite de f aux bornes de D.

Exercice 4 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*

Soit $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$

1. Déterminer l'ensemble de définition de φ et étudier sa continuité
2. Montrer que, pour $x>1$, $\varphi(x)=\Gamma(x)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ où $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

Exercice 5 **(CCP PSI 2022)** *[Solution]*

Soit $f:x\in\mathbb{R}\longmapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{te^{-tx}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Pour tout $x>0$, calculer $f(x-1)-f(x)$.
   En déduire une expression de f sous la forme d'une série de fonctions.
4. Proposer une autre méthode pour décomposer $f(x)$ en somme de série ; obtient-on la même série ?

Exercice 6 **(Mines-Ponts PC 2015)** *[Solution]*

Déterminer le domaine de définition et la limite en $+\infty$ de $f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1-t^x)^{1/x}}$.

Exercice 7 **(Mines-Ponts PC 2006)** *[Solution]*

Montrer que pour $x>0$, $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\arctan t\,\mathrm{d}t$ est définie. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et trouver un équivalent de f en 0.

Exercice 8 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Solution]*

Soit $f(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que si $u \geqslant 0$, $0 \leqslant 1 - u + u^2 - \dfrac{1}{1+u} \leqslant u^3$

3. Montrer que f admet un $\mathrm{DL}_5(0)$

Exercice 9 **(Mines-Ponts PSI 2010)** *[Solution]*

Ensemble de définition, continuité, monotonie et équivalent en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+(xt)^2}\,\mathrm{d}t$?

indication : poser $u = xt$ pour l'étude en $+\infty$.

Exercice 10 **(Centrale PSI 2016)** *[Solution]*

1. Montrer la convergence, pour $x > 0$ de $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
indication : pour toute la suite de l'exercice, poser $t = xu$; pour la limite, TCD.

3. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0

Exercice 11 **(Mines-Ponts PC 2009)** *[Solution]*

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $]0,+\infty[$ telles que $\forall s > 0$, $\dfrac{f(u)}{u+s}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Comparer E à l'ensemble L des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ du point de vue de l'inclusion.

2. Pour quelles valeurs de α, f_α définie par $f_\alpha(u) = u^{\alpha-1}$ est-elle dans E ?

3. Montrer que $\hat{f}_\alpha(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{s+u}\,\mathrm{d}u$ est proportionnelle à $f_\alpha(s)$.

4. Montrer que $\hat{f} : s \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{s+u}\,\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, si $f \in E$, et donner sa limite en $+\infty$.

II Classe $\mathcal{C}^1$ et plus

Exercice 12 **(CCP PSI 2017)** *[Solution]*

1. Montrer que le domaine de définition de $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\,\mathrm{d}t$ contient $]-1,1[$.

2. Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et calculer $g'(x)$ de deux façons différente.
indication : $u = xt$ pour une des deux méthodes.

Exercice 13 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*

Soit F la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 14 *[Solution]*

Calculer (en dérivant) : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 15 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$

1. Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur D

2. Calculer f' puis f.
indication : Pour trouver la constante d'intégration, on peut faire une IPP (en primitivant $\cos(xt)$)

Exercice 16 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*

Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.

2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $g'(x)$.

3. Déterminer la limite de la suite $(g(n))_{n\geqslant 0}$

4. En déduire la valeur de $g(x)$

Exercice 17 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*

Soit $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt)\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

3. Calculer φ' puis φ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 18 **(CCP PSI 2013)** *[Solution]*

Après avoir démontré son existence, calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$, sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (on pourra montrer que F est dérivable).

Exercice 19 **(Mines-Télécom PSI 2017)** *[Solution]*

Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que g est définie sur $D =]-1, +\infty[$.

2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et en trouver une expression simple.

Exercice 20 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

Existence et calcul de $T(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}-1}{t} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 21 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*

On considère $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+\operatorname{ch} t}$.

1. Montrer que f définie sur $]-1, +\infty[$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Montrer l'existence et déterminer la valeur de la limite de f en $+\infty$

Exercice 22 **(Mines-Ponts PC 2015)** *[Solution]*

Étudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité de $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 23 **(ENSAM PSI 2018)** *[Solution]*

On pose $f_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^n}$, pour $n \geqslant 1$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_n et calculer f_1.

2. Montrer que f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et trouver une relation entre f_{n+1} et f_n'.

3. Déterminer f_n.

Exercice 24 **(CCP PSI 2013)** *[Solution]*

1. Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F+G^2$ est constante.

3. Déterminer la limite de F en $+\infty$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 25 **(ENSAM PSI 2015)** *[Solution]*

1. Continuité et dérivabilité de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$?

2. Exprimer f en fonction de $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{+\infty} f$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 26 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire

2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

3. Vérifier, pour $x \neq 1$, $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \dfrac{1}{1-x^2}\left(\dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{x^2}{1+x^2t^2}\right)$ et en déduire la valeur de $g'(x)$ pour $x \geqslant 0$.

4. Montrer que $g(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x)$ pour $x \geqslant 0$.

5. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 27 **(Centrale PC 2015)** *[Solution]*

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. En déduire que, pour $x \in [0,1[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$; calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}$.

Exercice 28 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$

1. Trouver le domaine de définition D de F.

2. Montrer que F est continue sur D.

3. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur un domaine à préciser et, à l'aide d'un changement de variable, que $F'(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)t^x}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)$

En déduire les variations de F.

4. Déterminer les limites de F en $+\infty$ et en 1.

Exercice 29 **(Mines-Ponts PSI 2014)** *[Solution]*

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $y > 0$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer F'.

2. En déduire la valeur de F.

Exercice 30 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*

Soit $I = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que I existe

2. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt}}{t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$

indication : pour $\mathcal{C}^0$, *écrire* $f(x) = I - \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-xt}}{t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$ *et vérifier la CVU de la série de fct*

3. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 31 **(Mines-Ponts PSI 2016)** *[Solution]*

Soient $a, b > 0$ distincts et $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2+a^2}{x^2+b^2} + C$

3. Montrer que $F(x) = -\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} h'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ où $h(t) = \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ et en déduire la valeur de C.

Exercice 32 **(ICNA PSI 2010)** *[Solution]*

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\arctan(xt)}}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \geqslant 0$.

2. Montrer que $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ et calculer $f(0)$.

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

Exercice 33 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*

Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi t}{x+t}\right)\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

2. Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{+\infty} f$

3. En utilisant les deux changements de variable $u = x + t$ puis $v = \dfrac{x\pi}{u}$, montrer que f est dérivable en 0.
indication : c'est sur $f'(x)$ qu'il faut faire ces chgt de variable

Exercice 34 **(Centrale PSI 2013)** *[Solution]*

1. Déterminer l'ensemble de définition et les variations de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition et déterminer la limite de f en 0.

3. f est-elle intégrable sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$?

Exercice 35 **(Mines-Ponts PSI 2013)** *[Solution]*

1. Montrer que F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Donner sa limite en $+\infty$.

3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, calculer F'' puis $F(0)$.

