A

1a $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A}'$ $\quad \vec{E}' = -\vec{grad}\,V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

1b VÉRIFIER VOUS-MÊMES : $\vec{E}' = \vec{E}$ $\quad \vec{B}'' = \vec{B}$

↳ SI ON A UNE SOLUTION $(\vec{A}', V)$, ON EN A UN NOMBRE INFINI.

1c

$$\mathrm{div}(\vec{A}') + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = \mathrm{div}\,\vec{A}' + \mathrm{div}(\vec{grad}\, f) + \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)\right) = 0$$

$$= \underbrace{\mathrm{div}\,\vec{A}' + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\Delta f - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}_{=0} = 0$$

↳ f vérifie l'équation d'onde avec la vitesse de propagation $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

2a (MA) $\vec{rot}\,\vec{B} = \cancel{\mu_0 \vec{J}} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\qquad \vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{A}) = \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{grad}\,V\right) - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$

D'où :

$\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{A}) = \vec{grad}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \vec{\Delta A}$

↳ $\vec{grad}(\mathrm{div}\,\vec{A}') - \vec{\Delta A} = -\vec{grad}\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial V}{\partial t}\right) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$

S'ÉLIMINENT.

$$\boxed{\vec{\Delta A'} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}}$$

2b $\mathrm{div}\,\vec{E}' = 0. \Rightarrow \mathrm{div}\left(-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{grad}\,V\right) = 0.$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\vec{A}')}_{-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)} + \underbrace{\mathrm{div}(\vec{grad}\,V)}_{\Delta V} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta V = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}}$$

2c DÉJÀ FAIT EN COURS. J'EN FAIS UNE :

(MF) $\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \underbrace{\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{E})}_{\underbrace{\vec{grad}(\mathrm{div}\,\vec{E}')}_{=0} - \Delta\vec{E}} = \vec{rot}\left(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{rot}\,\vec{B}\right)$

(MA) $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{E}' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

2d

SI ON ADOPTE LA JAUGE DE LORENTZ, LES CHAMPS $V, \vec{A}', \vec{E}, \vec{B}'$ SONT DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION D'ONDE EN-DEHORS DES SOURCES, DONC DES ONDES. MAINTENANT, ON ENVOIE LES THÉORICIENS CHERCHER DES SOLUTIONS D'UNE UNIQUE EDP.

EXERCICE B

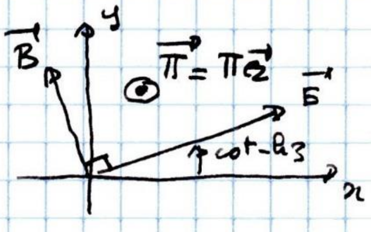
$$\vec{E} = E_0\left[\cos(\omega t - kz)\ ;\ \sin(\omega t - kz)\ ;\ 0\right]$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\left[-\sin(\omega t - kz)\ ;\ \cos(\omega t - kz)\ ;\ 0\right]$$

5

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \underbrace{\frac{E_0^2}{\mu_0 c}}_{\Pi\ \text{CONSTANT}} \vec{e_z}$$

L'ENERGIE SE PROPAGE SELON LES z croissants



6

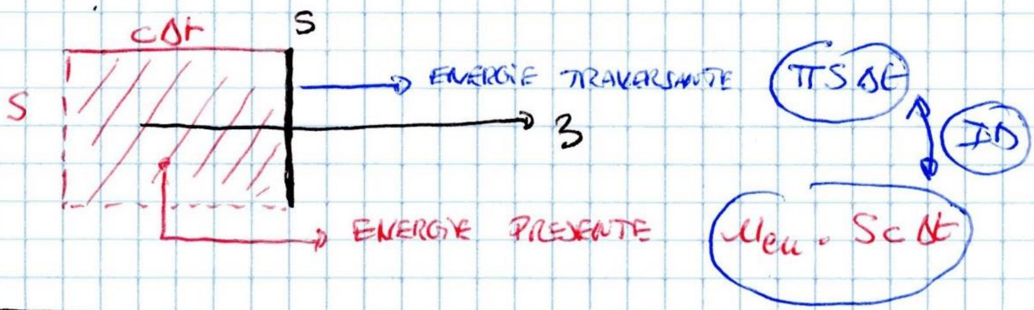
$$u_e = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}$$

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} = u_e$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{em} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2}}$$

ON REMARQUE ALORS : $\boxed{u_{em} \cdot c = \Pi}$

INTERPRETATION : c : VITESSE DE PROPAGATION DE L'ENERGIE.



↳ $\boxed{\text{L'ENERGIE TRAVERSE S À LA VITESSE } c}$

EXERCICE C

(3) $$u_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{2\pi^2 \varepsilon_0 a^4} = \frac{Q^2 \sin^2(\omega t)}{2\pi^2 \varepsilon_0 a^4}$$

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 r^2 \omega^2 Q^2 \cos^2(\omega t)}{8\pi^2 a^4}.$$

D'OÙ VALEURS MOYENNES TEMPORELLES : $\left(\langle \cos^2(\omega t)\rangle = \langle \sin^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}\right)$

↳ $$\langle u_e \rangle = \frac{Q^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 a^4} \qquad \langle u_m \rangle = \frac{\mu_0 r^2 \omega^2 Q^2}{16\pi^2 a^4}$$

↳ $$\boxed{\frac{\langle u_m \rangle}{\langle u_e \rangle} = \left(\frac{r\omega}{2c}\right)^2 \leqslant \left(\frac{a\omega}{2c}\right)^2}$$

↳ $\sim 10^{-5}$

avec $a \sim 0{,}1\,\mathrm{m}$ $\omega \sim 10^{7}\,\mathrm{s^{-1}}$

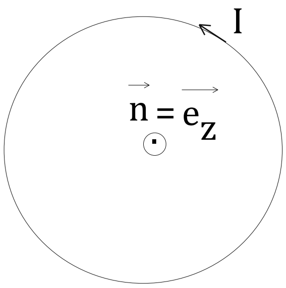
($f \sim \mathrm{MHz}$)

ELECTRONIQUE BASSE FREQUENCES HABITUELLE

↳ EN ELECTRONIQUE USUELLE, L'ENERGIE STOCKÉE DANS UN CONDENSATEUR EST PRATIQUEMENT ENTIEREMENT D'ORIGINE ELECTRIQUE

D.Proposition de solution.

