Correction du DM9

(extrait de E3A MP 2002 maths 3)

Partie I

1. a) On a $\mathcal{X}_A = (X-1)(X-2)^2$ puis $E_1(A) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1)\}$ et $E_2(A) = \mathrm{Vect}\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$

b) $\mathcal{X}_A$ est scindé, $m_1(A) = 1$ et $m_2(A) = 2 = \dim(E_2(A))$ donc A est DZ et si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\boxed{A = PDP^{-1}}$ avec D la matrice qui suit dans le texte.

2. a) Si $N = (n_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on vérifie que $ND = DN$ si et seulement si $n_{1,2} = n_{1,3} = n_{2,1} = n_{3,1} = 0$ ce qui donne le résultat demandé.

b) $\mathcal{C}(D) = \mathrm{Vect}\{E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3}\}$ et cette famille de matrices est libre donc $\boxed{\dim(\mathcal{C}(D)) = 5}$

c) $\boxed{\dim(\mathcal{C}(A)) = \dim(\mathcal{C}(D)) = 5}$ car A est semblable à D, en utilisant le résultat admis en introduction.

Partie II

1. a) Si $y = f(x)$ alors $f(y) = f^2(x) = 0$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)}$

b) G est un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E donc $\dim(G) = n - \dim(\ker(f))$ et avec le théorème du rang $\boxed{\dim(G) = \mathrm{rg}(f)}$

c) Les espaces $\mathrm{Im}(f)$ et F sont dans $\ker(f)$ donc les deux premières colonnes (par blocs) sont nulles ; $f(G) \subset \mathrm{Im}(f)$ donc les deux derniers blocs de la troisième colonne sont nuls aussi.
On a $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, si $r = \mathrm{rg}(f)$, d'après la question précédente ; de plus $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$ donc $\mathrm{rg}(A) = r$ et $\boxed{A \text{ est inversible}}$
On peut aussi remarquer que A est la matrice de l'application linéaire induite de G, un supplémentaire de $\ker(f)$, sur $\mathrm{Im}(f)$, qui est un isomorphisme, d'après le théorème du rang.

2. a) Un calcul par blocs montre que $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si $M_4A = M_7A = AM_7 = AM_8 = 0$ et $M_1A = AM_9$; comme A est inversible, ces conditions sont équivalentes à $\boxed{M_4 = M_7 = M_8 = 0 \text{ et } M_9 = A^{-1}M_1A}$

b) Une telle matrice s'écrit donc $\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ 0 & M_5 & M_6 \\ 0 & 0 & A^{-1}M_1A \end{pmatrix}$; On vient de prouver φ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_s(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}(\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f))$, si on note $s = \dim(F) = n - 2r$. Comme $\dim\left(\mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_s(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R})\right) = r^2 + rs + r^2 + s^2 + sr = 2r^2 + 2r(n-2r) + (n-2r)^2$ puis $\dim(\mathcal{C}(f)) = 2r^2 + n^2 - 2rn$. Ainsi $\boxed{\dim(\mathcal{C}(f)) = (n-r)^2 + r^2}$

Partie III

1. a) $(X-1)(X-2)^2$ annule u donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \{1,2\}$; comme u est supposé DZ, $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$ et si par exemple, on avait $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$, la matrice de f dans une base de vecteurs propres (qui existe car u est DZ) serait I_n donc on aurait $u = id$ (de même, si $\mathrm{Sp}(u) = \{2\}$ et u est DZ alors $u = 2id$). On en déduit $\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \{1,2\}}$

b) Si $E_1(u)$ et $E_2(u)$ sont stables par v, pour $x \in E_i(u)$ $(i \in \{1,2\})$, on a $u(x) = ix$ donc $v \circ u(x) = iv(x)$ et $v(x) \in E_i(u)$ par stabilité donc $u \circ v(x) = iv(x)$ aussi. Les endomorphismes $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur $E_1(u)$ et $E_2(u)$, de plus $E = E_1(u) \oplus E_2(u)$ donc $\boxed{u \circ v = v \circ u}$ La réciproque est une propriété du cours.

c) $E_1(u)$ et $E_2(u)$ sont stables par v si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(v)$ est diagonale par blocs (c'est du cours !)

d) On a donc $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(v) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$, l'ensemble des matrices de cette forme est de dimension $n_1^2 + n_2^2$ (même justification qu'en **II.2.b**) donc $\boxed{\dim(\mathcal{C}(u)) = n_1^2 + n_2^2}$

2. a) La même preuve qu'en **II.1.a** prouve que si $(u - id) \circ (u - 2id)^2 = 0$ alors $\mathrm{Im}(u-2id)^2 \subset \ker(u - id)$ et comme on a aussi $(u-2id)^2 \circ (u - id) = 0$ (les polynômes en u commutent), on obtient de même la deuxième inclusion.