Exercice 36 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t+t^3}}\,\mathrm{d}t$ est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Calculer la limite et déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 37 **(Centrale PC 2015)** *[Solution]*

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
indication : relier g à f'.

Exercice 38 **(AADN PSI 2009)** *[Solution]*

Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer f'' puis f.

Exercice 39 **(Centrale PSI 2016)** *[Solution]*

1. Montrer que f, définie pour $x > 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^2$.

2. Trouver un équivalent de f en $+\infty$, puis en 0.
indication : poser $g(x) = xf(x)$, la limite de g en $+\infty$ se calcule avec le TCD. Pour l'équivalent en 0 : montrer que $g''(x) + \dfrac{1}{x}$ converge en 0 puis que $g'(x) + \ln(x)$ converge en 0 avant de revenir à $g(x)$.

Exercice 40 **(ENSAM PSI 2007)** *[Solution]*

Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer $f(0)$, $f(x)$ et la limite de f en $+\infty$.

Exercice 41 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$ existe pour $x \in D =]-1,+\infty[$.

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur D.

Exercice 42 **(Mines-Télécom PSI 2018)** *[Solution]*

Calculer, pour $x > 0$, $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t + x\sin^2 t}$ et $J(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{(\cos^2 t + x\sin^2 t)^2}\,\mathrm{d}t$; on pourra poser $u = \tan(t)$ pour calculer $I(x)$.

Exercice 43 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*

Soit $F(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(a\sin t)\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$

2. Déterminer $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{1}{a}F(a)$.

Exercice 44 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt^2)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer $F^{(n)}(0)$. F est-elle DSE ?

Exercice 45 **(CCP PSI 2010)** *[Solution]*
Soit f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$; on pose $F(x) = \left(\displaystyle\int_0^1 (f(t))^x\,\mathrm{d}t\right)^{1/x}$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^1 (f(t))^x\,\mathrm{d}t$. Calculer $\dfrac{1}{x}(\ln G(x) - \ln G(0))$ et en déduire que F admet une limite en 0 à déterminer.

III Équations différentielles

Exercice 46 **(Mines-Télécom PSI 2019)** *[Solution]*

1. Énoncer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres

2. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{ch}(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Trouver une équation différentielle vérifiée par f est la valeur de $f(x)$ en fonction de $f(0)$.

Exercice 47 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est dérivable et vérifie une équation différentielle du premier ordre sur $\mathbb{R}$.

3. Résoudre cette équation et en déduire une expression simple de f ; on donne $f(0) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Exercice 48 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*
Soit $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(t)$.

3. Déterminer $f(t)$ sachant $f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f^{(n)}(t)$.

Exercice 49 **(CCP MP 2015)** *[Solution]*
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f vérifie sur $\mathbb{R}^{+*}$ une équation différentielle d'ordre 1.

2. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 50 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

3. En déduire la valeur de f ; on donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 51 **(CCP PC 2015)** *[Solution]*
Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $F(x)$ n'existe que pour $x > 0$ et déterminer la limite de F en $+\infty$.

2. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $2xF(x) - F'(x) = \dfrac{2}{x}$.
En déduire que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Montrer que $F(x) = 2e^{x^2} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t}\, \mathrm{d}t$ et en déduire que $F(x) \underset{x \to 0}{\sim} -2\ln(x)$.

Exercice 52 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*

Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $F(0)$

2. Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$

3. Montrer que $F(x) = x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\, \mathrm{d}t$ si $x > 0$

4. En déduire que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $F'(x) = \dfrac{F(x) - 2G(x)}{x}$ pour $x > 0$

5. Montrer que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $G'(x) = -\dfrac{x}{2}F(x)$

6. Trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par F et en déduire la valeur de F

Exercice 53 **(ENSAM PSI 2013)** *[Solution]*

1. Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

2. Trouver une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par g et en déduire que, pour $x > 0$, on a :
$g(x) = \cos(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t$.

Exercice 54 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $y'' + y = \dfrac{1}{x}$

3. Montrer que f est l'unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de cette équation différentielle, telle que $\displaystyle\lim_{+\infty} y = 0$

Exercice 55 **(CCP PSI 2010 partiel)** *[Solution]*

Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \cos t)\, \mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $xf''(x) + f'(x) + xf(x)$.

Exercice 56 **(CCP PSI 2009)** *[Solution]*

1. Montrer que f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-xt}\, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (sur ?).

2. Montrer qu'il existe une constante c telle que $f(x) = \dfrac{c - \ln x}{x}$. (on pourra étudier $f(x) + xf'(x)$)

Exercice 57 **(CCP PSI 2011)** *[Solution]*

1. Trouver l'ensemble de définition D de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2\,(1+t^2)}\, \mathrm{d}t$.

2. Montrer que f est continue sur D puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$.

3. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour $x > 0$, $f(x) - f''(x) = ax + b$ (on ne cherchera pas à calculer a) puis calculer f.

Exercice 58 **(ENSEA-ENSIIE PSI 2014)** *[Solution]*

Soit $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Exprimer $F(t)$ en fonction de $\theta(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-v^2}\, \mathrm{d}v$; on donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (*trouver une équation différentielle d'ordre* 1 *vérifiée par* F.)

Exercice 59 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} e^{itx}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

indication : commencer par montrer que pour $\varepsilon > 0$, $|f(x)| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon} + \dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ *avec une IPP.*

3. Déterminer f à l'aide de fonctions usuelles (et de $f(0)$).

Exercice 60 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

1. Montrer que $F_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kt}\sin\left(xe^t\right)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour $k \geqslant 2$, F_k est solution de $xy' - ky = -\sin(x)$.

IV Autres

Exercice 61 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

1. Étudier et représenter $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{-x\tan(t)}\,\mathrm{d}t$
2. Étudier (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
3. f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^-$? et sur $\mathbb{R}^+$?

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** Par $\left|\dfrac{1}{1+t^3+x^3}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^3}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2. $\dfrac{1}{1+t^3} = \dfrac{1/3}{1+t} + \dfrac{-1/3t+2/3}{1-t+t^2} = \dfrac{1/3}{1+t} - \dfrac{1}{6}\dfrac{2t-1}{t^2-t+1} + \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}$ donc $f(0) = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

3. Si (x_n) tend vers $+\infty$ alors par TCD (même domination) $f(x_n)$ tend vers 0

Exercice 2 *[sujet]* **1.** Fait en cours (fonction Γ)

2. f est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue positive et non nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$) donc $\ln \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\varphi'(x) = \ln f(x) - \ln f(x-1) = x-1 \geqslant 0$ car $f(x+1) = xf(x)$ (IPP, fait en cours). On en déduit que (v_n) est une suite croissante.
Reste à vérifier que $\lim v_n = +\infty$ pour conclure avec le CSSA : pour $x \geqslant 2$, on a $\varphi'(x) \geqslant 1$ donc (IAF) $\varphi(x) - \varphi(2) \geqslant (x-2)$ ce qui donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$ donc (v_n) tend vers $+\infty$ et $\sum \dfrac{(-1)^n}{v_n}$ CV par CSSA.

