TD14 : Intégrales à paramètres

Exercice 1 **(CCINP PSI 2023)**
Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $g'(x)$.
3. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
4. En déduire la valeur de $g(x)$

Exercice 2 **(CCINP PSI 2021)**
Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$

1. Trouver le domaine de définition D de F.
2. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur D et, à l'aide d'un changement de variable, justifier que $F'(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)t^x}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)\mathrm{d}t$. En déduire les variations de F.
3. Déterminer les limites de F en $+\infty$ et en 1. *(*)*

Exercice 3 **(CCP PSI 2013)**

1. Justifier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F + G^2$ est constante.
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 4 **(Mines-Ponts PSI 2023)**
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable et vérifie une équation différentielle du premier ordre sur $\mathbb{R}$. *(*)*
3. Résoudre cette équation et en déduire une expression simple de f ; on donne $f(0) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Exercice 5 **(Centrale PSI 2019)**

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. En déduire la valeur de f ; on donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. *(*)*

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2023)**
Soit $I = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que I existe
2. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt}}{t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ *(*)*
3. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire la valeur de I.

Indications

Exercice 2
3. *la limite de F en 1 est $+\infty$; commencer par minorer F par l'intégrale sur $[1, +\infty[$*
Exercice 4
2. *IPP*
Exercice 5
3. *trouver une équation différentielle vérifiée par f (poser $u = x/t$)*
Exercice 6
2. *pour $\mathcal{C}^0$, écrire $f(x) = I - \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-xt}}{t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$ et vérifier la CVU de la série de fct*