b) Comme $x = (u-2id)^2(x) - (u-id)((u-3id)(x))$ (vérification facile), on a $E \subset \mathrm{Im}(u-2id)^2 + \mathrm{Im}(u-id) \subset E_1 + E_2$, on a donc $E = E_1 + E_2$. Reste à vérifier que la somme est directe : si $x \in E_1 \cap E_2$, on a $u(x) = x$ donc $u^2(x) = x$ et $0 = (u-2id)^2(x) = u^2(x) - 4u(x) + 4x = x$ donc $x = 0$ et $\boxed{E = E_1 \oplus E_2}$

c) Comme p et d sont des polynômes en u, si v commute avec u alors il commute avec p et d ; réciproquement, comme $u = p + d$, si v commute avec p et d, v commute aussi avec u. Ainsi $\boxed{\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(d) \cap \mathcal{C}(p)}$

d) $p^2 = (u-2id)^4 = (u-2id)^2 \circ ((u-id) \circ (u-3id) + id) = (u-id)^2 = p$ en utilisant le polynôme annulateur de u ; p est donc un projecteur parallèlement à $\ker(p) = E_2$ sur $\ker(p - id)$. Comme $p - id = (u-3id) \circ (u-id)$ et $u - 3id$ est inversible (car 3 n'est pas valeur propre de u), on a $\ker(p - id) = \ker(u - id) = E_1$.

On peut aussi vérifier que $E_1 \subset \ker(p - id)$ en vérifiant que si $u(x) = x$ alors $p(x) = x$ aussi et terminer avec un argument de dimension avec $\dim(E_1) = n - \dim(E_2) = n - \dim(\ker(p))$.

La matrice de p dans $\mathcal{B}$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc celle de d est $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 2I_{n_2} \end{pmatrix}}$

e) $w = u - 2id + (u^2 - 4u + 4id) = (u - 2id) \circ (u - id)$ et $w^2 = (u - 2id)^2 \circ (u - id)^2$ par commutativité des polynômes en u et $\boxed{w^2 = 0}$ avec le polynôme annulateur de u. De plus $w \neq 0$ car sinon, $(X - 1)(X - 2)$ serait un polynôme annulateur SARS de u donc u serait DZ.

f) On a $(u - 2id)^2 \circ w = 0$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(w) \subset E_2}$ et si $u(x) = x$ alors $w(x) = (u - 2id)(0) = 0$ donc $\boxed{E_1 \subset \ker(w)}$ Comme $E_1 \subset \ker(w)$ la première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w)$ est nulle et comme $w(E_2) \subset \mathrm{Im}(w) \subset E_2$, le premier bloc de la deuxième colonne est nul.

g) Comme $w^2 = 0$, on a $N^2 = 0$. La matrice N est la matrice de l'endomorphisme $\tilde{w}$ induit par w sur E_2. Si $x \in E_2$, on a $u^2(x) - 4u(x) + 4x = 0$ donc $\tilde{w}(x) = u^2(x) - 3u(x) + 2x = u(x) - 2x$ donc $\tilde{w}(x) = 0$ si et seulement si $(u - 2id)(x) = 0$ puis $\ker(\tilde{w}) = E_2 \cap \ker(u - 2id) = \ker(u - 2id)$ et $\boxed{\mathrm{rg}(N) = \mathrm{rg}(\tilde{w}) = n_2 - \dim(\ker(u - 2id))}$ en appliquant la formule du rang à $\tilde{w}$.

h) Comme on l'a vu dans **III.1** (d est DZ), v commute avec d si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$; une telle matrice commute avec $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ si et seulement si $NV_2 = V_2N$. On obtient l'équivalence demandée avec **III.2.c**.

i) On peut appliquer les résultats de la partie **II** à N car $N^2 = 0$ et $N \neq 0$: en effet, si on avait $N = 0$, on aurait $u = d$ DZ ce qui n'est pas le cas. D'après la partie **II**, si on note $r_2 = n_2 - \dim(\ker(u - 2id))$ le rang de N, le commutant de N est de dimension $r_2^2 + (n_2 - r_2)^2$ donc $\mathcal{C}(u)$ est de dimension $n_1^2 + r_2^2 + (n_2 - r_2)^2$ et $\boxed{\dim(\mathcal{C}(u)) = n_1^2 + (n_2 - \dim(\ker(u - 2id)))^2 + (\dim(\ker(u - 2id)))^2}$ car $V_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{M}_{n_1})(\mathbb{R}) = n_1^2$.

3. Si $\mathrm{Sp}(u) = \{2\}$ alors $u - id$ est bijective donc $(u - 2id)^2 = 0$; on a donc $u = 2id + w$ avec w nilpotent d'indice 2 : on a forcément $w \neq 0$ car sinon on aurait $u = 2id$ ce qui est exclu. Comme id commute avec tout endomorphisme, on en déduit $\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(w)$. D'après la partie **II**, on a donc $\dim(\mathcal{C}(u)) = r^2 + (n - r)^2$ où $r = \mathrm{rg}(u - 2id)$ puis $\boxed{\dim(\mathcal{C}(u)) = \dim(\ker(u - 2id))^2 + (n - \dim(\ker(u - 2id)))^2}$