Exercice 3 *[sujet]* **1.** $g(x,t) = \dfrac{1}{t^x(1+t)} \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{t^x}$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$ donc $D =]0,1[$.

2. $|g(x,t)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{t^b(1+t)} & \text{si } t \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{t^a(1+t)} & \text{si } t > 1 \end{cases}$ si $x \in [a,b] \subset D$.

3. Poser $u = \dfrac{1}{t}$.

4. $f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{2(1-x)} \xrightarrow[x\to1]{} +\infty$; idem en 0 avec $f(x) = f(1-x)$.

Exercice 4 *[sujet]* **1.** $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $f(x,t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{1}{2t^{1-x}}$ donc $D_\varphi = \mathbb{R}^{+*}$
φ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ car, si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $|f(x,t)| \leqslant f(a,t) + f(b,t)$ (distinguer $t \geqslant 1$ et $t < 1$)

2. $f(x,t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{x-1} e^{-(n+1)t}$ si $t > 0$ puis TITT avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t \overset{u=(n+1)t}{=} \frac{1}{(n+1)^x}\Gamma(x)$ donc $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ CV pour $x > 1$.

3. On vérifie (cf cours) que Γ et $\theta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ sont continues sur $[1,+\infty[$ donc la relation précédente reste valable en $x = 1$. Comme $\Gamma(1) = 1$, on a $\theta(1) = \varphi(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\,\mathrm{d}t = \ln 2$

Exercice 5 *[sujet]* **1.** Si $f(x,t) = \dfrac{te^{-xt}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$, $f(x,t) \xrightarrow[t\to0]{} 1$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} te^{-(x+1)t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x > -1$ alors que si $x \leqslant -1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(x,t) = +\infty$ donc $D_F =]-1,+\infty[$.

2. On a $0 \leqslant f(x,t) \leqslant e^{-xt}$ donc pour $x > 0$, $0 \leqslant F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{+\infty} F = 0$.

3. $F(x-1) - F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}$ et par télescopage, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(F(x+n) - F(x+n+1)) = \sum_{n\geqslant0} \frac{1}{(n+x+1)^2}$

4. Par TITT avec $f(x,t) = \displaystyle\sum_{n\geqslant0} te^{-(x+n+1)t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |e^{-(x+n+1)t}|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1+x)^2}$.

Exercice 6 *[sujet]* $t \mapsto g(x,t) = \exp\left[-\dfrac{1}{x}\ln(1-t^x)\right]$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,1[$ si $x > 0$; au voisinage de $t = 1$, on a $t^x = e^{x\ln(t)} = e^{x((t-1)+o(t-1))} = 1 + x(t-1) + o(t-1)$ donc $ln(1-t^x) = \ln(x(1-t) + o(1-t)) = \ln(1-t) + ln(x) + o(1)$ et $g(x,t) = \exp\left[-\dfrac{1}{x}\ln(1-t) - \dfrac{\ln x}{x} + o(1)\right] \sim \dfrac{x^{-1/x}}{(1-t)^{1/x}}$ donc $D_f =]1,+\infty[$.
Si (x_n) tend vers $+\infty$, $u_n(t) = g(x_n,t) = \exp\left[-\dfrac{1}{x_n}\ln(1-t^{x_n})\right] = \exp\left[\dfrac{1}{x_n}t^{x_n}(1+o(1))\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ pour $t \in]0,1[$ donc (u_n) CS vers 1 et, avec $|u_n(t)| \leqslant 1$, par TCD, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 7 *[sujet]* **1.** Pour la définition et la continuité : si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, on a $\left|e^{-xt}\arctan t\right| \leqslant \arctan(t)e^{-at} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \dfrac{\pi}{e}^{-at}$ et $a > 0$.

2. $f(x) \overset{u=xt}{=} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}\,\mathrm{d}u$ et on vérifie que $\displaystyle\lim_{x\to 0} xf(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\pi}{2}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ par TCD : si (x_n) est une suite tendant vers 0 alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\arctan\left(\frac{u}{x_n}\right) = \frac{\pi}{2}$ si $u > 0$ puis $\left|\arctan\left(\dfrac{u}{x_n}\right)e^{-u}\right| \leqslant e^{-u}$ donne la domination.

Exercice 8 *[sujet]* **1.** $\left|\dfrac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}\right| \leqslant e^{-t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier $u \mapsto 1 - u + u^2 - \dfrac{1}{1+u}$ et $u \mapsto u^3 - u^2 + u - 1 + \dfrac{1}{1+u}$

3. $0 \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - f(x) \leqslant x^6\int_{-\infty}^{+\infty}t^6e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ donc $f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - x^2\int_{\mathbb{R}}t^2e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + x^4\int_{\mathbb{R}}t^4e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + O(x^6)$

Exercice 9 *[sujet]* $\left|\dfrac{e^{-t}}{1+(xt)^2}\right| \leqslant e^{-t}$ permet de justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$; de plus f est paire et décroissante sur $\mathbb{R}^+$; on pose $u = xt$ (avec $x > 0$) : $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u/x}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ puis, si (x_n) tend vers $+\infty$, on a $x_nf(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$ par TCD avec $\left|\dfrac{e^{-u/x_n}}{1+u^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+u^2}$

Exercice 10 *[sujet]* **1.** $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]-x,x[$ et $\dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}} \underset{t\to x}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2x(1+x^2)}(x-t)^{1/2}}$ donc est intégrable sur $[0,x[$ et sur $]-x,0]$ par parité.

2. $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1+(ux)^2)(1-u^2)}}$ et si (x_n) tend vers $+\infty$, on a $\left|\dfrac{1}{\sqrt{(1+(ux_n)^2)(1-u^2)}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ donc $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par TCD

3. Sous la seconde forme, f est continue en 0 par $\left|\dfrac{1}{\sqrt{(1+(ux)^2)(1-u^2)}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. Pour le DSE, on part du DSE de $(1+u)^{1/2}$ pour obtenir $\dfrac{1}{\sqrt{(1+(ux)^2)(1-u^2)}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}\frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}x^{2n}$ pour $|x| < 1$ et $u \in]-1,1[$ et on applique le TITT : $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}\frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}x^{2n}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}x^{2n}\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = \pi\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}x^{2n}$ qui est le terme général d'une série CV car $|x| < 1$.

Exercice 11 *[sujet]* **1.** On a $L \subset E$ car, pour $s > 0$ fixé, on a $|f(u)| \leqslant s\dfrac{|f(u)|}{u+s}$. Par contre les ensembles ne sont pas égaux puisque $u \mapsto \dfrac{1}{u} \notin L$ alors que $u \mapsto \dfrac{1}{u} \in E$ car $u \mapsto \dfrac{1}{u(u+s)}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente à $\dfrac{1}{u^2}$ en $+\infty$.

2. $u \mapsto \dfrac{f_\alpha(u)}{s+u}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\dfrac{f_\alpha(u)}{s+u} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^{2-\alpha}}$ donc $f_\alpha \in E$ si et seulement si $\alpha > 0$.