Partie préliminaire



Le dessin ci-dessus est absolument nécessaire. A l'extérieur du solénoïde, le champ magnétique est nul. A l'intérieur, il vaut : $\vec{B} = \mu_o nI\,\vec{e}_z$ et il est uniforme.
Les expressions des énergie magnétique et électrique volumiques sont :

$$u_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_o} \quad et \quad u_{elec} = \frac{\varepsilon_o E^2}{2}$$

En coordonnées cylindriques, le rotationnel du vecteur $\vec{A}\ (A_r, A_\theta, A_z)$ est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

Partie I. Inductance d'une bobine.

1)En convention récepteur, la tension aux bornes du solénoïde est $u = L\frac{di}{dt}$ et la puissance reçue par le solénoïde est donc :

$$p(t) = u(t)\cdot i(t) = i.L\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2} = W_L\right)$$

Si on fait passer le courant depuis la valeur nulle jusqu'à une valeur finale i, le solénoïde reçoit l'énergie $\frac{Li^2}{2}$, énergie que le solénoïde cèdera à l'extérieur quand on fera l'opération inverse.

2)Le volume intérieur du solénoïde est $V = S\cdot \ell$, la densité volumique d'énergie est: $u_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_o} = \frac{(\mu_o ni)^2}{2\mu_o} = \frac{\left(\mu_o \frac{N}{\ell} i\right)^2}{2\mu_o}$ valeur uniforme. Comme le champ magnétique est nul en-dehors du solénoïde, l'énergie magnétique totale est :

$$W_{mag} = u_{mag}V = \frac{1}{2}\frac{\mu_o S N^2}{\ell} i^2$$

En considérant que les deux énergie calculées sont les mêmes, on obtient :

$$L = \frac{\mu_o S N^2}{\ell}$$

Partie II. Champs électriques et magnétique à l'intérieur d'un solénoïde.

1)Le champ magnétique dépend maintenant du temps donc sa dérivée par rapport au temps est non nulle, donc le rotationnel du champ électrique est non nul donc le champ électrique ne peut pas être nul

2)MF en coordonnées cylindriques donne, avec les indications de l'énoncé :

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(rE_\theta) = \mu_o \omega n I_o \cdot sin(\omega t) \quad avec \quad \vec{E} = E_\theta \vec{e}_\theta$$

relation qu'on peut intégrer par rapport à r. La constante qui apparaît sera prise nulle pour éviter une divergence de E_θ en r=0. On obtient : $E_\theta = \frac{1}{2}\mu_o \omega n I_o \cdot sin(\omega t) r$

Partie III.Introduction d'un conducteur dans le solénoïde.

1a) La loi d'Ohm donne : $\vec{j} = \gamma\vec{E} = \frac{1}{2}\gamma\mu_o\omega n I_o \cdot sin(\omega t) r\vec{e}_\theta$

1b)La puissance perdue par effet Joule prend la forme $dP_J=\gamma E^2 d\tau$.

Soit : $dP_J = \gamma\left(\frac{1}{2}\mu_o\omega n I_o \cdot sin(\omega t) r\right)^2 rdrd\theta dz$

grandeur qu'il faut intégrer, de r=0 à r=a , de z=0 à z=h, de θ=0 à 2π. Les deux dernières intégrations reviennent à une simple multiplication par 2πh.

L'intégration donne : $P_J(t) = \frac{\gamma\pi h a^4 (\mu_o \omega n I_o \cdot sin(\omega t))^2}{8}$

dont la valeur moyenne est : $P_M = \langle P_J(t)\rangle = \frac{\gamma\pi h a^4(\mu_o\omega n I_o)^2}{16}$.

1c)Une application est le chauffage de pièces métalliques par induction, par exemple une casserole avec une plaque à induction. Cette méthode est aussi utilisée industriellement pour faire fondre des pièces métalliques dans des fours à induction ; cela peut être assez dangereux.

2a)L'énoncé dit d'utiliser le théorème d'Ampère. Le contour à choisir est identique à celui du solénoïde infini. On va ici utiliser la relation de MA, dans le cadre de l'ARQS, donc en négligeant le courant de déplacement.

En coordonnées cylindriques, cette relation donne ici avec les indications de l'énoncé :

$\frac{dB'}{dr} = -\mu_o\gamma E_\theta = -\mu_o \frac{1}{2}\gamma\mu_o\omega n I_o \cdot sin(\omega t) r$ qu'on peut intégrer par rapport à r.

La constante d'intégration est fournie par l'énoncé qui indique que B' doit être nul pour r=a.

On obtient :$B' = \frac{\gamma\mu_0^2\omega n I_o \cdot sin(\omega t)}{4}(a^2 - r^2)$

Le rapport des amplitudes est alors :

$$\frac{amp(B')}{amp(B)} = \frac{\gamma\omega\mu_o}{4}(a^2 - r^2)$$

Pour que ce dernier rapport puise être considéré petit devant 1, il faut : $\gamma\omega \ll \frac{1}{\mu_o a^2}$.

L'inégalité sera d'autant mieux vérifiée que le métal sera peu conducteur et la fréquence faible.