(extrait de CCINP PSI 2020)

Les matrices de Kac

Notations

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
- Dans tout ce problème, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ seront notés en colonnes.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.
  On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !

Partie I - La dimension 3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(XI_3 - A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2. En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.*

3. Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$. Vérifier que $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.

4. La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.*

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

5. Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B.

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k(x) \sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \ / \ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

1. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.

2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f_k' \in V_n$. En déduire que :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_n : & V_n & \longrightarrow & V_n \\ & f & \longmapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$.

3. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$.

4. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall\, k \in [\![0, n]\!]\,, \quad g_k \in V_n$.

5. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer g_k'. En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

6. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

7. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ et en déduire que :

$$\ker(B_n - inI_{n+1}) = \text{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k}\dbinom{n}{k}$.

Partie III - Les matrices de Kac de taille $n+1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note A_n la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général $a_{k,l}$ de la matrice A_n vérifie donc :
- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$,
- $a_{k,k-1} = n - k + 2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$,
- $a_{k,l} = 0$ pour tous les couples $(k, l) \in [\![1, n+1]\!]^{\,2}$ non couverts par les formules précédentes.

On note enfin $D_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont le k-ième terme diagonal d_{kk} vérifie $d_{kk} = i^{k-1}$.

1. Soient $M = (m_{kl})_{1\leqslant k,l\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice de taille p et $D = (d_{kl})_{1\leqslant k,l\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de taille p. Exprimer le terme général de la matrice DM en fonction des m_{kl} et des d_{kl}, puis exprimer le terme général de la matrice MD en fonction des m_{kl} et des d_{kl}.

2. Montrer que $D_n^{-1} A_n D_n = -iB_n$ où B_n est la matrice déterminée dans la **Partie II**. En déduire une relation simple entre $\chi_{A_n}(X)$ et $\chi_{B_n}(iX)$, où χ_{A_n} et χ_{B_n} sont les polynômes caractéristiques respectifs de A_n et B_n.

3. En déduire, à l'aide de la **Partie II**, que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k - n$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et que :

$$\ker(A_n - nI_{n+1}) = \text{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $p_k = \dbinom{n}{k}$.

Partie IV - Un peu de probabilités

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n. On note N_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans l'urne U_1.

À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. les choix successifs sont supposés indépendants.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k.

Exemple : supposons $n = 4$ et qu'à l'instant 0, l'urne U_1 contient les boules numérotées $1, 3, 4$ et l'urne U_2 la boule 2. On a dans ce cas $N_0 = 3$.

- Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 3 de U_1 et on la place dans U_2. On a alors $N_1 = 2$.
- Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 2 de U_2 et on la place dans U_1. On a alors $N_1 = 4$.

Pour $l \in [\![0, n]\!]$, on note $E_{k,l}$ l'événement $(N_k = l)$ et $p_{k,l} = \mathcal{P}(E_{k,l})$ sa probabilité.

On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix}$ le vecteur qui code la loi de la variable aléatoire N_k.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la famille $(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n})$?

2. Si l'urne U_1 contient j boules à l'instant k, combien peut-elle en contenir à l'instant $k+1$?

3. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j, l \in [\![0, n]\!]$, déterminer :

$$\mathcal{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}).$$

On traitera séparément les cas $j = 0$ et $j = n$.

4. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n}\mathcal{P}(E_{k,1}) \text{ et } \mathcal{P}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n}\mathcal{P}(E_{k,n-1})$$

et que :

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!]\,,\ \mathcal{P}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n}\mathcal{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n}\mathcal{P}(E_{k,j+1}).$$

5. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0$$

où A_n est la matrice introduite dans la **Partie III**.

On suppose jusqu'à la fin du Problème qu'à l'instant 0, on a disposé de façon équiprobable et indépendamment les unes des autres les n boules dans l'une des urnes U_1 ou U_2.

6. Déterminer la loi π de N_0.

7. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k a la même loi que N_0. *On pourra utiliser la question **III.7**.*

8. Démontrer que π est l'unique loi de probabilité ayant la propriété suivante : si N_0 suit la loi π, alors toutes les variables N_k suivent la loi π.