3. $\hat{f}_\alpha(s) \overset{u=st}{=} s^{\alpha-1}\displaystyle\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

4. Pour $s \in [a,b] \subset \mathbb{R}+*$, on a $\left|\dfrac{f(u)}{s+u}\right| \leqslant \dfrac{|f(u)|}{u+a} = \varphi(u)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $a > 0$ et $f \in E$, ce qui donne la continuité de $\hat{f}$.

Pour la limite en $+\infty$, on applique le TCD : si (s_n) tend vers $+\infty$ alors $\dfrac{f(u)}{s_n+u} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\left|\dfrac{f(u)}{s_n+u}\right| \leqslant \dfrac{|f(u)|}{1+u} = \varphi(u)$ car $x_n \geqslant 1$ à partir d'un certain rang. Comme φ est intégrable si $f \in E$, on en déduit (par caractérisation séquentielle de la limite) que $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\hat{f}(s) = 0$.

Exercice 12 *[sujet]* **1.** Si $|x| < 1$, $t \mapsto f(x,t) = \dfrac{\ln(1+xt)}{t}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0,1]$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(x,t) = x$ est finie.

2. Si $x \in [-a,a] \subset]-1,1[$ alors $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{1}{|1+xt|} \leqslant \dfrac{1}{1-at}$ donne $g'(x) = \displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+xt} = \frac{\ln(1+x)}{x}$. Pour la deuxième méthode, avec $u = xt$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x\frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$ donc g est la primitive nulle en 0 de $h : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ (car h est prolongeable par continuité en 0).

Exercice 13 *[sujet]* $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$; si $x>0$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. On applique le th de dérivation avec $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{2x|\ln t|}{(x^2+t^2)^2} \leqslant \dfrac{2b|\ln t|}{(a^2+t^2)^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

Exercice 14 *[sujet]* Si $f_1(x,t) = \dfrac{e^{-t}-e^{-tx}}{t}$ alors $t\mapsto f_1(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $x>0$ (prolongeable par continuité en 0 et $o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$) et si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$, on a $\left|\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}\leqslant e^{-at}$ donne $g_1'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}$ donc $g_1(x)=\ln(x)+C$ et $C=0$ car $g_1(1)=0$.

Exercice 15 *[sujet]*

1. $D=\mathbb{R}$ car $g(x,t)\xrightarrow[t\to0]{} 1$ et $g(x,t)\underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ puis $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |(e^{-2t}-e^{-t})\sin(xt)| \leqslant e^{-t}+e^{-2t}$

2. $f'(x) = \operatorname{Im}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t+ixt}-e^{-t+ixt}\,\mathrm{d}t\right) = \dfrac{x}{4+x^2}-\dfrac{x}{1+x^2}$ donc $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4+x^2}{1+x^2}+C$.

Si $\varphi(t) = \dfrac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}$ alors φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ (car DSE par ex) puis, par IPP, $|f(x)| = \dfrac{1}{x}\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$ (vérifier que φ' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$) donc $\lim\limits_{+\infty} f=0$ et $C=0$.

Exercice 16 *[sujet]*

1. $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt}\operatorname{sh} t}{t}\xrightarrow[t\to0]{} 1$ et $f(x,t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{e^{-(x-1)t}}{2t}$ donc $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $x-1>0$. Comme $f\geqslant 0$, on a $D_f =]1,+\infty[$

2. si $x\in[a,b]\subset]1,+\infty[$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}\operatorname{sh}(t)\leqslant e^{-at}\operatorname{sh}(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2}e^{-(a-1)t}$ donne $g'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\operatorname{sh}(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

3. $|f(n,t)|\leqslant\dfrac{e^{-2t}\operatorname{sh}(t)}{t}$ si $n\geqslant 2$ et le TCD donne $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n)=0$.

4. $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+C$ et $C=0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n)=0$

Exercice 17 *[sujet]*

1. $f(x,t)\xrightarrow[t\to0]{} x$ et $f(x,t)\underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

2. $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant e^{-t}$

3. $\varphi'(x) = \operatorname{Re}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t}\,\mathrm{d}t\right) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\varphi(0)=0$ donc $\varphi(x)=\arctan(x)$

Exercice 18 *[sujet]* Si $f(x,t) = \dfrac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$ alors $t\mapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 et $|f(x,t)|\leqslant\dfrac{1}{t^2}$ si $x\geqslant 0$ donc F est définie sur $\mathbb{R}^+$ (et pas sur $\mathbb{R}^{-*}$ car $f(x,t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}-\infty$ si $x<0$). La classe $\mathcal{C}^1$ de F sur $\mathbb{R}^{+*}$ provient de $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt^2}\leqslant e^{-at^2}$ si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$; on a $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ (en posant $u=t\sqrt{x}$). On en déduit $F(x)=\sqrt{\pi x}+C$, si $x>0$, et on trouve $C=0$ car $F(0)=0$ et F est continue en 0 par $|f(x,t)|\leqslant f(b,t)$ si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^+$.

Exercice 19 *[sujet]*

1. Si $f(x,t) = t^x\dfrac{t-1}{\ln t}$ alors $\lim\limits_{t\to1} f(x,t)=1$ et $f(x,t)\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{-1}{t^{-x}\ln(t)}$ (Bertrand) donc $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $-x<1$ (et $f\geqslant 0$)

2. Si $x\in[a,b]\subset]-1,+\infty[$ alors $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = t^x-t^{x+1}\leqslant t^a$. On a $g'(x) = \dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$ puis $g(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)+C$ et $C=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$: $t\mapsto\dfrac{t-1}{\ln(t)}$ est bornée sur $]0,1[$ (car prolongeable par continuité au segment $[0,1]$) donc $|g(x)[\leqslant M\displaystyle\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x+1}$.

Exercice 20 *[sujet]* $\lim\limits_{t\to0} g(x,t)=ix$ et $g(x,t)\underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t}\right)$ donc T est définie sur $\mathbb{R}$.

$T'(x) = i\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{i}{1-ix}$ car $\left|e^{-(1-ix)t}\right| = e^{-t}$. Comme $T(0)=0$, on trouve $T(x)=i\arctan(x)-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Exercice 21 *[sujet]* **1.** $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2e^{-t}$ donc $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si $x > -1$

2. $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{\operatorname{ch} t}{(x+\operatorname{ch} t)^2} \leqslant \dfrac{\operatorname{ch} t}{(a+\operatorname{ch} t)^2}$ si $x \in [a,b] \subset]-1,+\infty[$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2e^{-t}$

3. $\lim\limits_{x+\infty} f = 0$ car $|g(x,t)| \leqslant g(0,t)$ si $x \geqslant 0$

Exercice 22 *[sujet]* Si $f(x,t) = t^x \ln(1-t)$, $f(x,t) \underset{t\to1}{\sim} \ln(1-t)$ et $f(x,t) \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{-1}{t^{-(x+1)}}$ donc φ est définie sur $]-2,+\infty[$. φ est $\mathcal{C}^1$ sur ce domaine car $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |\ln(t)f(x,t)| \leqslant t^a|\ln(t)\ln(1-t)| \underset{t\to0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{-a/2}}\right)$ si $[a,b] \subset]-2,+\infty[$ et $-a/2 < 1$.

Exercice 23 *[sujet]* **1.** f_n est définie sur $\mathbb{R}^*$ (et paire) car $t \mapsto \dfrac{1}{(x^2+t^2)^n}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ si $x \neq 0$ et $\underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$ (et $f_n(0)$ n'existe pas) ; $f_1(x) = \dfrac{\pi}{2|x|}$

2. $f_n'(x) = -2nxf_{n+1}(x)$ car si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\left|\dfrac{-2nx}{(x^2+t^2)^{n+1}}\right| \leqslant \dfrac{2nb}{(a^2+t^2)^{n+1}}$

3. On trouve (récurrence) $f_n(x) = \dfrac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2} \times \dfrac{\pi}{2x^{2n-1}}$

Exercice 24 *[sujet]* **1.** $\underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

2. G est la primitive sur $\mathbb{R}$ nulle en 0 de $t \mapsto e^{-t^2}$ (continue sur $\mathbb{R}$). Pour F : si $f(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ alors $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ donc F est continue sur $\mathbb{R}$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1$ donne F $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = -2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 e^{-u^2}\,du$ $(u = xt)$ pour $x > 0$. On en déduit $F + G^2 = C$.

3. $0 \leqslant F(x) \leqslant e^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$, $C = I^2 = F(0) + G(0)^2 = \dfrac{\pi}{4}$ et comme $I \geqslant 0$, on a $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 25 *[sujet]* **1.** Si $h(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ alors $|h(,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ donne f continue sur $\mathbb{R}$ (et paire) et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2be^{-a^2(1+t^2)}$ si $[x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donne f $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. $f'(x) = -2xe^{-x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(xt)^2}\,dt = -2Ie^{-x^2}$ si $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$ ce qui donne $f(x) = -2Ig(x) + C$ pour $x > 0$ puis $x \geqslant 0$ par continuité en 0.

3. $|f(x)| \leqslant e^{-x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ donne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $C = 2I^2$ puis $f(0) = \dfrac{\pi}{2} = C$ donne $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 26 *[sujet]* **1.** $\lim\limits_{t\to0} f(x,t) = x$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; impaire facile

2. g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$

3. décomposition en éléments simples facile puis, si $x^2 \neq 1$, $g'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}\Big[\arctan(t) - x\arctan(xt)\Big]_{t=0}^{t=+\infty} \overset{x\geqq0}{=} \dfrac{1}{1-x^2}\dfrac{\pi}{2}(1-x) = \dfrac{\pi}{2}(1+x)$ qui est aussi valable en $x = 1$ par continuité de g'

4. facile avec $g(0) = 0$ pour la constante d'intégration

5. $I = 2g(1)$ par IPP

Exercice 27 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \dfrac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$ alors $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{\pi/2}{1+t^2}$ donne f continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} \leqslant \dfrac{t}{(1+t^2)(a^2+t^2)}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donne g $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

2. Si $x \in]0,1[$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{x^2+t^2}\right)dt = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ qui est prolongeable par continuité en 0 ; comme $f(0) = 0$, f est bien la primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ qui s'annule en 0. Comme f est continue en 1, c'est $f(1) \overset{\text{IPP}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(t)}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 28 *[sujet]* **1.** $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et positive (pour la DV), $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^x}$ donc $D =]1, +\infty[$

2. Avec $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant 1 \\ f(a,t) & \text{si } t > 1 \end{cases}$ pour $x \in [a,b] \subset D$.

3. F est $\mathcal{C}^1$ sur D avec $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t^x|\ln(t)|}{(1+t^x)^2} \leqslant \dfrac{|\ln(t)|}{f}(x,t) \leqslant |\ln(t)|f(a,t) = \psi(t)$ qui reste intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $\phi(t) \underset{t\to 0}{\sim} |\ln(t)|$ et $\psi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{1+a}{2}}}\right)$. Puis poser $u = \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale sur $]0,1]$. F est donc décroissante.

4. $\lim\limits_{+\infty} F = 0$ par TCD (et caract séq) avec la domination utilisée pour la continuité. Enfin, $\lim\limits_{1} F = +\infty$ car $F(x) \geqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x} \geqslant \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{2(x-1)}$

Exercice 29 *[sujet]* **1.** Si $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}$ alors $\lim\limits_{t\to 0} f(x,t) = y - x$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt} \leqslant e^{-at}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donne $F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{x}$.

2. $F(x) = -\ln(x) + C$ et $F(y) = 0$ donc $F(x) = \ln(y) - \ln(x)$.

Exercice 30 *[sujet]* **1.** fait en cours

2. $g(x,t) = \dfrac{\sin(t)}{t} - \dfrac{\sin(t)}{t}e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} \dfrac{\sin(t)}{t} + O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ pour $x > 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ (et $f(0) = 0$)
$f(x) = I - \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-xt}}{t}\sin(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{e^{-(n\pi+u)}}{n\pi+u}\sin(u)\,\mathrm{d}u$ et par CSSA (à vérifier) $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{n\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc CVU sur $\mathbb{R}^+$. Reste à vérifier u_n continue : avec $\left|\dfrac{e^{-(n\pi+u)}}{n\pi+u}\sin(u)\right| \leqslant \dfrac{1}{n\pi}$ qui est intégrable sur $[n\pi, (n+1)\pi]$

3. $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-at}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc f est $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{1}{1+x^2}$ donc $f(x) = \arctan(x) + C$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $\mathbb{R}^+$ par continuité et $f(0) = 0 = C$. Enfin, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f = I$ par double limite (avec la série de fct) avec CVU et $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$ par TCDPC (par ex). On retrouve $I = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 31 *[sujet]* **1.** Si $f(x,t) = \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\cos(xt)$ alors $\lim\limits_{t\to 0} f(x,t) = b - a$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ puis $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-at} + e^{-bt}$ donne F $\mathcal{C}^1$.

2. $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at})\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{a^2+x^2} - \frac{x}{b^2+x^2}$ donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2+a^2}{x^2+b^2}\right) + C$

3. Par IPP (si $x > 0$) ; $h'(t) = \dfrac{be^{-bt} - ae^{-at}}{t} - \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t^2}$ donc $\lim\limits_{t\to 0} h'(t) = \dfrac{1}{2}(a^2 - b^2)$ et $h'(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc h' est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$; on en déduit $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} |h'(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $C = 0$.

Exercice 32 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \dfrac{e^{-\arctan(xt)}}{2+t^2}$ alors $|g(x,t)| \leqslant 1$ (ce qui donne en fait la continuité de f)

2. $0 \leqslant g(x,t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ donne $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+(t/\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

3. $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{1+(xt)^2}g(x,t) \leqslant t$ donne f et $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+(xt)^2}g(x,t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.

4. On applique le théorème de bijection à $h(x) = f(x) - x$: h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, $h(0) = f(0) > 0$ et $\lim\limits_{+\infty} h = -\infty$ (car f est majorée)

Exercice 33 *[sujet]* **1.** $|g(x,t)| \leqslant 1$ puis $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{\pi t}{(x+t)^2}\left|\sin\left(\dfrac{\pi t}{x+t}\right)\right| \leqslant \dfrac{\pi t}{(a+t)^2}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

2. $f(0) = -1$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 1$ pat TCDPC (même domination que pour $\mathcal{C}^0$)

3. Tous calculs faits, on trouve $f'(x) = \displaystyle\int_{\frac{x\pi}{x+1}}^{\pi} \frac{\pi - v}{v}\sin(v)\,\mathrm{d}v$ et $\dfrac{\pi - v}{v}\sin(v) \xrightarrow[v\to 0]{} \pi$ donc $v \mapsto \dfrac{\pi - v}{v}\sin(v)$ est intégrable sur $]0,\pi]$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x) = \int_0^{\pi} \frac{\pi - v}{v}\sin(v)\,\mathrm{d}v$ donc (cons. du TAF), f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 34 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \dfrac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ alors $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} te^{-xt}$ donc ets intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $x > 0$ (et $g \geqslant 0$) ; f décroît car $x \mapsto g(x,t)$ décroît pour tout t.

2. $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = tg(x,t) \leqslant tg(a,t)$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $tg(a,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donne f $\mathcal{C}^1$; on pose $u = xt$: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{u^4 + x^4}}\,\mathrm{d}u$ et $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{u^4+x^4}}\,\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ par $\left|\dfrac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{u^4+x^4}}\right| \leqslant ue^{-u}$ ce qui donne $\displaystyle\lim_{x\to+} x^2 f(x) = \int_0^{+\infty} ue^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

3. Par équivalent, f n'est pas intégrable sur $]0,1]$ mais l'est sur $[1,+\infty[$ car $|f(x)| = \dfrac{1}{x^4}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{1+(u/x)^4}}\,\mathrm{d}u \leqslant \dfrac{1}{x^4}\displaystyle\int_0^{+\infty} u^3 e^{-u}\,\mathrm{d}u = O\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.

Exercice 35 *[sujet]* **1.** Si $f(x,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ alors $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(x,t) = \frac{1}{2}$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x \geqslant 0$.

2. On vérifie $0 \leqslant \dfrac{1-\cos t}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}$ si $x > 0$.

3. $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$ donc $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $x > 0$ (mêmes justifications) ; puis $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = |1-\cos(t)|e^{-xt} \leqslant 2e^{-at}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$. On en déduit $F''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\cos(t))e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ donc $F'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ et $F(x) = x\ln(x) - \dfrac{x}{2}\ln(1+x^2) - \arctan(x) + Cx + D = -\dfrac{x}{2}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) + Cx + D$; comme $\displaystyle\lim_{+\infty} F = 0$, on trouve $C = 0$ et $D = \dfrac{\pi}{2}$. Par continuité de F en 0, on trouve $F(0) = D = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 36 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \dfrac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t+t^3}}$ alors $g(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x > 0$; puis $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{2x\sqrt{t}e^{-tx^2}}{\sqrt{1+t^2}} \leqslant \dfrac{2b\sqrt{t}e^{-ta^2}}{\sqrt{1+t^2}}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$.

2. On pose $u = tx^2$: $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u + u^3/x^4}}\,\mathrm{d}u$ puis, si (x_n) tend vers $+\infty$, $x_n f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = C > 0$ par TCD avec $\left|\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u + u^3/(x_n)^4}}\right| \leqslant \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$. On en déduit $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{x}$.

Exercice 37 *[sujet]* **1.** On pose $h(x,t) = \dfrac{e^{itx}}{(1+t^2)^2}$ et on a $|h(x,t)| = \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ et $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ puis $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| = \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$ qui sont toutes intégrables donc f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. Par IPP $f'(x) = i\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} \times e^{ixt}\,\mathrm{d}t = -\frac{ix}{2}g(x)$

Exercice 38 *[sujet]* Si $g(x,t) = \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$ alors $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(x,t) = \frac{x^2}{2}$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} O(\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; puis $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{|\sin(xt)|}{t}e^{-t} \leqslant e^{-t}$ et enfin $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}$ donc $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}$. On remonte : $f'(x) = \arctan(x) + C$, avec $C = 0$ car $f'(0) = 0$, puis $f(x) = x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + D$ avec $D = 0$ car $f(0) = 0$

Exercice 39 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \dfrac{1-e^{-xt}}{1+t^2}$ alors $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ (donc g est continue sur $\mathbb{R}^+$), puis $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{1+t^2}e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x > 0$ et $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t^2}{1+t^2}e^{-at} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$.

2. Soit (x_n) tendant vers $+\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} x_n f(x_n) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ par TCD avec $|g(x_n,t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$.

$g''(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t - g(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ donc $g''(x) + \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\pi}{2}$ par continuité de g en 0. Ensuite $g'(x) = g'(1) + \int_1^x \left(g''(t) + \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t - \ln(x)$ donc $g'(x) + \ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} g'(1) - \int_0^1 \left(g''(t) + \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$ (finie), $g'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$ est donc intégrable sur $]0,1]$ et enfin $g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (g'(t) + \ln(t))\,\mathrm{d}t - \int_0^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$; $t \mapsto g'(t) + \ln(t)$ converge en 0 donc est bornée au voisinage de 0, ce qui donne $\int_0^x (g'(t) + \ln(t))\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{=} O(x)$ alors que $\int_0^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = x\ln(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x)$. On a donc $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x)$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$.

Exercice 40 *[sujet]* Si $g(x,t) = \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}$, $|g(x,t)| \leqslant \frac{\pi}{2(1+t^2)}$ donne la continuité sur $\mathbb{R}$ et $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leqslant \frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Puis, pour $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2x^2}\right) \mathrm{d}t = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$ (qui se prolonge par continuité en 1 pour donne $f'(1) = \frac{1}{2}$). $f(0) = 0$ donc f' étant intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ (limite finie).

Exercice 41 *[sujet]* **1.** $g(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-\ln(t)}{t^{-x}} = o\left(\frac{1}{t^{\frac{1-x}{2}}}\right)$ et $\lim_{t\to 1} g(x,t) = 1$

2. Si $x \in [a,b] \subset D$, $\left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \frac{|\ln(t)|^{k+1} t^a}{1-t} = \varphi(t)$; $\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{1-a}{2}}}\right)$ et $\lim_{t\to 0} \varphi(t) = 0$ si $k \geqslant 1$.

3. $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k+1)^2}$ par TITT avec $\frac{t^x \ln(t)}{t-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} -\ln(t) t^{x+k}$ pour $t \in]0,1[$ et $\int_0^1 |\ln(t)| t^{x+k}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{(x+k+1)^2}$.

Exercice 42 *[sujet]* $I(x) = \int_0^{+infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+xu^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$ puis $I'(x) = -J(x)$ car $\left|\frac{\sin^2 t}{(\cos^2 t + x\sin^2 t)^2}\right| \leqslant \frac{\sin^2 t}{(\cos^2 t + a\sin^2 t)^2}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc $J(x) = \frac{\pi}{4x\sqrt{x}}$

Exercice 43 *[sujet]* **1.** $F'(x) = \int_0^{\pi} \sin(t)\cos(a\sin t)\,\mathrm{d}t$ car $|\sin(t)\cos(a\cos t)| \leqslant 1$ et 1 est intégrable sur $[0,\pi]$

2. $F(0) = 0$ et F dérivable en 0 donc $\lim_{a\to 0} \frac{1}{a} F(a) = F'(0) = \int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 2$.

Exercice 44 *[sujet]*
$|g(x,t)| \leqslant e^{-t}$
Avec $\left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| = t^{2k} \left|\cos\left(xt^2 + k\frac{\pi}{2}\right)\right| e^{-t} \leqslant t^{2k} e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$
On a $F^{(2k+1)}(0) = 0$ et $F^{(2k)}(0) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^{4k} e^{-t}\,\mathrm{d}t = (-1)^k (4k)!$. La série de Taylor de F est donc $\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \frac{(4k)!}{(2k)!} x^{2k}$ dont le RCV est nul donc F n'est pas DSE.

Exercice 45 *[sujet]* On montre que G est dérivable en 0 : si $g(x,t) = \exp[x\ln(f(t))]$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ et $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \ln(f(t)) g(x,t) \leqslant C$ si $x \in [-a,a] \subset \mathbb{R}$ car $(x,t) \mapsto \ln(f(t)) g(x,t)$ est continue sur $[-a,a] \times [0,1]$ qui est fermé borné (et non vide) ; G est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\frac{1}{x}\left(\ln(G(x)) - \ln(G(0))\right) \xrightarrow[x\to 0]{} (\ln \circ G)'(0) = \frac{G'(0)}{G(0)} = \int_0^1 \ln(f(t))\,\mathrm{d}t$.
Comme $G(0) = 1$, on a $F(x) = \exp\left[\frac{1}{x}\ln(G(x))\right] \xrightarrow[x\to 0]{} \exp \int_0^1 \ln(f(t))\,\mathrm{d}t$.

Exercice 46 *[sujet]* **1.** Cours

2. On a $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\,\mathrm{sh}(at) e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si $x \in [-a,a]$

3. Par IPP, on trouve $f'(x) = \frac{x}{2}f(x)$ donc $f(x) = f(0)e^{\frac{x^2}{4}}$

Exercice 47 *[sujet]* **1.** $|g(x,t)| \leqslant e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

2. $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant te^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $f'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(xt)\times te^{-t^2}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} -\frac{x}{2}f(x)$

3. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-x^2/4}$

Exercice 48 *[sujet]* **1.** $|\cos(2xt)e^{-x^2}| \leqslant e^{-x^2}$ (intégrable sur $\mathbb{R}^+$)

2. Si $t \in [-a,a] \subset \mathbb{R}$, $|-2x\sin(2xt)e^{-x^2}| \leqslant 2ae^{-x^2}$ donc $f'(t) = -2\int_0^{+\infty} \sin(2xt)\times xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} -2tf(t)$

3. $f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-t^2}$

4. $f^{(n)}(t) = \int_0^{+\infty} 2^n t^n \cos\left(2xt + n\frac{\pi}{2}\right)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ car $\left|2^n t^n \cos\left(2xt+n\frac{\pi}{2}\right)e^{-x^2}\right| \leqslant 2^n a^n e^{-x^2}$ si $t\in[-a,a]$

Exercice 49 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t}$ alors, pour $x>0$ $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t}{1+t^2}e^{-xt} \leqslant \frac{t}{1+t^2}e^{-at} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$. On vérifie ensuite $f(x) - f'(x) = \frac{1}{x}$

2. On pose $u = xt$ et on a $xf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+u/x}\,\mathrm{d}u$ qui tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$ par TCD : si (x_n) tend vers $+\infty$, $\left|\frac{e^{-u}}{1+u/x_n}\right| \leqslant e^{-u}$.

Exercice 50 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)$ alors $|g(x,t)| \leqslant e^{-t^2}$ donne la continuité

2. f est paire donc si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$, on a $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2b}{t^2}\exp\left(-t^2-\frac{a^2}{t^2}\right) = \varphi(t)$, $\lim\limits_0 \varphi = 0$ et $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

3. si $x>0$, $f'(x) = -2x\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}\exp\left(-t^2-\frac{x^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t \overset{t=\frac{x}{u}}{=} -2f(x)$ donc $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|x|}$ par parité.

Exercice 51 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \frac{e^{-xt}}{x+t}$ alors $t\mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ pour $x>0$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$; si (x_n) tend vers $+\infty$, $|g(x_n,t)| \leqslant e^{-t}$ dès que $x_n \geqslant 1$ donc par TCD, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

2. $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t}{t+x}e^{-xt} + \frac{e^{-xt}}{(x+t)^2} \leqslant \frac{t}{a+t}e^{-at} + \frac{e^{-at}}{(a+t)^2}$ si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$; l'équation différentielle s'obtient en effectuant une IPP sur le terme $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ de $F'(x)$.

Comme $F'(x) = 2xF(x) - \frac{2}{x}$, F est $\mathcal{C}^n$ pour tout n par récurrence.

3. Les solutions de cette équation sont $y(x) = \alpha e^{x^2} + 2e^{x^2}\int_1^x \frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ (variation de la constante) ; la seule solution de cette forme tendant vers 0 est obtenue pour $\alpha = -2\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ (toutes les autres DV en $+\infty$ et on sait déjà que cette équation admet au moins une solution qui tend vers 0 en $+\infty$ puisque F est une telle solution).

$F(x) \underset{x\to0}{\sim} 2\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to0\to+]{} \infty$ (intégrale DV d'une fonction positive) donc $F(x) \underset{x\to0}{\sim} 2\int_x^1 \frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ (l'autre partie est une constante donc négligeable devant ce terme qui tend vers $+\infty$). Enfin, $\int_0^x \frac{e^{-t^2}-1}{t}\,\mathrm{d}t$ est CV donc $F(x) \underset{x\to0}{\sim} 2\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{t} = -2\ln(x)$.

Exercice 52 *[sujet]* **1.** $|f(x,t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ donne tout avec $|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} = F(0)$

2. idem avec $|g(x,t)| \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^2}$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$

3. poser $u = xt$

4. si $H(x) = \dfrac{F(x)}{x} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ alors $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{2x|\cos t|}{(x^2+t^2)^2} \leqslant \dfrac{2b}{(a^2+t^2)^2}$, si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Donc $H'(x) = -2x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = -2\frac{G(x)}{x^2}$ en posant $u = xt$

5. $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc $G'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} \times \sin(xt)\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} -\frac{x}{2}F(x)$

6. F' est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $xF'(x) = F(x) - 2G(x)$ donne $xF''(x) = xF(x)$. On en déduit $F(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$ (car continue en 0), F bornée donne $\alpha = 0$ et $F(0) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $F(x) = \dfrac{\pi}{2}e^{-x}$

Exercice 53 *[sujet]* **1.** Si $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ alors $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$, puis $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x > 0$ et $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \dfrac{t^2}{1+t^2}e^{-xt} \leqslant e^{-at}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$.

2. On vérifie $g(x) + g''(x) = \dfrac{1}{x}$. On pose $h(x) = \cos(x)\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ (les deux intégrales CV si $x > 0$ par IPP) et on vérifie que h est aussi solution de cette équation car $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ de dérivée $-\dfrac{\sin(x)}{x}$.

$f - h$ est donc solution de l'équation homogène $y'' + y = 0$ dont les solutions $\alpha\cos + \beta\sin$ sont 2π-périodiques. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$; puis $0 \leqslant g(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$ donc $g - h$ tend vers 0 en $+\infty$ et est 2π-périodique, donc est nulle.

Exercice 54 *[sujet]* **1.** $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$, puis $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x > 0$ et $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \dfrac{t^2}{1+t^2}e^{-xt} \leqslant e^{-at}$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$.

2. facile avec f''

3. Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont $y(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + f(x)$. On vérifie que $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$ car $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$ (ou TCDPC) donc si y tend vers 0 alors $y(x) - f(x)$ aussi mais $y - f$ est périodique donc si elle tend vers 0, on a $(y-f)(x) = (y-f)(x + 2n\pi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $y = f$.

Exercice 55 *[sujet]* On pose $g(x,t) = \cos(x\cos t)$; $t \mapsto g(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ sont continues sur $[0,\pi]$ et $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant 1$ donne f $\mathcal{C}^2$; on trouve $xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$ par IPP sur $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t)\sin(x\cos(t))\,\mathrm{d}t$

Exercice 56 *[sujet]* **1.** On pose $g(x,t) = \ln(t)e^{-xt}$ et on a $g(x,t) \underset{t\to0}{\sim} \ln(t)$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x > 0$; puis $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |t\ln(t)|e^{-at} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

2. Par IPP sur $f'(x)$, on trouve $f(x) + xf'(x) = -\dfrac{1}{x}$; il suffit ensuite de vérifier que $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est solution de l'équation homogène et $x \mapsto \dfrac{-\ln(x)}{x}$ est une solution de l'équation complète.

Exercice 57 *[sujet]* **1.** Si $g(x,t) = \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)}$ alors $\displaystyle\lim_{t\to0} g(x,t) = \frac{x^2}{2}$ et $g(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^4}\right)$ donc $D = \mathbb{R}$

2. On prouve directement $\mathcal{C}^2$: $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (prolongeable en 0 et $O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$ quand t tend vers $+\infty$) puis $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| = \dfrac{|\cos(xt)|}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$

3. $f(x) - f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left[(1-\cos(xt))\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) - \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\right]\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1-\cos(x,t)}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ et, en posant $u = xt$ $(x > 0)$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$.

On a $f''(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ et $|f''(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ (borné sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\alpha = 0$; $f'(0) = 0$ donne (par continuité de f' en 0) $\beta = -a$ et $f(0) = 0$ (par continuité de f en 0 cette fois), $\beta = -b = \dfrac{\pi}{2}$. On en déduit $f(x) = \dfrac{\pi}{2}(x + e^{-x} - 1)$ pour $x > 0$ (et f est paire)

On peut aussi en déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \overset{\text{IPP}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 58 *[sujet]* **1.** Si $f(t,x) = \dfrac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$ alors $|f(t,x)| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$ donne F continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leqslant e^{-ax^2}$ si $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

2. $F'(t) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} e^{-tx^2}\,\mathrm{d}x = F(t) - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$ (en posant $u = x\sqrt{t}$). Les solutions de cette équation sont $y(t) = \alpha e^t - \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^t \displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ (l'intégrale CV car $\underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{u}}$) ; $f(0) = \pi 2$ donc $F(t) = \dfrac{\pi}{2}e^t - \sqrt{\pi}e^t\theta(t)$ (en posant $u = v^2$)

Exercice 59 *[sujet]* **1.** $g(x,t) = \dfrac{e^{-t}e^{itx}}{\sqrt{t}}$ puis $|g(x,t)| = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $|g(x,t)| \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-t})$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$. $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \sqrt{t}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donne la classe $\mathcal{C}^1$.

2. $f(x) = \displaystyle\int_0^{\varepsilon} g(x,t)\,\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t$; $\left|\displaystyle\int_0^{\varepsilon} g(x,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{\varepsilon}$ et $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \frac{e^{-\varepsilon+ix\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}(-1+ix)} + \frac{1}{2(-1+ix)}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}e^{ixt}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ donc $\left|\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon(1+x^2)}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe x_0 tel que pour $x \geqslant x_0$ on ait $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon(1+x^2)}} \leqslant \varepsilon$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$. On a donc pour $\varepsilon > 0$ et $x \geqslant x_0$, $|f(x)| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon} + 2\varepsilon$.

3. $f'(x) \overset{\text{IPP}}{=} \dfrac{-i}{2(-1+ix)} f(x)$ donc $f(x) = f(0)(1+x^2)^{-1/4}e^{\frac{i}{2}\arctan x}$ (ce qui redonne bien plus facilement la limite nulle en $+\infty$!)

Exercice 60 *[sujet]* **1.** $|g(x,t)| \leqslant e^{-kt}$ et $k > 0$

2. $F_k'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(k-1)t}\cos\left(xe^t\right)\,\mathrm{d}t$ car $\left|e^{-(k-1)t}\cos\left(xe^t\right)\right| \leqslant e^{-(k-1)t}$ et $k-1 > 0$. Par IPP, $xF_k'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kt} \times xe^t\cos\left(xe^t\right)\,\mathrm{d}t = \left[e^{-kt}\sin\left(xe^t\right)\right]_{t=0}^{t=+\infty} + \int_0^{+\infty} ke^{-kt}\sin\left(xe^t\right)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 61 *[sujet]* **1.** f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car, si $[-a,a] \subset \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^a$; $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(t)e^{-x\tan(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$. $e^u \geqslant 1+u$ donc $f(x) \geqslant \dfrac{\pi}{4} - x\displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$ par TCD car $\left|e^{-x_n\tan(t)}\right| \leqslant 1$

2. On a $u_1 = f(u_0) \in \mathbb{R}^+$ et comme sur $\mathbb{R}^+$, on a $|f'(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan(t)\,\mathrm{d}t = k < 1$, f est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$ donc $|u_{n+1}-u_n| \leqslant k|u_n - u_{n-1}| \leqslant k^{n-1}|u_2 - u_1|$; comme $k \in [0,1[$, $\sum k^n$ CV donc $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est ACV et (u_n) CV.

3. $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ donc f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^-$.

En posant $u = x\tan(t)$, on trouve $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-u}}{1+(u/x)^2}\,\mathrm{d}u$ puis $0 \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+(u/x)^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = e^{-x}$ donc $xf(x) \underset{+\infty}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+(u/x)^2}\,\mathrm{d}u + o(1)$ et, par TCD, $\lim\limits_{+\infty} xf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$ car $\left|\dfrac{e^{-u}}{1+(u/x_n)^2}\right| \leqslant e^{-u}$. On a donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ donc f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.